Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – IZTAPALAPA
DIVISION DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

GENERALIZACIONES DE COMPACIDAD EN LA TOPOLOGÍA GENERAL Y EN EL ÁLGEBRA TOPOLÓGICA

Tesis que presenta
Juan Alberto Martínez Cadena
Para obtener el grado de
Maestro en ciencias (Matemáticas)

Asesor: Dr. Mikhail Tkachenko

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Richard Wilson Roberts

Secretario: Dr. Mikhail Tkachenko

Vocal: Dr. Ángel Tamariz Mascarúa

México D.F. 19 de mayo 2014

Agradecimientos

A mis padres,
por su apoyo y por inculcarme desde pequeño
la importancia de la educación.

A mi asesor, el Dr. M. Tkachenko,
por su paciencia y dedicación al compartirme
parte de sus conocimientos y experiencias.

A los Doctores Richard Wilson y Ángel Tamariz,
por tomarse la molestia de revisar este trabajo
y sobre todo, por sus observaciones.

A mis amigos,
por su convivencia fraternal.

Al CONACyT,
por su apoyo económico para concluir
mis estudios de maestría.

Resumen

En esta tesis nos enfocaremos en realizar un estudio comparativo en la Topología General y en Álgebra Topológica de algunas propiedades de tipo compacidad, tales como: compacidad local, σ-compacidad, paracompacidad, compacidad numerable, pseudocompacidad, compacidad tenue, etc. Siendo consideradas en espacios topológicos, grupos topológicos y grupos paratopológicos.

En el primer capítulo encontraremos la notación, definiciones y algunos resultados básicos que utilizaremos en los capítulos posteriores.

En el segundo capítulo se encuentra un estudio de la influencia de los axiomas de separación T_i, para $i = 0, 1, 2, 3, 3.5$ en los grupos topológicos y paratopológicos. Mostrando que todos los grupos topológicos T_0 son regulares, y exhibiendo ejemplos en los cuales se muestra la no validez de esto en grupos paratopológicos. En la sección 2.1 encontramos una mejoría del comportamiento de propiedades de separación en grupos paratopológicos Hausdorff, mostrando que estos son de Urysohn.

En la sección 3.1 probamos que todo grupo topológico localmente σ-compacto es fuertemente paracompacto. También, probamos diversas aplicaciones de este resultado combinado con otras propiedades no estrechamente ligadas con las propiedades de tipo compacidad, por ejemplo, que todo grupo topológico localmente compacto y separable es σ-compacto y que todo grupo topológico conexo localmente compacto es σ-compacto. Damos ejemplos que muestran el porqué no podemos extender estos resultados a espacios topológicos. En la sección 3.2 se prueba que todo grupo paratopológico localmente compacto es grupo topológico.

En la sección 3.2 presentamos algunas propiedades de grupos topológicos pseudocompactos infinitos. Posteriormente se probará que todo grupo paratopológico pseudocompacto es grupo topológico, basándonos principalmente en un resultado de Arhangel'skii y Reznichenko (teorema 1.7 en [6]). En la subsección 3.2.2 analizaremos el célebre teorema de Comfort-Ross (el producto de grupos topológicos pseudocompactos es pseudocompacto), notando que no podemos extender este resultado a espacios topológicos. Posteriormente en la subsección 3.2.3 presentamos la extensión de Ravsky ([28]) del teorema de Comfort-Ross a grupos paratopológicos tenuemente compactos.

En la subsección 3.2.4 encontramos algunas condiciones de tipo compacidad bajo las cuales un grupo paratopológico resulta ser un grupo topológico (además de las dos mencionadas anteriormente). Presentando resultados como que todo grupo paratopológico regular numerablemente compacto es grupo topológico o que todo grupo paratopológico Hausdorff secuencialmente compacto es grupo topológico. Para generalizar este último hecho, se probará que todo grupo paratopológico totalmente numerablemente compacto es un grupo topológico.

En el capítulo 4 analizamos el teorema de metrización de Birkhoff-Kakutani para grupos topológicos, haciendo una comparación con el teorema de metrización de Nagata-Smirnov para espacios topológicos. Y posteriormente, en la sección 4.2 se mostrarán condiciones necesarias para la metrización en grupos paratopológicos.

En el capítulo 5 se abordarán diversos resultados sobre algunos cardinales invariantes de espacios topológicos, grupos topológicos y paratopológicos, presentando algunas igualdades y desigualdades. Finalmente en la sección 5.2 mostraremos que todo grupo topológico σ-compacto tiene celularidad numerable (Tkachenko, [34]), y una extensión de este resultado a grupos paratopológicos T_1.

Introducción

Un espacio topológico X es compacto si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita. La noción de compacidad como la conocemos hoy en día fue introducida por los matemáticos rusos P. S. Alexandroff y P. Urysohn en 1923. Desde entonces ha sido de gran relevancia en diversas áreas de la matemática y se encuentra relacionada con distintas otras propiedades tanto topológicas como algebraicas. La compacidad tiene un peso mayor en la Topología General, y es aquí, donde es usual aplicar diversos resultados generales a un espacio topológico compacto. Es muy conocido el hecho de que cualquier conjunto infinito se le puede dotar con muchas topologías, pero si este cuenta con una estructura de grupo, es inmediato pensar en la relación que guardan la operación de grupo y los elementos de la topología.

Un grupo paratopológico (G, τ) consiste de un grupo abstracto G dotado de una topología τ, con la cual la multiplicación es conjuntamente continua. Un grupo paratopológico es llamado grupo topológico si la inversión es continua.

Comenzaremos nuestro estudio haciendo una observación de las mejorías acerca de las propiedades de separación que obtendremos en los grupos topológicos. Se probará que todos los grupos topológicos T_0 son regulares (teorema 2.1) y posteriormente se probará que son de Tychonoff (teorema 4.11).

Estudiaremos a los grupos topológicos localmente compactos, mostrando que todo grupo localmente σ-compacto es fuertemente paracompacto. Este hecho implica el conocido resultado de que todo grupo topológico localmente compacto es paracompacto (este resultado aparece en [13] y da una referencia a E. A. Michael). Además, nos lleva a diversas aplicaciones, por ejemplo que todo grupo localmente compacto y conexo es σ-compacto. También, si suponemos que un grupo topológico localmente compacto es separable, éste resulta σ-compacto. Respecto al estudio de la compacidad local en grupos paratopológicos, tenemos que todo grupo paratopológico localmente compacto es grupo topológico. Esto último es válido sin la necesidad de algún axioma de separación, gracias a un resultado mostrado por Ravsky (lema 4 en [24]). El cual nos dice que para algún grupo paratopológico G y un subgrupo invariante K de G, si K y el grupo cociente G/K son grupos topológicos, entonces también lo es G.

Al estudiar la propiedad de pseudocompacidad en grupos topológicos, nos encontramos que los grupos topológicos pseudocompactos infinitos contienen un subconjunto numerable y discreto que no es cerrado. Y sabemos que esto no es posible para espacios topológicos gracias a un ejemplo de Reznichenko ([29]). En cuanto a la propiedad de pseudocompacidad en grupos paratopológicos, obtenemos que todo grupo paratopológico pseudocompacto es un grupo topológico. Esto, es un corolario inmediato de un resultado de Arhangel'skii y Reznichenko en [3] (si un grupo paratopológico G es denso y de tipo G_δ en un espacio topológico T_3 tenuemente compacto, entonces G es un grupo topológico).

También, nos dedicaremos a hacer un estudio acerca del teorema de Comfort-Ross. Este resultado muestra que la influencia de una estructura de grupo topológico en un espacio pseudocompacto es tan fuerte que la pseudocompacidad se vuelve totalmente productiva. Sin embargo, Ravsky muestra que este hecho se puede generalizar para grupos paratopológicos tenuemente compactos sin la necesidad de suponer algún axioma de separación ([27]).

Es de nuestro interés saber para cuáles generalizaciones de tipo compacidad un grupo paratopológico se vuelve grupo topológico. Bokalo y Guran establecen que todo grupo paratopológico Hausdorff secuencialmente compacto es grupo topológico ([9]). Alas y Sanchis generalizan este hecho introduciendo los espacios totalmente numerablemente compactos ([1]), y prueban que los grupos paratopológicos totalmente numerablemente compactos T_1 son grupos topológicos.

Además de nuestro enfoque en las propiedades de tipo compacidad mencionadas anteriormente, abarcaremos otras propiedades muy importantes como la metrización. Nagata y Smirnov muestran que un espacio topológico es metrizable si y sólo si es regular y tiene una base σ-localmente finita, mientras que Birkhoff y Kakutani caracterizan a los grupos topológicos a partir del primer axioma de numerabilidad ([8] y [16]), es decir, un grupo topológico es metrizable si y sólo si es primero numerable. Este es un resultado bastante importante en la categoria de grupos topológicos que nos ayuda a obtener diversas propiedades interesantes. Debido a que el teorema de Birkhoff y Kakutani no se puede extender a grupos paratopológicos, encontraremos ciertas propiedades que podemos dotarle a un grupo paratopológico para establecer su metrizabilidad, por ejemplo, todo grupo paratopológico paracompacto y p-espacio con π-caracter numerable es metrizable. Este hecho y muchos resultados alrededor de él fueron desarrollados por Arhangel'skii y Reznichenko

([6]).

En cuanto a los cardinales invariantes de espacios topológicos, observaremos como mejoran las propiedades de estos en grupos topológicos. Comenzaremos presentando una manera de encontrar el peso de un grupo paratopológico G a partir de su peso red y su carácter ($w(G) = nw(G) \cdot \chi(G)$), este hecho fue obtenido por Ravsky en [25]. También, mencionamos algunas desigualdades que acotan el peso $w(G)$ de algún grupo topológico G. Cabe mencionar que en los grupos topológicos, algunos cardinales invariantes coinciden, tales como el carácter con el π-carácter ($\chi(G) = \pi\chi(G)$) y el peso con el π-peso ($w(G) = \pi w(G)$). Estas igualdades fueron presentadas por Arhangel'skii en [2]. Por otra parte, discutiremos el problema de Arhangel'skii, donde se busca acotar la cardinalidad de espacios regulares de Lindelöf con pseudocaracter numerable. Notaremos que esto es posible en grupos topológicos con la desigualdad $|G| \leq 2^{l(G)\cdot\psi(G)}$, donde G es algún grupo topológico. Y presentaremos la extensión de este hecho a grupos paratopológicos obtenida por Sanchis y Tkachenko en [33].

Finalmente, en la última sección, nos centraremos en mostrar que todo grupo topológico σ-compacto tiene celularidad numerable, el cual es un importante resultado que fue presentado por Tkachenko ([34]). Y además, presentaremos una extensión de este hecho para grupos paratopológicos T_1.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En esta parte introduciremos los conceptos de grupos semitopológicos, cuasitopológicos, paratopológicos y topológicos. Siendo estos últimos dos, junto con los espacios topológicos, los de mayor interés en nuestro estudio.

Este capítulo está diseñado con la idea de que el lector pueda revisar en él, conceptos básicos de la teoría de grupos topológicos y paratopológicos, ya que para la teoría de espacios topológicos nos basaremos en el libro [11]. Sin embargo, debemos de señalar que en este apartado no se hallará un desarrollo detallado de los distintos temas que se tocan en el mismo y que algunas definiciones necesarias en este estudio, se irán presentando a lo largo del texto.

1.1. Notación y terminología

En esta tesis utilizaremos frecuentemente la terminología y notación de grupos topológicos y grupos paratopológicos como en el libro [7].

Usamos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ para denotar a los números naturales, enteros, racionales y reales respectivamente.

Para cualquier espacio topológico X y un subconjunto A de X, denotamos la cerradura de A en X como $\overline{A}$, a menos que se especifique de otra manera.

Dado un grupo G y un elemento $a \in G$, definimos las traslaciones λ_a y ϱ_a (izquierda y derecha respectivamente) como

$$\lambda_a(x) = ax \ \text{ y } \ \varrho_a(x) = xa,$$

para cada $x \in G$. Observemos que λ_a y ϱ_a son biyecciones de G sobre sí mismo.

Un grupo G dotado con una topología τ es llamado grupo ***semitopológico***, si las traslaciones izquierdas y derechas son continuas. Sea $In : G \to G$ la inversión en G definida como $In(x) = x^{-1}$, para cada $x \in G$. Diremos que el grupo semitopológico G es ***cuasitopológico*** si In es continua. También diremos que G es un grupo ***paratopológico*** si la multiplicación en G definida como un mapeo de $G \times G$ a G es continua, donde $G \times G$ tiene la topología producto. Observemos que de esta última definición, tenemos que todo grupo paratopológico es semitopológico.

Un grupo ***topológico*** es un grupo paratopológico donde la inversion In es continua.

A partir de estas definiciones, tenemos que para cualquier grupo G se cumplen las siguientes implicaciones:

$$\text{“topológico”} \Rightarrow \text{“paratopológico”} \Rightarrow \text{“semitopológico”}.$$

Sea G un grupo infinito dotado con la topología co-finita τ, es decir, τ es la colección de todos los subconjuntos de G cuyo complemento es finito, entonces G no es un grupo paratopológico. Sin embargo, es un grupo semitopológico, y más aún es un grupo quasitopológico. Este es un ejemplo inmediato que muestra que no todos los grupos semitopológicos son grupos paratopológicos.

El siguiente ejemplo nos será de gran utilidad a lo largo de este estudio y muestra que no todos los grupos paratopológicos son grupos topológicos.

Ejemplo 1.1. *Sea $\mathbb{R}$ el grupo aditivo de números reales con topología τ, cuya base $\mathcal{B}$ consiste de los conjuntos de la forma $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, con a, $b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Con esta topología $(\mathbb{R}, \tau)$ es un grupo paratopológico y por tanto un grupo semitopológico. Sin embargo, no es un grupo topológico, ya que la inversión In es discontinua.*

Este grupo paratopológico es llamado la **Línea de Sorgenfrey** y será denotado como $\mathcal{L}_S$.

Proposición 1.2. *Sea G un grupo semitopológico y a un elemento de G. Entonces,*

a) las funciones ϱ_a y λ_a son homeomorfismos del espacio G sobre él mismo;

b) para cualquier base local $\mathcal{B}_e$ del neutro e en G, las familias $\{aU : U \in \mathcal{B}_e\}$ y $\{Ua : U \in \mathcal{B}_e\}$ son bases locales de a en G.

Demostración. Mostremos a). Como G es un grupo semitopológico, las traslaciones λ_a y ϱ_a son continuas. Es claro que la inversa de λ_a es λ_a^{-1}, por lo tanto λ_a es un homeomorfismo de G en G. Análogamente se prueva que ϱ_a es un homeomorfismo de G en G. La parte b) se sigue de a). □

Corolario 1.3. *Sea G un grupo semitopológico. Si H es un subgrupo de G que contiene un subconjunto abierto no vacío de G, entonces H es abierto.*

Demostración. Sea U un abierto no vacío de G con $U \subset H$. Para cada $a \in H$, el conjunto $\varrho_a(U) = Ua$ es abierto en G por el inciso a) del teorema 1.2. Por lo tanto, el conjunto $H = \bigcup_{a \in H} Ua$ es abierto en G. □

El siguiente teorema complementa el corolario 1.3.

Teorema 1.4. *Todo subgrupo abierto H de un grupo semitopológico G es cerrado en G.*

Demostración. La familia $\gamma = \{Ha : a \in G\}$ de todas las clases laterales derechas de H en G es una cubierta abierta disjunta de G. Por lo tanto, todo elemento de γ es cerrado en G. En particular, $H = He$ es cerrado en G. □

Decimos que un espacio topológico X es ***homogéneo*** si para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, existe un homeomorfismo f de X sobre sí mismo, tal que $f(x) = y$. El siguiente hecho es una propiedad interesante de los grupos semitopológicos.

Teorema 1.5. *Todo grupo semitopológico es un espacio homogéneo.*

Demostración. Sea G un grupo semitopológico. Tomamos x y $y \in G$, y definimos $z = x^{-1}y$. Entonces $\varrho_z(x) = xz = xx^{-1}y = y$. Como ϱ_z es homeomorfismo, el grupo G es homogéneo. □

1.2. Propiedades básicas

Debido a que más adelante mostraremos varios resultados acerca de grupos topológicos y paratopológicos, las siguientes propiedades son fundamentales para la comprensión de las demostraciones de éstas.

Dado un grupo paratopológico G, es de nuestro interés saber: ¿cuáles son las propiedades de una base de abiertos en el neutro e de G? La respuesta a esta pregunta está contenida en la siguiente proposición, la cual, describe la topología de un grupo paratopológico en términos de una base local del neutro.

Teorema 1.6. *Sea G un grupo paratopológico y $\mathcal{U}$ una base local del neutro e en G. Entonces:*

i) para $U, V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$, tal que $W \subset U \cap V$;

ii) para cada $U \in \mathcal{U}$ y cada $x \in U$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $Vx \subset U$;

iii) para cada $U \in \mathcal{U}$ y cada $x \in G$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $xVx^{-1} \subset U$;

iv) para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subset U$.

Recíprocamente, sea G un grupo y sea $\mathcal{U}$ la familia de subconjuntos de G que satisface las condiciones i)-iv). Entonces la familia $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{Ua : a \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$ es una base para la topología $\tau_{\mathcal{U}}$ en G tal que $(G, \tau_{\mathcal{U}})$ es un grupo paratopológico. Además, la familia $\{aU : a \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$ es una base para la misma topología $\tau_{\mathcal{U}}$.

Demostración. Supongamos que G es un grupo paratopológico. La parte i) es válida porque $\mathcal{U}$ es una base local del neutro e de G. Los incisos ii) y iii) se siguen de la continuidad de las funciones λ_x y $\lambda_{x^{-1}} \circ \varrho_x$. Como la multiplicación es continua en G, se satisface iv).

Probemos el recíproco. Sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de G que satisface las condiciones i)-iv). Sea τ la familia de conjuntos $W \subset G$ que satisfacen la siguiente condición:

($*$) para cada $x \in W$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $Ux \subset W$.

Afirmación 1: *τ es una topología en G.*

Es claro que el vacío y G están en τ. También es claro que la unión arbitraria de elementos de τ está en τ. Ahora, sean $W_1, W_2 \in \tau$. Sea $W = W_1 \cap W_2$. Tomemos $x \in W$, existen $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tales que $U_1x \subset W_1$ y

$U_2x \subset W_2$. Por i), existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subset U_1 \cap U_2$. Por lo tanto, $Ux \subset W_1 \cap W_2 = W$. Se sigue que $W \in \tau$. Hemos probado la afirmación.

Afirmación 2: *$Ux \in \tau$, para cada $x \in G$ y cada $U \in \mathcal{U}$.*

Tomemos $y \in Ux$, equivalentemente, $yx^{-1} \in U$. Por ii), existe $V \in \mathcal{U}$ el cual satisface $Vyx^{-1} \subset U$, es decir, $Vy \subset Ux$. Por lo tanto, el conjunto Ux está en τ.

La afirmación 2 y la condición ii) implican lo siguiente:

Afirmación 3: *La familia $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{Ua : a \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$ es una base para la topología τ. En consecuencia $\tau = \tau_{\mathcal{U}}$.*

Afirmación 4: *La multiplicación en G es continua respecto a la topología τ.*

Sean $a, b \in G$ y O un elemento de τ tal que $ab \in O$. Por definición de τ, podemos encontrar $W \in \mathcal{U}$ tal que $Wab \subset O$. La condición iv) garantiza la existencia de un elemento $U \in \mathcal{U}$ que satisface $U^2 \subset W$. Por iii), existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $aVa^{-1} \subset U$. Se sigue de lo anterior que $U(aVa^{-1}) \subset U^2 \subset W$, por lo tanto, $UaVb = U(aVa^{-1})ab \subset Wab \subset O$. La afirmación está probada.

Afirmación 5: *$bV \in \tau$, para cada $b \in G$ y cada $V \in \mathcal{U}$.*

Tomemos $y \in bV$, es decir, $b^{-1}y \in V$. Por ii), existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $Wb^{-1}y \subset V$. Aplicando iii), podemos encontrar un elemento $U \in \mathcal{U}$ el cual satisface $b^{-1}Ub \subset W$. En consecuencia, $b^{-1}Uy = (b^{-1}Ub)b^{-1}y \subset Wb^{-1}y \subset V$, esto es, $b^{-1}Uy \subset V$. Por lo tanto, $Uy \subset bV$. Hemos probado la afirmación.

Por último, de la afirmación 5 y la condición iii) se concluye que la familia $\{aU : a \in G,\ U \in \mathcal{U}\}$ también es una base para la topología τ. □

Sea A un subconjunto de un grupo semitopológico G, definimos el ***inverso*** de A como $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$. Y decimos que A es ***simétrico*** si $A = A^{-1}$.

Proposición 1.7. *Sea G un grupo paratopológico y $\mathcal{U}$ una base local del neutro en G. Entonces son equivalentes:*

a) G es un grupo topológico;

b) para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subset U$.

Demostración. a) implica b) porque la inversión es continua en la identidad. Probemos que b) implica a). Tomemos un abierto O en G y un elemento arbitrario $o \in O$. El conjunto $o^{-1}O$ es una vecindad abierta de e. Como $\mathcal{U}$ es una base local de e, podemos encontrar $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subset o^{-1}O$. Por hipótesis, existe $V \in \mathcal{U}$ el cual satisface $V^{-1} \subset U$. Por lo tanto, $V \subset U^{-1} \subset O^{-1}o$, en consecuencia, $o^{-1} \in Vo^{-1} \subset O^{-1}$. Como G es grupo paratopológico, Vo^{-1} es una vecindad abierta de o^{-1}. Por lo tanto, el conjunto O^{-1} es abierto en G. Hemos demostrado que la inversión es continua en G. $\square$

Proposición 1.8. *Todo grupo topológico G tiene una base de abiertos en el neutro e, que consiste de vecindades simétricas.*

Demostración. Para un vecindad abierta U en e, sea $V = U \cap U^{-1}$. Entonces $V = V^{-1}$, y el conjunto V es una vecindad abierta de e con $V \subset U$. $\square$

Algunas condiciones suficientes para que un grupo paratopológico sea un grupo topológico, pueden obtenerse con la ayuda de los siguientes lemas.

Lema 1.9. *Supongamos que G es un grupo paratopológico, y U es una vecindad del neutro e en G. Entonces $\overline{M} \subset MU^{-1}$, para cada subconjunto M de G.*

Demostración. Sea $F = G \setminus \bigcup\{gU : g \in G,\ gU \cap M = \emptyset\}$. Entonces, F es un subconjunto cerrado de G y $M \subset F$. Por lo tanto, $\overline{M} \subset F$. Tomamos un $y \in F$. entonces $yU \cap M \neq \emptyset$, esto es, $yh = m$, para algún $h \in U$ y $m \in M$. Por lo tanto, $y = mh^{-1} \in MU^{-1}$. Esto es $F \subset MU^{-1}$. Como $\overline{M} \subset F$, concluimos que $\overline{M} \subset MU^{-1}$. $\square$

Lema 1.10. *Supongamos que G es un grupo paratopológico que no es grupo topológico. Entonces, existe una vecindad abierta U del neutro e en G tal que $U \cap U^{-1}$ es denso en ninguna parte, esto es, Int $\overline{U \cap U^{-1}} = \emptyset$.*

Demostración. Como la operación inversa en G es discontinua, entonces, es discontinua en en el neutro e de G, y podemos encontrar una vecindad W de e tal que $e \notin \mathrm{Int}(W^{-1})$, por la proposición 1.7. La multiplicación en G es continua, entonces podemos encontrar una vecindad abierta U de e tal que $U^3 \subset W$.

Afirmación: El conjunto $U \cap U^{-1}$ es denso en ninguna parte en G.

Asumimos lo contrario. Entonces existe un conjunto abierto no vacío V en G tal que $V \subset \overline{U \cap U^{-1}}$. Por el lemma 1.9 tenemos que $V \subset \overline{U \cap U^{-1}} \subset (U \cap U^{-1})U^{-1} \subset U^{-2}$. Entonces $VU^{-1} \subset U^{-3} \subset W^{-1}$. Claramente, $V \cap U \neq \emptyset$, y el conjunto VU^{-1} es abierto en G. Por lo tanto, $e \in VU^{-1} \subset \mathrm{Int}W^{-1}$, y esto es una contradicción. $\square$

1.3. Grupo topológico asociado

Sea G un grupo paratopológico dotado con una topología τ. Definimos la ***topología conjugada*** τ^{-1} en G como

$$\tau^{-1} = \{U^{-1} : U \in \tau\}.$$

Esta topología hace que (G, τ^{-1}) sea un grupo paratopológico. Es inmediato que (G, τ) y (G, τ^{-1}) son homeomorfos. El límite superior $\tau^* = \tau \vee \tau^{-1}$ es una topología de grupo en G y $G^* = (G, \tau^*)$ es el ***grupo topológico asociado*** al grupo paratopológico (G, τ). Notemos que τ^* es la mínima de las topologías de grupo en G que contienen a τ.

La siguiente proposición describe la topología del grupo topológico asociado G^* en términos del grupo paratopológico G.

Proposición 1.11. *Sea G un grupo paratopológico. Si $\mathcal{B}$ es una base local del neutro en G, entonces $\mathcal{B}^* = \{U \cap U^{-1} : U \in \mathcal{B}\}$ es una base local del neutro en G^*. Además, si G es T_0, entonces G^* es Tychonoff.*

Demostración. La primera parte de esta proposición se sigue de la definición de grupo topológico asociado. Supongamos que G es T_0. Como $\tau \subset \tau^*$, si (G, τ) es T_0, entonces el grupo topológico G^* es T_0 y por tanto Tychonoff (teorema 4.11). □

El siguiente hecho fue presentado por Alas y Sanchis en [1].

Teorema 1.12. *Si G es un grupo paratopológico con topología τ, entonces la diagonal $\Delta_G = \{(x, x) : x \in G\}$ es un grupo topológico con la topología que hereda del producto $(G, \tau) \times (G, \tau^{-1})$, y es topológicamente isomorfo al grupo topológico asociado G^* de G. Además, si G es T_1, entonces Δ_G es cerrado en $(G, \tau) \times (G, \tau^{-1})$.*

Demostración. Es claro que Δ_G es un grupo algebraico y, por lo tanto, es un grupo paratopológico si se le considera con la topología heredada de $(G, \tau) \times (G, \tau^{-1})$. Veamos que Δ_G es un grupo topológico. Sea $\mathcal{N}_G(e)$ una familia de vecindades abiertas del neutro e en G. Una base local de la identidad (e, e) en Δ_G es $\mathcal{B}(\Delta_G) = \{(U \times U^{-1}) \cap \Delta_G : U \in \mathcal{N}_G(e)\}$. Tenemos la igualdad $(U \times U^{-1}) \cap \Delta_G = \{(x, x) : x \in U \cap U^{-1}\}$ para cada $U \in \mathcal{N}_G(e)$. Por lo tanto, $\mathcal{B}(\Delta_G)$ es una familia de vecindades simétricas de (e, e) en Δ_G. Aplicando la proposición 1.7, tenemos que Δ_G es un grupo topológico. Claramente la función $p : \Delta_G \to G^*$, definida como $p(x,x) = x$ es un isomorfismo de grupos. Además, $p((U \times U^{-1}) \cap \Delta_G) = U \cap U^{-1}$. Lo cual muestra que p es continua y abierta. De lo anterior podemos concluir que p es un homeomorfismo. En consecuencia, Δ_G es topológicamente isomorfo al grupo G^*.

Por último, supongamos que G es T_1. Tomemos $x, y \in G$ con $x \neq y$, entonces $xy^{-1} \neq e$. Como G es T_1 podemos encontrar una vecindad W de xy^{-1} en G tal que $e \notin W$. Por la continuidad de la multiplicación en G, existen vecindades U, V de x y y^{-1}, respectivamente, las cuales satisfacen $xy^{-1} \in UV \subset W$. En consecuencia $e \notin UV$. Por lo tanto, $U \times V^{-1}$ es una vecindad de (x, y) en $(G, \tau) \times (G, \tau^{-1})$ la cual no intersecta a la diagonal Δ_G. Por lo tanto, Δ_G es cerrado. $\square$

Capítulo 2

Axiomas de separación

Los axiomas de separación establecen el grado en el que puntos distintos o conjuntos cerrados, pueden estar separados por conjuntos abiertos. Estos axiomas son afirmaciones acerca de la riqueza de la topología.

En este apartado analizaremos el comportamiento de los axiomas de separación en grupos topológicos T_0. Mostraremos que todos los grupos topológicos son T_3. Así también, veremos ejemplos donde no podemos hacer una extensión de este hecho a grupos paratopológicos. Posteriormente, probaremos que todos los grupos paratopológicos Hausdorff son espacios de Urysohn.

2.1. Axiomas de separación en grupos topológicos

En la clase de grupos topológicos, obtenemos un enorme beneficio en cuanto a axiomas de separación, debido a la fuerte influencia de la continuidad de multiplicación e inversión en los elementos básicos que generan la topología del grupo.

Una elegante axiomatización de la topología de un grupo topológico fue dada por A. Weil ([40]) poco después de que A. N. Kolmogorov observara que todo grupo topológico T_0 es un espacio regular. L. S. Pontryagin prueba que todo grupo topológico T_0 es un espacio de Tychonoff. Probemos el resultado de Kolmogorov:

Teorema 2.1. *Todo grupo topológico T_0 G es T_3.*

Demostración. Sea U una vecindad abierta de la identidad e en G. Por la condición 2 en 1.6 y por el teorema 1.8, existe V una vecindad abierta de e tal que $V^{-1} = V$ y $V^2 = U$. Sea $x \in \overline{V}$, entonces se tiene que $Vx \cap V \neq \emptyset$, por lo que $a_1 x = a_2$ para ciertos a_1, $a_2 \in V$, esto implica que $x = a_1^{-1} a_2 \in V^{-1}V = V^2 \subset U$. Por lo tanto $\overline{V} \subset U$, y así tenemos que $e \in V \subset \overline{V} \subset U$. □

Si un grupo topológico es T_0, dado que es T_3, entonces es regular y por tanto de Hausdorff. De aquí en adelante consideraremos sólo grupos T_0, es decir, todos los grupos topológicos serán regulares. De hecho, posteriormente se probará que todo grupo topológico T_0 es de Tychonoff (teorema 4.11). De este último hecho, en la categoría de grupos topológicos T_0 se tienen las siguientes implicaciones:

$$(*) \quad T_0 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_{3.5}.$$

2.2. Axiomas de separación en grupos paratopológicos

Son diversos los ejemplos que muestran que las implicaciones $(*)$ no se cumplen en espacios topológicos generales. Aunque en grupos topológicos la influencia de los axiomas de separación es muy fuerte, esta resulta más sutil en grupos paratopológicos.

A continuación, presentamos ejemplos donde no se cumplen las implicaciones $(*)$ para grupos paratopológicos independientemente de su estructura algebraica.

Ejemplo 2.2. *Consideremos $\mathbb{R}$ el grupo aditivo de números reales dotado con la topología $\tau_0 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Entonces $(\mathbb{R}, \tau_0)$ es un grupo paratopológico, primero numerable y T_0. Ahora, para cualquier $a \in \mathbb{R}$, la cerradura $\overline{\{a\}}$ en $(\mathbb{R}, \tau_0)$ es igual al conjunto $(-\infty, a]$. En particular, $(\mathbb{R}, \tau_0)$ no es T_1. Esto es $T_0 \not\Rightarrow T_1$ en grupos paratopológicos.*

Ejemplo 2.3. *Sea $\mathbb{Z}$ el grupo aditivo de números enteros, con la topología τ_1 en $\mathbb{Z}$ que tiene como básicos los conjuntos de la forma*

$$\{k\} \cup \{[n, \infty) : k, n \in \mathbb{Z}, \quad n > k\}.$$

Entonces $(\mathbb{Z}, \tau_1)$ es un grupo paratopológico T_1, en donde cualesquiera dos conjuntos básicos tienen intersección no vacía. Por lo que $(\mathbb{Z}, \tau_1)$ no es T_2. Esto es $T_1 \not\Rightarrow T_2$ en grupos paratopológicos.

Ejemplo 2.4. *Sea $\mathbb{R}^2$ el plano aditivo, y τ_2 es la topología del grupo paratopológico $\mathbb{R}^2$, cuya base local en el elemento $(0,0)$ consiste de los conjuntos*

$$V_n = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, \quad x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}\},$$

con $n \in \mathbb{N}$. Entonces el grupo paratopológico $(\mathbb{R}, \tau_2)$ es Hausdorff, pero no es regular, ya que el conjunto $(0, 1/n) \times \{0\}$ esta contenido en $\overline{V_n}$ y no en V_1, para toda $n \in \mathbb{N}$. Así que $T_2 \not\Rightarrow T_3$ en grupos paratopológicos.

Una pregunta que surge inmediatamente, a partir de los ejemplos anteriores, es la siguiente.

Problema 2.5. *¿Todo grupo paratopológico regular es de Tychonoff?*

Esta pregunta ha estado abierta alrededor de sesenta años. Además, tampoco es conocido si los grupos paratopológicos regulares primero numerables son de Tychonoff ó ***funcionalmente Hausdorff***, es decir, si funciones de valores reales separan puntos del espacio.

Es natural preguntarse si las propiedades de separación son mejores (en cierta medida) en grupos paratopológicos que en espacios topológicos en general. Resulta que todos los grupos paratopológicos de Hausdorff son de ***Urysohn***, es decir, para cualquiera $x, y \in G$ existen vecindades abiertas U y V de x y y, respectivamente, tales que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Este hecho se deduce a partir de un resultado más general probado en [26]. Antes de presentar este hecho, necesitamos de algunos conceptos. Un subconjunto abierto U de un espacio topológico X es llamado ***abierto regular*** si $U = \mathrm{Int}\overline{U}$. Dado un espacio (X, τ), denotamos por τ' la topología en X, cuya base consiste de subconjuntos abiertos regulares de (X, τ). El espacio (X, τ') se dice que es la ***semiregularización*** de (X, τ) y se denota por X_{sr}. También, se tiene que $\tau' \subset \tau$ y que los espacios (X, τ) y (X, τ') tienen los mismos subconjuntos abiertos regulares.

Teorema 2.6. *Si (G, τ) es un grupo paratopológico Hausdorff, entonces G_{sr} es un grupo paratopológico regular.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base local del neutro $e \in G$. La familia $\mathcal{B}_{sr} = \{\mathrm{Int}\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$ es una base local del neutro e en G_{sr}. Veamos que G_{sr} es un grupo paratopológico, para ello, es suficiente probar que la familia $\mathcal{B}_{sr}$ satisface las condiciones i)-iv) del teorema 1.6.

Condición i). Esta condición se cumple porque la intersección de dos regulares abiertos es un regular abierto.

Condición ii). Tomemos $U \in \mathcal{B}$ y $x \in \mathrm{Int}\overline{U}$. Como $\mathrm{Int}\overline{U}$ es abierto en G, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $Vx \subset \mathrm{Int}\overline{U}$. En consecuencia, $(\mathrm{Int}\overline{V})x = \mathrm{Int}\overline{Vx} \subset \overline{\mathrm{Int}(\mathrm{Int}\overline{U})} = \mathrm{Int}\overline{U}$.

Condición iii). Debido a que las traslaciones izquierdas y derechas son homeomorfismos de G en G, esta condición queda satisfecha.

Condición iv). Tomemos $U \in \mathcal{B}$, como G es grupo paratopológico, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^2 \subset U$. Por la continuidad de la multiplicación en G, tenemos que $\overline{V}^2 \subset \overline{U}$. Como $\mathrm{Int}\overline{V}$ es abierto en G, tenemos que $(\mathrm{Int}\overline{V})^2 \subset \mathrm{Int}(\overline{V}^2) \subset \mathrm{Int}\overline{U}$.

De lo anterior, podemos concluir que G_{sr} es un grupo paratopológico. Como G es Hausdorff, el espacio G_{sr} es Hausdorff. Probemos que G_{sr} es regular.

La semiregularización de un espacio G tiene los mismos conjuntos regulares abiertos que el grupo G. Sabemos que la familia $\mathcal{B}_{sr}$ consiste de regulares abiertos en G, por lo tanto, la familia $\mathcal{B}_{sr}$ está formada de regulares abiertos en G_{sr}. Tomemos $O \in \mathcal{B}_{sr}$. La igualdad $\mathrm{Int}_{G_{sr}}\overline{O}^{G_{sr}} = O$ se satisface por que O es un regular abierto en G_{sr}. Como G_{sr} es un grupo paratopológico, existe $W \in \mathcal{B}_{sr}$ tal que $W^2 \subset O$. En consecuencia $W\overline{W}^{G_{sr}} \subset \overline{W}^{G_{sr}}\overline{W}^{G_{sr}} \subset \overline{O}^{G_{sr}}$. Así, $\overline{W}^{G_{sr}} \subset Int_{G_{sr}}\overline{O}^{G_{sr}} = O$. Hemos probado que G_{sr} es un grupo paratopológico regular. □

Un espacio cuyos subconjuntos abiertos regulares forman una base para su topología es llamado ***semiregular***. Ninguna de las siguientes implicaciones se puede invertir:

$$\text{regular} \Rightarrow \text{semiregular y Hausdorff}$$
$$\text{regular} \Rightarrow \text{Urysohn} \Rightarrow \text{Hausdorff}$$

El siguiente hecho se sigue del teorema 2.6:

Teorema 2.7. *Todo grupo paratopológico Hausdorff es un espacio de Urysohn.*

Demostración. Por el teorema 2.6, la semiregularización G_{sr} de un grupo paratopológico Hausdorff G es regular, entonces para cuales quiera dos puntos distintos existen abiertos ajenos en G_{sr} que los separan, dado que G_{sr} es regular, existen vecindades de dichos puntos cuyas cerraduras son ajenas en G_{sr} y estas son ajenas en G. Por lo tanto, G es de Urysohn. □

Este último teorema sugiere preguntarnos si ¿todo grupo paratopológico Hausdorff es un grupo funcionalmente Hausdorff? El teorema 2.7 nos sugiere que una respuesta positiva al problema 2.5, daría una respuesta afirmativa a esta última pregunta.

Por último, observemos que si G es un grupo semitopológico Hausdorff, entonces su semiregularización G_{sr} también es un grupo semitopológico Hausdorff por la definición de semiregularización. Presentamos una versión del teorema 2.7 para grupos semitopológicos.

Teorema 2.8. *Todo grupo semitopológico Hausdorff admite una topología Hausdorff semiregular de grupo semitopológico.*

Más adelante, observaremos que los axiomas de separación jugarán un papel muy importante en los grupos paratopológicos, al considerar alguna generalización de compacidad en estos.

Capítulo 3

Generalizaciones de compacidad

En este capítulo estudiaremos el concepto de compacidad con sus distintas generalizaciones, tales como: compacidad local, pseudocompacidad, compacidad tenue, compacidad numerable, σ-compacidad, paracompacidad y la propiedad de Lindelöf. Realizaremos un estudio comparativo de estas propiedades en espacios topológicos, grupos topológicos y grupos paratopológicos.

3.1. Compacidad local

En esta sección estudiaremos algunas de las propiedades más elementales de los grupos topológicos localmente compactos, comparándolas con espacios topológicos. Mostraremos que los grupos topológicos localmente compactos son fuertemente paracompactos. Este hecho nos llevará a concluir que todo grupo localmente compacto y conexo es σ-compacto. También, si suponemos que un grupo topológico localmente compacto es separable, éste resulta σ-compacto.

Además, argumentaremos la razón por la cual el estudio de la compacidad local en grupos paratopológicos puede ser facilitada por algunos resultados probados por R. Ellis en [10].

La noción de un espacio localmente compacto fue introducida por Alexandroff en 1923. Recordemos que un espacio topológico X es ***localmente compacto***, si para todo $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que la cerradura de U es compacta en X. Un espacio topológico X es ***paracompacto***, si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito (este concepto fue introducido por Dieudonné en 1944). Una propiedad más fuerte de este tipo, es la paracompacidad fuerte. Una familia γ de subconjuntos de X es ***estrella-finita***, si todo elemento de γ interseca sólo un número finito de elementos de γ. Un espacio topológico X es ***fuertemente paracompacto*** si toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto estrella-finito. Claramente todo espacio fuertemente paracompacto es paracompacto. Como todo espacio regular de Lindelöf es fuertemente paracompacto y todos los espacios σ-compactos son de Lindelöf, entonces todo espacio regular σ-compacto es fuertemente paracompacto.

Finalmente, diremos que un espacio topológico es ***localmente σ-compacto*** si para todo punto $x \in X$ existe una vecindad V de x, tal que $\overline{V}$ es σ-compacta.

El siguiente teorema de E. A. Michael ([13]) generaliza el conocido hecho de que un grupo topológico localmente compacto es paracompacto.

Teorema 3.1. *Todo grupo topológico G localmente σ-compacto es fuertemente paracompacto.*

Demostración. Tomamos una vecindad simétrica V de la identidad e en G, tal que $F = \overline{V}$ es σ-compacto, y definimos $H = \bigcup_{n\in\omega} F^n$. Claramente H es un subgrupo de G, y el interior de H contiene a V. Por lo tanto, H es un subgrupo abierto y cerrado por el corolario 1.3 y teorema 1.4. Es claro que cada F^n es σ-compacto, entonces el espacio H es σ-compacto y por tanto Lindelöf. El espacio G es la suma topológica libre de subespacios homeomorfos a H (de las clases laterales derechas de H). Como todo espacio regular Lindelöf es fuertemente paracompacto (corolario 5.3.11 en [11]), se sigue que G es fuertemente paracompacto. $\square$

Notemos que por las propiedades de H en la demostración anterior, podemos deducir la siguiente proposición:

Proposición 3.2. *Todo grupo topológico localmente σ-compacto contiene un subgrupo abierto y cerrado que es σ-compacto.*

El siguiente es un hecho inmediato del teorema 3.1:

Corolario 3.3. *Todo grupo topológico localmente compacto es fuertemente paracompacto.*

En estos dos últimos hechos, es muy notable que la paracompacidad fuerte aparece en la presencia de una estructura algebraica. El corolario 3.3 no es cierto para espacios topológicos en general. Consideremos el conjunto $[0, \omega_1)$ dotado con la topología inducida por el orden lineal. Observemos que para cada $a \in [0, \omega_1)$, el conjunto $[0, a]$ es una vecindad compacta de a. Por lo tanto $[0, \omega_1)$ es localmente compacto.

Antes de mostrar que $[0, \omega_1)$ no es paracompacto, recordemos que para un cardinalidad con cofinalidad no numerable κ, un **conjunto estacionario** de κ, es un subconjunto $S \subset \kappa$ que interseca a todo subconjunto cerrado y no acotado de κ.

Necesitamos auxiliarnos del siguiente hecho (teorema 8.7 en [14]) para mostrar nuestro ejemplo:

Teorema 3.4. ***[Fodor]*** *Sea $S \subset \kappa$ un conjunto estacionario y f una función de valores ordinales en S, tal que $f(\alpha) < \alpha$ para toda $\alpha \in S$. Entonces, existe un conjunto estacionario $T \subset S$ y un $\gamma < \kappa$, tal que $f(\alpha) = \gamma$, para toda $\alpha \in T$.*

Ahora, sea $\mathcal{U} = \{[0, \alpha) : \alpha < \omega_1\}$ una cubierta abierta de $[0, \omega_1)$ y $\mathcal{V}$ un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$. Sea S el conjunto de los ordinales límites menores que ω_1. Entonces S es un conjunto estacionario de ω_1. Para cada $\beta \in S$ escojemos un Y_β en $\mathcal{V}$ tal que $\beta \in Y_\beta$. Consideramos la función $f : S \to \omega_1$, tal que a cada β le asigna el menor ordinal en Y_β. Para un $\beta \in S$, $f(\beta) < \beta$ ya que β es un ordinal límite y Y_β es abierto. Por el teorema 3.4, existe $T \subset S$ conjunto estacionario tal que f es constante en T. Sea y el valor de f en T. Entonces $y \in Y_\beta$ para todo $\beta \in T$. Por lo cual, para cualquier vecindad V_y de y, $|\{V_y \cap U : U \in \mathcal{V}\}| > \omega$. Esto es, $[0, \omega_1)$ no es paracompacto y por lo tanto no es fuertemente paracompacto.

El siguiente teorema (ejercicio 169, capítulo 5 en [5]) nos da una condición necesaria para extender el corolario 3.3 a espacios topológicos:

Teorema 3.5. *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Si X es localmente compacto y paracompacto, entonces es fuertemente paracompacto.*

Demostración. Debido a que X es localmente compacto y paracompacto, por el ejercicio 168 en [3] tenemos que X se puede cubrir por una familia γ mutuamente disjunta de subespacios abiertos en X tal que U es de Lindelöf, para todo $U \in \gamma$. Entonces, U es fuertemente paracompacto para todo $U \in \gamma$ (corolario 5.3.11 en [11]). El ejercicio 164 en [3], nos dice que si X

admite una cubierta abierta disjunta donde cada elemento de la cubierta es fuertemente paracompacto, entonces X es fuertemente paracompacto. Por lo tanto, concluimos la demostración. $\square$

Si imponemos una propiedad topológica (no de tipo compacidad) a un grupo topológico localmente compacto, podemos obtener algunos resultados interesantes como el siguiente:

Teorema 3.6. *Todo grupo topológico localmente compacto y separable es σ-compacto.*

Demostración. Sea G como en la hipótesis y sea $D = \{x_n : n \in \omega\}$ denso en G. Como G es localmente compacto, existe una vecindad V abierta del neutro e tal que $\overline{V}$ es compacto. Debido a que $VD = G = DV$ (ejercicio 1.2.i en [11]), podemos expresar a G como

$$G = \bigcup_{n\in\omega} x_n V = \bigcup_{n\in\omega} x_n \overline{V}.$$

Puesto que $\overline{V}$ es compacto, entonces cada subespacio $x_n\overline{V}$ es compacto en G para toda $n \in \omega$ (por la proposición 1.4.31 en [7]). Por lo tanto, G es σ-compacto. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que este resultado no puede ser generalizado a espacios topológicos.

Consideremos el subespacio $X = \beta\mathbb{N} \setminus \{p\}$ con $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, de la compactación de Stone-Čech de los números naturales $\mathbb{N}$. El espacio X es separable y localmente compacto. Supongamos que X es de Lindelöf, para cada $x \in X$ tomamos una vecindad abierta de x en $\beta\mathbb{N}$ con $\overline{V_x} \subset X$. Entonces $\{V_x : x \in X\}$ cubre a X, por lo cual existe $\{V_{x_n} : n \in \omega\}$ subcubierta abierta de ésta que cubre a X. Entonces $\{p\} = \bigcap_{n\in\omega} \beta\mathbb{N} \setminus \overline{V_{x_n}}$ es un G_δ en $\beta\mathbb{N}$; dado que $\beta\mathbb{N}$ es compacto, se tiene que el pseudocarácter y carácter de p en $\beta\mathbb{N}$ coinciden, esto es, $\psi(p, \beta\mathbb{N}) = \chi(p, \beta\mathbb{N})$. Entonces podemos encontrar una sucesion no trivial en $\beta\mathbb{N}$ que converja a p. Lo cual es una contradicción, ya que en $\beta\mathbb{N}$ no existen sucesiones convergentes no triviales (corolario 3.6.15 en [11]). Por lo tanto, concluimos que X no es de Lindelöf y así no es σ-compacto.

Para que un espacio topológico localmente compacto sea σ-compacto, es suficiente la propiedad de Lindelöf.

Teorema 3.7. *Si X es un espacio topológico localmente compacto y Lindelöf entonces es σ-compacto.*

Demostración. Como X es localmente compacto, para cada $x \in X$ existe una vecindad U_x de x tal que $\overline{U_x}$ es compacto en X.

La colección $\{U_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X, como X es de Lindelöf, existe $\{U_{x_n} : n \in \omega\}$ subcubierta abierta numerable de ésta. Tenemos que

$$X = \bigcup\{U_{x_n} : n \in \omega\} = \bigcup\{\overline{U_{x_n}} : n \in \omega\},$$

ya que $U_{x_n} \subset \overline{U_{x_n}}$ para todo $n \in \omega$. De esta última igualdad concluimos que X es σ-compacto. □

La conexidad es una propiedad topológica que no está tan estrechamente ligada con la compacidad. Sin embargo, por esta propiedad podemos deducir hechos interesantes para grupos topológicos.

Teorema 3.8. *Todo grupo topológico conexo y localmente σ-compacto es σ-compacto.*

La demostración de este teorema es inmediata por la proposición 3.2 que nos garantiza la existencia de un subgrupo σ-compacto que es abierto y cerrado en un grupo localmente σ-compacto. Dado que en esta afirmación el grupo topológico es conexo, entonces obtenemos el resultado.

El siguiente es un hecho inmediato del teorema 3.8:

Corolario 3.9. *Todo grupo topológico conexo localmente compacto es σ-compacto.*

Este último resultado, al igual que muchos de los anteriores, no puede extenderse a espacios topológicos en general, es decir, consideremos el cubo de Tychonoff I^κ y el subespacio $X = I^\kappa \setminus \{\overline{0}\}$ de peso $\kappa > \omega$, donde $\overline{0}$ es el punto donde todas sus entradas son cero en I^κ. Si X tiene la topología heredada de I^κ, entonces es localmente compacto y conexo.

Ahora, el espacio $\mathbb{N}^{\omega_1}$ está encajado como subespacio cerrado de $\mathbb{N}^\kappa$ ($\mathbb{N}^{\omega_1} \hookrightarrow \mathbb{N}^\kappa$) y éste a su vez está encajado como subespacio cerrado de X ($\mathbb{N}^\kappa \hookrightarrow X$). Por lo cual, $\mathbb{N}^{\omega_1} \hookrightarrow X$ como subespacio cerrado.

Sea $\mathbb{Z}$ el grupo aditivo discreto de los enteros. Como $\mathbb{N}^{\omega_1}$ es homeomorfo a $\mathbb{Z}^{\omega_1}$ y $\mathbb{Z}^{\omega_1}$ no es normal (problema 1.7.A en [7]), entonces X no es normal. Por lo tanto, no es σ-compacto.

Sin embargo, para obtener la propiedad de Lindelöf en espacios topológicos de una manera análoga al corolario 3.9, el siguiente teorema nos es de gran ayuda.

Teorema 3.10. *Todo espacio topológico regular, conexo y fuertemente paracompacto es de Lindelöf.*

Demostración. Sea X un espacio topológico como en la hipótesis. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Tomamos un refinamiento abierto estrella-finito $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in I\}$ de $\mathcal{U}$. Tomamos $\alpha \in I$, asumiendo que $V_\alpha \neq \emptyset$. Sea $St(V_\alpha, \mathcal{V}) = \bigcup\{U \in \mathcal{V} : U \cap V_\alpha \neq \emptyset\}$ la estrella de V_α en $\mathcal{V}$. Denotamos $St^1(V_\alpha, \mathcal{V}) = St(V_\alpha, \mathcal{V})$ y $St^{n+1}(V_\alpha, \mathcal{V}) = St(St^n(V_\alpha, \mathcal{V}), \mathcal{V})$. Definimos

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} St^n(V_\alpha, \mathcal{V}),$$

entonces W es abierto. Ahora, si $x \notin W$ entonces $St(x, \mathcal{V}) \cap W = \emptyset$; por tanto $x \notin \overline{W}$, esto es W es cerrado. Ya que X es conexo, $X = W$. Como $\mathcal{V}$ es estrella-finito, W es una unión numerable de miembros de $\mathcal{V}$. Entonces $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta numerable y por tanto es de Lindelöf. □

Utilizando el teorema 3.5, obtenemos lo siguiente.

Corolario 3.11. *Sea X un espacio topológico conexo. Si X es localmente compacto y paracompacto, entonces es un espacio de Lindelöf.*

Notemos nuevamente que en este último corolario, la paracompacidad es necesaria para la extensión del resultado a espacios topológicos en general.

Los teoremas 3.5, 3.7 y el corolario 3.11 nos muestran el gran beneficio que obtenemos del teorema 3.3 para espacios topológicos localmente compactos con estructura de grupo.

3.1.1. Grupos paratopológicos localmente compactos

El teorema de R. Ellis (teorema 2.3.12 en [7]), nos dice que todo grupo semitopológico Hausdorff localmente compacto es un grupo topológico. Existe una serie de generalizaciones de este resultado presentadas por diferentes autores. Es claro que los espacios de Hausdorff localmente compactos son Tychonoff, sin embargo en algunos casos el requisito de separación en el teorema de Ellis puede ser debilitada.

Romaguera y Sanchis mostraron en [31] que cada grupo paratopológico compacto T_0 es un grupo topológico. De hecho, se puede disminuir la restricción T_0 en el resultado de Romaguera y Sanchis (esto fue establecido por Ravsky en [27]). Esta afirmación se puede extender a todos los grupos paratopológicos localmente compactos, eliminando completamente el axioma de separación de Hausdorff del teorema de Ellis. Para mostrar esto, necesitamos el siguiente resultado probado por Ravsky en [24].

Lema 3.12. *Sean G un grupo paratopológico y K un subgrupo arbitrario invariante de G. Si K y el grupo cociente paratopológico G/K son grupos topológicos, entonces G es grupo topológico.*

Demostración. Sea U vecindad del neutro e en G. Entonces por la propocisión 1.6 existen V y W vecindades del neutro, tales que $V \subset U$, $(V^{-1})^2 \cap K \subset U$ y $W \subset V$, $W^{-1} \subset VK$. Si $x \in W^{-1}$, entonces existen elementos $v \in V$, $k \in K$ tales que $x = vk$. Entonces $k = v^{-1}x \in V^{-1}W^{-1} \cap K \subset U$, esto es, $x \in VU \subset U^2$. Por lo tanto, $W^{-1} \subset U^2$ y G es un grupo topológico. □

En otras palabras, el lema 3.12 nos dice que la propiedad de ser un grupo topológico es invariante bajo las extensiones de la clase de los grupos paratopológicos.

Lema 3.13. *Sea K un subgrupo compacto e invariante de un grupo paratopológico G. Entonces, el homomorfismo cociente $\pi : G \to G/K$ es un mapeo cerrado.*

Demostración. Sea S un subconjunto cerrado de G. Por el teorema 1.4.30 en [7], el conjunto SK es cerrado en G y por tanto el conjunto $G \setminus SK$ es abierto. Como π es un mapeo abierto, el subconjunto $\pi(G \setminus SK)$ de G/K es abierto. Tenemos que $SK = \pi^{-1}(\pi(S))$ y por lo tanto $G \setminus SK = \pi^{-1}(G/K \setminus \pi(S))$. Se sigue que $\pi(G \setminus SK) = G/K \setminus \pi(S)$. Por lo anterior, el conjunto $G/K \setminus \pi(S)$ es abierto en G/K; por lo tanto $\pi(S)$ es cerrado en G/K. □

Teorema 3.14. *Todo grupo paratopológico localmente compacto es un grupo topológico.*

Demostración. Sea G un grupo paratopológico localmente compacto. Sea $\mathcal{B}$ una base local para el neutro e en G. Entonces

$$B = \bigcap \{\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}.$$

Sean $a, b \in B$, W_1 y W_2 vecindades abiertas en G de a y b respectivamente. Tomamos $U \in \mathcal{B}$, entonces existe un $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^2 \subset U$ (proposición 1.6). Como $W_1 \cap V \neq \emptyset$ y $W_2 \cap V \neq \emptyset$, entonces $W_1W_2 \cap V^2 \neq \emptyset$ y por lo tanto $W_1W_2 \cap U \neq \emptyset$. Como W_1W_2 es una vecindad abierta de ab, se sigue que $ab \in B$ y por lo tanto B es un semigrupo cerrado de G.

Además, tenemos que $x^{-1}Bx \subset B$, para cada $x \in G$. Y como G es localmente compacto, B es compacto.

Afirmación: *B es un subgrupo de G.*

Un subconjunto no vacío M de B es llamado ***ideal derecho*** en B si $MB \subset M$. Como B es un subsemigrupo de G, éste contiene un ideal mínimo cerrado derecho H (aplicando el lema de Zorn-Kuratowski a la familia de todos los ideales cerrados derechos en K, ordenados por la inclusión inversa). Para un elemento arbitrario $x \in H$, tenemos que $xH \subset HB \subset H$. También tenemos que $xHB = x(HB) \subset xH$, es decir, xH es un ideal derecho en B. Como xH es cerrado en B, $xH \subset H$ y H es un ideal minimal derecho en B, concluimos que $xH = H$ para cada $x \in H$. En particular, $x^2y = x$ para algún $y \in H$ y por tanto $x^{-1} = y \in H$. Esto implica que $e \in H$, $H = B$ y que B es un subgrupo de G.

Dado que B es cerrado en G, el grupo paratopológico cociente G/B es un espacio T_1. Por la compacidad de B, aplicando el lema 3.13, tenemos que el homomorfismo cociente $\pi : G \to G/B$ es cerrado, entonces el espacio G/B es localmente compacto. Probaremos que G/B es Hausdorff. Supongamos por contradicción que dos elementos distintos $a, b \in G/B$ no pueden ser separados por vecindades abiertas. Tomamos $x, y \in G$ con $\pi(x) = a$ y $\pi(y) = b$, entonces $xB \cap yB = \emptyset$. Como G es localmente compacto, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $\overline{V}$ es compacto. Por nuestra suposición, la familia

$$\{x\overline{U} \cap y\overline{U} : U \in \mathcal{B},\ U \subset V\}$$

de subconjuntos cerrados del espacio compacto $x\overline{V}$ tiene la propiedad de la intersección finita, esto a su vez implica que $xB \cap yB \neq \emptyset$. Esta contradicción prueba que G/B es Hausdorff.

Ahora, como G/B es un grupo paratopológico Hausdorff localmente compacto, entonces es un grupo topológico (por el teorema de Ellis). Y como B es un grupo topológico, aplicando el lema 3.12, concluimos que G es grupo topológico. $\square$

Por este último hecho, concluimos que todos los resultados anteriores para grupos topológicos localmente compactos, pueden extenderse a grupos paratopológicos localmente compactos.

Por último, cabe señalar que además del teorema de Ellis, en algunos casos especiales, los grupos semitopológicos resultan ser grupos topológicos, por ejemplo, los grupos semitopológicos Čech-completos (teorema 2.4.12 en [7]).

3.2. Pseudocompacidad y Compacidad numerable

La pseudocompacidad es una propiedad puramente topológica. En relación con los grupos topológicos y paratopológicos, adquiere características específicas que son de gran interés para la investigación.

En esta parte estudiaremos el concepto de pseudocompacidad, que está estrechamente relacionado con el concepto de compacidad. Empezaremos mostrando algunos hechos básicos interesantes, que involucran a los subconjuntos de grupos topológicos pseudocompactos. Analizaremos el célebre teorema de Comfort-Ross, para establecer la conservación de pseudocompacidad en productos de grupos topológicos, y presentaremos una extensión de este hecho para grupos paratopológicos tenuemente compactos, esto, sin la necesidad de algún axioma de separación.

Finalmente, daremos algunas condiciones que involucran ciertas generalizaciones de pseudocompacidad para transformar un grupo paratopológico en grupo topológico.

Un espacio de Tychonoff X es ***pseudocompacto*** si toda función continua con valores reales definida en X es acotada. Hewitt introduce este concepto en 1948.

Un espacio topológico de Hausdorff X es ***numerablemente compacto*** si toda cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita. La compacidad numerable fue introducida por Fréchet en 1906.

3.2.1. Grupos topológicos y paratopológicos pseudocompactos

Presentaremos propiedades básicas con las que cuentan los grupos topológicos y paratopológicos pseudocompactos, propiedades que no podemos garantizar en espacios topológicos.

El siguiente hecho es una propiedad conocida con la que cuentan los espacios topológicos numerablemente compactos.

Lema 3.15. *Todo espacio topológico X infinito y numerablemente compacto contiene un subconjunto numerable de X que no es cerrado.*

Demostración. Tomamos un subconjunto infinito numerable A de X. Como X es numerablemente compacto, por el ejercicio 189 del capítulo 3 en [5], existe un punto $x_0 \in X$ tal que $|U_{x_0} \cap A| = \aleph_0$ para cualquier vecindad U_{x_0} de x_0. Por lo que el conjunto $A \setminus \{x_0\}$ es el deseado. $\square$

El lema anterior se puede extender a grupos topológicos pseudocompactos contando con una propiedad aún más fuerte.

Por el teorema 1.4.23 en [7], sabemos que los subgrupos discretos de grupos topológicos pseudocompactos son finitos. Un resultado interesante que se sigue de este hecho, es que todos los grupos topológicos pseudocompactos infinitos contienen un subconjunto numerable que no es cerrado (corolario 1.4.24 en [7]). Sin embargo, si queremos obtener algo aún más interesante respecto al conjunto numerable no cerrado, necesitamos definir los grupos topológicos precompactos.

Un grupo topológico G es ***precompacto*** si, para toda vecindad U del neutro e en G, existe un subconjunto finito A de G tal que $UA = AU = G$. De manera análoga se definen los subconjuntos precompactos de grupos topológicos.

Por el teorema 3.7.2 en [7], sabemos que todo grupo topológico pseudocompacto es precompacto. Protasov presenta el siguiente hecho en [22].

Teorema 3.16. [**I.V. Protasov**] *(teorema 3.7.27 en [7]) Sea A subconjunto precompacto infinito de un grupo topológico G con neutro e. Entonces AA^{-1} contiene un subconjunto discreto numerable B tal que $e \in \overline{B} \setminus B$.*

Por el teorema de Protasov podemos concluir:

Corolario 3.17. *Todo grupo topológico pseudocompacto infinito G contiene un subconjunto numerable y discreto que no es cerrado.*

El corolario 3.17 no puede extenderse a espacios topológicos pseudocompactos. E. A. Reznichenko construyó en [29] un subespacio pseudocompacto X_α del cubo de Tychonoff I^α (asumiendo que el cardinal infinito α satisface

$\alpha^{\aleph_0} = \alpha$), donde $|X_\alpha| = \alpha$ y todo subconjunto $Y \subset X_\alpha$ con $|Y| < \alpha$ es discreto y cerrado en X_α. En particular, todos los subconjuntos numerables de X_α son discretos y cerrados en X_α.

Decimos que un espacio topológico X es ***tenuemente compacto***, si toda familia localmente finita de conjuntos abiertos en X es finita. Por lo que compacidad tenue es equivalente a la pseudocompacidad para espacios de Tychonoff.

Para analizar como actúa la pseudocompacidad en los grupos paratopológicos, necesitamos de un resultado muy importante presentado por Arhangel'skii y Reznichenko en [6].

Teorema 3.18. ***[A. V. Arhangel'skii, E. A. Reznichenko]*** *Sea X un espacio topológico T_3 tenuemente compacto. Si G es un grupo paratopológico denso y de tipo G_δ en X, entonces G es un grupo topológico.*

Demostración. Asumimos lo contrario. Entonces, por el lemma 1.10, existe una vecindad abierta U del neutro e en G, tal que $\overline{U \cap U^{-1}}$ es denso en ninguna parte. Sea W una vecindad abierta del neutro tal que $\overline{WW} \subset U$. Sea $O = W \setminus \overline{U \cap U^{-1}}$. Entonces $O \subset W \subset \overline{O}$ y $O^{-1} \cap U = \emptyset$.

Tomamos una sucesión $\{M_n : n \in \omega\}$ de conjuntos abiertos en X tal que $G = \bigcap\{M_n : n \in \omega\}$. Definimos la sucesión $\{U_n : n \in \omega\}$ de conjuntos abiertos en X y una sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ de elementos de G tal que $x_n \in U_n$. Ponemos $U_0 = M_0$, y sea x_0 un punto de O.

Asumimos que, para algún $n \in \omega$, un abierto U_n de X y $x_n \in G \cap U_n$ están definidos. Como $e \in W \subset \overline{O}$, tenemos que $x_n \in x_n\overline{O} = \overline{x_nO}$. Ya que U_n es una vecindad abierta de x_n, se sigue que $U_n \cap x_nO \neq \emptyset$. Tomamos x_{n+1} en $U_n \cap x_nO$. Notemos que $x_{n+1} \in G$, por que $x_nO \subset G$.

Como X es T_3, podemos encontrar una vecindad U_{n+1} de x_{n+1} en X tal que $\overline{U_{n+1}} \subset U_n \cap M_n$, y $U_{n+1} \cap G \subset x_nO$. La definición de los conjuntos U_n y los puntos x_n, está completa para toda $n \in \omega$. Notemos que $\overline{U_i} \subset U_j$ para cada $j < i$. También, tenemos que $x_{n+1} \in x_nO$, para cada $n \in \omega$.

Hacemos $F = \bigcap_{n\in\omega} U_n$. Es inmediato que $F \subset G$. Debido a que X es tenuemente compacto, entonces $F = \bigcap_{n\in\omega} \overline{U_n} \neq \emptyset$. El conjunto FW es una vecindad abierta de F en G. Consideramos P la cerradura de FW en X, y sea H la cerradura de $X \setminus P$ en X. Veamos que $H \cap F = \emptyset$. Supongamos lo contrario, y tomamos un $x \in H \cap F$. Como FW es una vecindad abierta de F en G, si $x \in F$ se sigue que existe una vecindad $O(x)$ de x en X tal que $O(x) \cap G \subset FW$. Entonces, como G es denso en X, tenemos que $O(x) \subset P$.

Por otra parte, si $x \in H$ implica que $O(x) \cap (X \setminus P) \neq \emptyset$, y esto es una contradicción. Por lo cual, $H \cap F = \emptyset$. Ahora, de la compacidad tenue de X y la definición de F, tenemos que existe un $k \in \omega$ tal que $U_k \cap H = \emptyset$ (esto es por que $\overline{U_i} \subset U_j$ para $i < j$). Entonces $U_k \subset P$. Como $x_k \in U_k \cap G$, se concluye que $x_k \in \overline{FW}$.

Sin embargo, $F \subset U_{k+2} \cap G \subset x_{k+1}O \subset x_{k+1}W$. Por lo tanto, $x_k \in \overline{FW} \subset x_{k+1}\overline{WW}$.

Teniendo en cuenta que $x_{k+1} \in x_k O$, tenemos que $x_k \in x_k O\overline{WW}$. Por lo cual, $e \in O\overline{WW} \subset OU$. Por lo tanto, $O \cap U^{-1} \neq \emptyset$. Como $O \subset U$, se sigue que $O \cap (U \cap U^{-1}) = O \cap U^{-1} \neq \emptyset$, y esto es una contradicción. □

Corolario 3.19. *Todo grupo paratopológico T_3 tenuemente compacto es un grupo topológico.*

El ejemplo 3 en [28] muestra que un grupo paratopológico Hausdorff tenuemente compacto no es necesariamente un grupo topológico, aunque éste sea de carácter numerable. El siguiente corolario fue obtenido por Reznichenko en [30].

Corolario 3.20. *Todo grupo paratopológico pseudocompacto es un grupo topológico.*

La siguiente proposición 3.22 complementa al corolario 3.20. Para mostrar esto, necesitamos de un lema (lema 3.3 en [36]).

Lema 3.21. *Sea $f : G \to H$ un homomorfismo continuo de un grupo topológico G sobre un grupo paratopológico (H, τ). Entonces el homomorfismo $f : G \to H^*$ al grupo topológico asociado $H^* = (H, \tau^*)$ es continuo.*

Demostración. Supongamos que $U \in \tau^*$ es una una vecindad arbitraria del neutro e en H^*. Se sigue de la definición de τ^* que exite $V \in \tau$ tal que $e \in V$ y $V \cap V^{-1} \subset U$. Como el homomorfismo $f : G \to H$ es continuo y G es un grupo topológico, los conjuntos $W = f^{-1}(V)$ y $W^* = W \cap W^{-1}$ son vecindades abiertas del neutro en G. Entonces $f(W^*) \subset f(W) \cap f(W^{-1}) \subset V \cap V^{-1} \subset U$, de donde se sigue la continuidad de $f : G \to H^*$. □

Notemos que H y G no requieren de ningún axioma de separación.

Proposición 3.22. *Sea $f : G \to H$ un homomorfismo continuo de un grupo topológico tenuemente compacto G sobre un grupo paratopológico H. Entonces H es un grupo topológico.*

Demostración. Por el lemma 3.21, y por la invarianza de compacidad tenue bajo mapeos continuos, concluimos que H^* es pseudocompacto. Por el teorema 1.12, tenemos que la diagonal $\Delta_H \subset (H,\tau) \times (H,\tau^{-1})$ es un grupo topológico con la topología que hereda de $(H,\tau) \times (H,\tau^{-1})$, y es topológicamente isomorfo a el grupo topológico asociado H^*. Entonces, $\Delta_H \subset (H,\tau) \times (H,\tau^{-1})$ es un grupo topológico pseudocompacto. El lema 2.3 en [1] nos dice que si la diagonal $\Delta_H \subset (H,\tau) \times (H,\tau^{-1})$ es un grupo topológico pseudocompacto, entonces H es un grupo topológico. Por lo tanto, queda probada la proposición. □

Korovin desarrolló en [17] una técnica para la construcción de grupos semitopológicos y cuasitopológicos pseudocompactos que no son grupos paratopológicos. Reznichenko muestra que un grupo semitopológico pseudocompacto es un grupo topológico si es separable o si es un k-espacio (corolario 2.7 en [30]). En [30] también se muestra que cada grupo semitopológico Tychonoff numerablemente compacto es un grupo topológico.

3.2.2. El teorema de Comfort-Ross

Es bien sabido que la pseudocompacidad no es finitamente multiplicativa, Novák construyó en [20] dos subespacios pseudocompactos (de hecho numerablemente compactos) X y Y de $\beta\mathbb{N}$, cuyo producto $X \times Y$ no es pseudocompacto . Sin embargo, en la categoría de grupos topológicos, la pseudocompacidad se preserva bajo productos de una cantidad arbitraria de grupos topológicos, lo que es el famoso teorema de Comfort-Ross.

Un subespacio Y de un espacio X está ***C-encajado*** en X si toda función continua de valores reales sobre Y, se puede extender a una función continua de valores reales sobre X.

A un subespacio Y de un espacio X le llamaremos ***G_δ-denso*** en X si todo conjunto no vacío de tipo G_δ en X, interseca a Y. La ***G_δ-cerradura*** de un conjunto $Y \subset X$ en un espacio X se define como el conjunto de todos los puntos $x \in X$ tales que todo conjunto G_δ en X que contiene a x intersecta a Y.

Proposición 3.23. *Todo grupo topológico pseudocompacto es precompacto.*

Demostración. Sea V una vecindad abierta simétrica del neutro e en G. Por el lema de Zorn, existe un subconjunto maximal A de G que es ***V-disyunto*** (esto es, $b \notin aV$, para puntos distintos $a, b \in G$).

Si U es una vecindad abierta simétrica de e con $U^4 \subset V$, entonces la familia de conjuntos abiertos $\{xU : x \in A\}$ es discreta en G, así que A debe ser finito porque G es pseudocompacto. Como A es maximal, se sigue que $G = AV$. Por lo tanto G es precompacto. □

Para la comprensión de la demostración del teorema de Comfort-Ross, es necesario definir un concepto de gran impacto en los grupos topológicos.

Un filtro $\mathcal{F}$ en un grupo topológico G es un ***filtro de Cauchy***, si para toda vecindad U del neutro e en G, existen a, $b \in G$ tales que $aU \in \mathcal{F}$, $Ub \in \mathcal{F}$. Un grupo topológico G donde todo filtro de Cauchy converge es llamado ***Raĭkov completo***. Para todo grupo topológico, existe un grupo topológico Raĭkov completo ϱG, donde G está encajado como subgrupo denso de ϱG (teorema 3.6.10 en [7]). El grupo topológico ϱG es llamado la ***compleción de Raĭkov*** del grupo G. Para todo grupo topológico G, $\varrho\varrho G = \varrho G$. En particular, G es Raĭkov completo si y sólo si $G = \varrho G$.

Con el objetivo de demostrar nuestro teorema principal, necesitamos mencionar los siguientes resultados probados en [7].

Teorema 3.24. *La compleción de Raĭkov de todo grupo topológico pseudocompacto es compacto.*

Corolario 3.25. ***[W.W. Comfort, K.A. Ross]*** *Sean G un grupo topológico y Y un subespacio denso de G. Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:*

a) Y es G_δ-denso en G y G es pseudocompacto;

b) Y es C-encajado en G y G es pseudocompacto;

c) Y es pseudocompacto.

Demostración. Supongamos que se cumple a), como G es pseudocompacto, entonces es precompacto por la proposición 3.23. Si Y un subespacio denso de G, y G es precompacto entonces Y está C-encajado en la G_δ-cerradura de Y en G (teorema 6.6.1 en [7]), por lo tanto a) implica b). Claramente, b) implica c). Finalmente, si Y es pseudocompacto, entonces G es pseudocompacto, como Y es denso en G. También, Y es G_δ-denso en G, por la proposición 3.7.20 en [7] (un subespacio pseudocompacto denso en un espacio de Tychonoff X es G_δ-denso en X). Por lo tanto, c) implica a). □

Teorema 3.26. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de grupos paratopológicos Tychonoff. Si $D_i \subset X_i$ es un subconjunto denso y pseudocompacto en X_i para todo $i \in I$, entonces $\prod_{i\in I} D_i$ es pseudocompacto.*

Demostración. Puesto que D_i es pseudocompacto y denso en X_i, entonces cada X_i es pseudocompacto (notar que X_i es un grupo topológico por el teorema 3.20) y además ϱX_i es compacto para todo $i \in I$ por el teorema 3.24. También, del teorema 3.24 se sigue que D_i es homeomorfo a un subespacio denso del grupo topológico compacto ϱX_i para todo $i \in I$, y por la proposición 3.7.20 en [7] D_i es G_δ-denso en ϱX_i. Como la propiedad de ser G_δ-denso se preserva bajo productos de subespacios densos en grupos topológicos, entonces $\prod_{i\in I} D_i$ es G_δ-denso en $\prod_{i\in I} \varrho X_i$, y $\prod_{i\in I} \varrho X_i$ es compacto por el teorema de Tychonoff. Por el corolario 3.25 podemos concluir que $\prod_{i\in I} D_i$ es pseudocompacto. □

Este último resultado implica el siguiente resultado conocido como el teorema de Comfort-Ross:

Corolario 3.27. ***[W.W. Comfort, K.A. Ross]*** *El producto de una familia de grupos topológicos pseudocompactos es pseudocompacto.*

Como una primera observación, de acuerdo al ejemplo 3.10.19 en [11], concluimos que el teorema de Comfort-Ross no es válido para espacios topológicos. Sin embargo, nos encontramos con que el producto de dos espacios topológicos pseudocompactos se preserva bajo ciertas condiciones adicionales. Un espacio topológico X es un ***k-espacio*** si es un espacio de Hausdorff y es imagen de un espacio localmente compacto bajo un mapeo cociente. En otras palabras, los k-espacios son espacios de Hausdorff que pueden ser representados como espacios cocientes de espacios localmente compactos. El teorema 3.10.26 en [11] nos dice que el producto de dos espacios topológicos pseudocompactos es pseudocompacto si al menos uno de ellos es un k-espacio. Sin embargo, esto se puede extender a un producto arbitrario de pseudocompactos k-espacios (corolario 4.10 en [21]).

Teorema 3.28. *Si la familia $\{X_i : i \in I\}$ son pseudocompactos k-espacios, entonces el producto $\prod_{i\in I} X_i$ es pseudocompacto.*

Tkachenko prueba en [35] que el producto $G \times Y$ de un grupo topológico pseudocompacto G con un espacio topológico pseudocompacto X es pseudocompacto. Recordemos que un espacio topológico pseudocompacto pertence a la ***clase de Frolik***, si el producto cartesiano de este con algún otro espacio topológico pseudocompacto resulta ser pseudocompacto. Por lo tanto, los grupos topológicos pseudocompactos y los k-espacios pertenecen a la clase de Frolik.

Más adelante, mostraremos que el teorema de Comfort-Ross puede extenderse a grupos paratopológicos tenuemente compactos (teorema 3.31). Sin embargo, esto no ocurre para grupos cuasitopológicos pseudocompactos, es decir, existen grupos cuasitopológicos pseudocompactos cuyo producto no es pseudocompacto. Hernández y Tkachenko presentan un ejemplo de esto en [12].

En cuanto a grupos topológicos numerablemente compactos, del teorema de Comfort-Ross, concluimos que el producto de grupos topológicos numerablemente compactos es pseudocompacto. Entonces, nos preguntamos si el producto de grupos topológicos numerablemente compactos es numerablemente compacto. Resulta que esto es imposible al menos en ZFC. Bajo el Axioma de Martin, E. van Douwen exhibe en [39] dos grupos topológicos numerablemente compactos cuyo producto no es numerablemente compacto.

3.2.3. Productos de grupos paratopológicos tenuemente compactos

Debido a que la compleción de Raĭkov está definida exclusivamente en grupos topológicos, resulta muy difícil imaginar una posible extensión del teorema de Comfort-Ross (que está formulado para grupos topológicos pseudocompactos que son de Tychonoff), a grupos paratopológicos tenuemente compactos.

Ravsky muestra en [28] que esto es posible sin la necesidad de algún axioma de separación, considerando sólamente a los grupos paratopológicos tenuemente compactos.

Lema 3.29. *Sea G un grupo topológico con neutro e, N la cerradura de $\{e\}$ en G, y $\mathcal{B}$ una base de vecindades del neutro e en G. Entonces, N es un subgrupo cerrado invariante de G y el grupo topológico cociente Hausdorff G/N es tenuemente compacto si y sólo si G es tenuemente compacto.*

Demostración. Si el grupo G es tenuemente compacto entonces el grupo G/N es imagen continua de un espacio tenemuente compacto. Por lo tanto G/N es tenuemente compacto.

Ahora, sea $\mathcal{U}$ una familia localmente finita de subconjuntos abiertos de G. Como N la cerradura de $\{e\}$ en G, entonces $UH = H$ para cada $U \in \mathcal{B}$. Sea $\pi : G \to G/N$ el homomorfismo cociente. Por lo tanto la familia $\{\pi(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es localmente finita también. Como el espacio G/N es tenuemente compacto, la familia $\{\pi(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es finita. Por lo tanto, la familia $\mathcal{U}$ es finita también y G es tenuemente compacto. $\square$

Sea $G = \prod_{i\in I} G_i$ un producto de grupos topológicos, y sea e_i el neutro en G_i para cada $i \in I$. Entonces los grupos topológicos Hausdorff G/N y $G = \prod_{i\in I} G_i/N_i$ son topológicamente isomorfos, donde N_i es la cerradura de $\{e_i\}$ en G_i para cada $i \in I$. La combinación de este resultado y el lema 3.29 nos lleva a la siguiente versión del teorema 3.27.

Teorema 3.30. *El producto de una familia arbitraria de grupos topológicos tenuemente compactos es tenuemente compacto.*

Como ya se mencionó, todos los grupos paratopológicos T_3 tenuemente compactos son grupos topológicos. Es por este hecho, que es inmediato preguntarse si el teorema 3.30 se puede extender a productos de grupos paratopológicos Hausdorff tenuemente compactos. La respuesta a esto es afirmativa. Ravsky muestra en [28] que al igual que en el teorema 3.30, la propiedad de separación Hausdorff no es necesaria.

Teorema 3.31. ***[Ravsky]*** *El producto de una familia arbitraria de grupos paratopológicos tenuemente compactos es tenuemente compacto.*

Demostración. La demostración de este teorema se basa en el empleo de la operación de semiregularización. Primero, se tiene que un espacio X es tenuemente compacto si la semiregularización X_{sr} de X es tenuemente compacto. Segundo, si $X = \prod_{i\in I} X_i$ es un espacio producto, entonces X_{sr} es homeomorfo a $\prod_{i\in I}(X_i)_{sr}$. Sea $G = \prod_{i\in I} G_i$ un producto de grupos paratopológicos tenuemente compactos. Las observaciones anteriores implican que G es tenuemente compacto si y sólo si el producto $G_{sr} \cong \prod_{i\in I}(G_i)_{sr}$ es tenuemente compacto. Por el teorema 2.6, cada $(G_i)_{sr}$ es un grupo paratopológico tenuemente compacto y T_3, entonces por el corolario 3.19, $(G_i)_{sr}$ es grupo topológico para toda $i \in I$. Como los $(G_i)_{sr}$ son grupos topológicos, por el teorema 3.30, concluimos que el grupo G también es tenuemente compacto. $\square$

Es importante señalar que la clase de grupos paratopológicos tenuemente compactos es notable en al menos dos aspectos. En primer lugar, cada grupo paratopológico tenuemente compacto regular es un grupo topológico (teorema 3.18), y en segundo lugar, el producto arbitrario de grupos paratopológicos tenuemente compactos es tenuemente compacto (teorema 3.31).

3.2.4. Grupos paratopológicos numerablemente compactos

La observación y análisis de los teoremas 3.14 y 3.20, nos llevan a preguntar: ¿para qué otras condiciones de tipo compacidad un grupo paratopológico resulta ser un grupo topológico? A continuación presentaremos algunos resultados que responden a nuestra pregunta.

Los espacios numerablemente compactos son también tenuemente compactos, entonces del teorema 3.18 también se concluye que:

Corolario 3.32. *Todo grupo paratopológico regular numerablemente compacto es grupo topológico.*

Es natural preguntarnos si podemos extender los corolarios 3.20 y 3.32 a una propiedad de tipo compacidad más general. Recordemos que un espacio topológico X es ***secuencialmente compacto*** si toda sucesión de puntos de X tiene una subsucesión convergente. Ahora, una vez definido este concepto, podemos mencionar el siguiente teorema establecido por Bokalo y Guran en [9].

Teorema 3.33. *Todo grupo paratopológico Hausdorff secuencialmente compacto es grupo topológico.*

Alas y Sanchis generalizan el teorema 3.33 a una clase más general de grupos paratopológicos. Decimos que un espacio topológico X es ***totalmente numerablemente compacto***, si toda sucesión en X contiene una subsucesión con cerradura compacta. En la clase de los espacios de Hausdorff, los espacios secuencialmente compactos son totalmente numerablemente compactos y estos a su vez son numerablemente compactos.

Alas y Sanchis prueban en [1] que todo grupo paratopológico estrictamente numerablemente compacto T_1 es un grupo topológico. Ravsky prueba en [28] el siguiente resultado que generaliza el teorema 3.33.

Teorema 3.34. *Todo grupo paratopológico estrictamente numerablemente compacto es un grupo topológico.*

Demostración. Sea G un grupo paratopológico estrictamente numerablemente compacto. En vista del teorema 3.14, asumimos que G es infinito. Sea e el neutro en G y $K = \overline{\{e\}}$, la cerradura de e en G. Tenemos que $x^{-1}Kx \subset K$, para cada $x \in G$. Como G es infinito y estrictamente numerablemente compacto, entonces K es compacto. También, como en la prueba del teorema 3.14, se puede obtener que K es un subgrupo de G.

Debido a que K es cerrado en G, el grupo paratopológico cociente G/K es un espacio T_1. También, G/K es imagen continua de un homomorfismo sobre G, entonces es estrictamente numerablemente compacto. Por lo cual, G/H es un grupo topológico por el teorema de Alas-Sanchis en [1] y además K es un grupo topológico. Por el lema 3.12, concluimos que G es un grupo topológico. □

Los teoremas 3.33 y 3.34 muestran que, bajo ciertas condiciones más fuertes que la compacidad numerable, un grupo paratopológico resulta ser un grupo topológico.

Por último, una generalización de compacidad que no hemos mencionado en los grupos paratopológicos, es la propiedad de Lindelöff. Es conocido que esta propiedad funciona mejor en la clase de los ***P-espacios***, es decir, donde todos los conjuntos G_δ son abiertos. De acuerdo al teorema 4 en [23], se sabe que un grupo paratopológico T_1 Lindelöf y P-espacio es un grupo topológico. En [32] y [38] se muestra que este último hecho no se puede extender para la clase de los grupos paratopológicos T_0.

Capítulo 4

Metrización

En este capítulo analizaremos la clase de los espacios métricos, la cual fue introducida por Fréchet en 1906. Esta clase de espacios nos permite utilizar una intuición geométrica para conocer sus propiedades. Además, incluye diversos objetos de estudio en distintas ramas de las matemáticas.

En una primera parte analizaremos dos caracterizaciones de metrización como lo son el célebre teorema de Birkhoff-Kakutani para grupos topológicos y el teorema de Nagata-Smirnov para espacios topológicos. Posteriormente, mostraremos algunas condiciones necesarias para la metrización en grupos paratopológicos.

4.1. El teorema de Birkhoff-Kakutani

El teorema de metrización de Nagata-Smirnov da una caracterización completa de los espacios topológicos metrizables. En otras palabras, el teorema describe las condiciones necesarias y suficientes para que una topología en un espacio se defina utilizando alguna métrica.

En esta parte de nuestro estudio analizaremos una caracterización dada por G. Birkhoff y S. Kakutani para los grupos topológicos metrizables, con la cual obtenemos una riqueza de resultados a partir del primer axioma de numerabilidad.

Para la demostración del teorema de Nagata-Smirnov necesitamos de las siguientes afirmaciones, cuyas pruebas pueden encontrarse detalladamente en [11].

Teorema 4.1. *Todo espacio metrizable es perfectamente normal.*

Teorema 4.2. *Todo espacio metrizable tiene una base σ-localmente finita.*

Lema 4.3. *Todo espacio regular con base σ-localmente finita es perfectamente normal.*

Lema 4.4. *Sean X un espacio T_0 y $\{\rho_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de pseudométricas en X acotadas por 1 que satisfacen las siguientes condiciones:*

i) Las funciones $\rho_i : X \times X \to \mathbb{R}$ son continuas para todo $i \in \mathbb{N}$.

ii) Para todo $x \in X$ y para todo cerrado no vacío $A \subset X$ tal que $x \notin A$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_i(x, A) = \inf\{\rho_i(x, a) : a \in A\} > 0$.

Entonces el espacio X es metrizable y la función ρ definida por:

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\rho_i(x, y) \quad \textit{para} \quad x, y \in X$$

es una métrica en X.

El siguiente teorema fue probado por Nagata y Smirnov entre 1950 y 1951.

Teorema 4.5. ***[Nagata-Smirnov]*** *Un espacio topológico es metrizable si y sólo si es regular y tiene una base σ-localmente finita.*

Demostración. Bastará demostrar la suficiencia. La necesidad se obtiene inmediatamente a partir de los teoremas 4.1 y 4.2.

Sea X un espacio topológico regular con base $\mathcal{B} = \bigcup_{i\geq 1} \mathcal{B}_i$, donde $\mathcal{B}_i = \{U_s\}_{s\in S_i}$ es una familia localmente finita. Para cada $i \in \mathbb{N}$ y para algún $s \in S_i$, por el lema 4.3 y el teorema 1.5.13 en [11], existe una función continua $f : X \to I$ tal que $U_s = f_s^{-1}((0, 1])$. Como la familia $\{W_s\}_{s\in S_i}$, donde $W_s = (U_s \times X) \cup (X \times U_s)$, es localmente finita en $X \times X$ y $|f_s(x) - f_s(y)| = 0$ si $(x, y) \notin W_s$, se sigue del teorema 1.4.7 en [11] que dejando

$$g_i(x, y) = \sum_{s\in S_i} |f_s(x) - f_s(y)|, \quad \textit{para} \quad (x, y) \in X \times X$$

se define una función continua $g_i : X \times X \to \mathbb{R}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, la fórmula $\rho_i(x, y) = \min\{1, g_i(x, y)\}$ define una pseudométrica continua en el espacio X que es acotada por 1 y la familia $\{\rho_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ satisface las condiciónes (i) y (ii) del lema 4.4. Es decir, para todo $x \in X$ y todo cerrado no vacío $A \subset X$ tal que $x \notin A$, existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U$ y $A \subset X \backslash U$. Ahora, $U = U_s \in \mathcal{B}_i$ para algún i y $s \in S_i$ y como $f_s(x) > 0$ y $f_s(A) = \{0\}$, tenemos que $\inf\{\rho_i(x, a) : a \in A\} \geq f_s(x) > 0$. Entonces por el lema 4.4 tenemos que X es metrizable. $\square$

Ahora, introduciremos el concepto de "prenorma" de un grupo, que fue dado por A. A. Markov en [19] bajo el nombre de pseudonorma.

Sea G un grupo abstracto con elemento neutro e. Sea N una función de valores reales definida en G. Diremos que N es una ***prenorma*** en G si satisface las siguientes condiciones para todos los $x, y \in G$:

a) $N(e) = 0$;
b) $N(xy) \leq N(x) + N(y)$;
c) $N(x^{-1}) = N(x)$.

Proposición 4.6. *Si N es una prenorma en un grupo G, entonces $N(x) \geq 0$, para todo $x \in G$.*

Demostración. Sea $x \in G$, por a), b) y c) tenemos $0 = N(e) = N(xx^{-1}) \leq N(x) + N(x^{-1}) = 2N(x)$. Por lo tanto, $N(x) \geq 0$. $\square$

Proposición 4.7. *Si N es una prenorma en un grupo G, entonces $|N(x) - N(y)| \leq |N(xy^{-1})|$, para todos $x, y \in G$.*

Demostración. Por b) tenemos que $N(y) \leq N(x) + N(x^{-1}y)$. También de b) y c) se sigue que $N(x) = N(x^{-1}) \leq N(y^{-1}) + N(x^{-1}y) = N(y) + N(x^{-1}y)$. Por ambas desigualdades se obtiene la conclusión de la proposición. $\square$

Si N es una prenorma en un grupo G, al conjunto

$$B_N(\varepsilon) = \{x \in G : N(x) < \varepsilon\},$$

donde ε es un número positivo, le llamaremos la N-*bola* de radio ε. Además, los conjuntos $B_N(\varepsilon)$ son abiertos cuando N es una prenorma continua.

El siguiente lema, cuya demostración se encuentra en [7], es de gran importancia para obtener el resultado deseado para grupos topológicos primero numerables.

Lema 4.8. *Sea* $\{U_n : n \in \omega\}$ *una sucesion de vecindades abiertas simétricas del neutro* e*, en un grupo topológico* G *tal que* $U_{n+1}^2 \subset U_n$*, para cada* $n \in \omega$*. Entonces existe una prenorma* N *en* G *que satisface la condición:*

$$\left\{x \in G : N(x) < \frac{1}{2^n}\right\} \subset U_n \subset \left\{x \in G : N(x) \leq \frac{2}{2^n}\right\}, \text{ para todo } n \in \omega.$$

Por lo tanto esta prenorma N *es continua. Además, si los conjuntos* U_n *son invariantes, entonces la prenorma* N *en* G *satisface que* $N(xyx^{-1}) = N(y)$*, para todos* x*,* $y \in G$*.*

El siguiente teorema es una importante aplicación del lema 4.8.

Teorema 4.9. ***[G. Birkhoff, S. Kakutani]*** *Un grupo topológico* G *es metrizable si y sólo si es primero numerable.*

Demostración. La necesidad es clara para espacios topológicos en general. Probemos la suficiencia. Tomemos una base numerable $\{U_n : n \in \omega\}$ de G en el elemento neutro e. Por inducción, obtenemos una sucesión $\{V_n : n \in \omega\}$ de vecindades abiertas y simétricas del neutro tal que $V_n \subset U_n$ y $V_{n+1}^2 \subset V_n$ para cada $n \in \omega$. Esta sucesión es también una base para G en e. Por el lema anterior, existe una prenorma N en G, tal que $B_N(1/2^n) \subset V_n$ para cada $n \in \omega$ y se sigue que los conjuntos abiertos $B_N(1/2^n)$ forman una base de G en e.

Definamos $\phi_N(x, y) = N(xy^{-1})$, para x, $y \in G$. Mostraremos que ϕ_N es una métrica en G que genera su topología original. Claramente tenemos que $\phi_N(x, y) = N(xy^{-1}) \geq 0$, para todo x, $y \in G$, y además $\phi_N(x, x) = 0$, para todo $x \in G$. Sean $x, y \in G$, supongamos que $\phi_N(x, y) = 0$, entonces $xy^{-1} \in B_N(1/2^n) \subset U_n$, para cada $n \in \omega$. Como $\{e\} = \bigcap_{n\in\omega} U_n$, se sigue que $xy^{-1} = e$, por lo cual $x = y$.

Ahora, sean x, y, $z \in G$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi_N(x, z) &= N(xz^{-1}) \\ &= N(xy^{-1}yz^{-1}) \leq N(xy^{-1}) + N(yz^{-1}) \\ &= \phi_N(x, y) + \phi_N(y, z). \end{aligned}$$

Por lo que ϕ_N es una métrica en G.

Notemos que la métrica ϕ es *invariante por la derecha*, esto es

$$\phi_N(xz, yz) = N(xzz^{-1}y^{-1}) = N(xy^{-1}) = \phi_N(x, y),$$

para todos los $x, y, z \in G$. Ahora, con la métrica ϕ_N, la N-bola $B_N(\varepsilon)$ es claramente la esfera de radio ε con centro en e, entonces la esfera de un punto $x \in G$ de radio ε es presisamente el conjunto $B_N(\varepsilon)x$. Como los conjuntos $B_N(1/2^n)$ forman una base de G en e, entonces para todo punto $x \in G$, los conjuntos $B_N(1/2^n)x$ forman una base de G en x, esto es, las esferas de e de radio $1/2^n$ forman una base del espacio G en el punto x. Por lo tanto, la métrica ϕ_N genera la topología original del espacio G, es decir, G es metrizable. $\square$

Este último teorema, probado en [8] y [16], nos muestra la enorme ganancia que obtenemos a partir de suponer el primer axioma de numerabilidad en un grupo topológico. Sin embargo, no podemos extender esta afirmacion para grupos paratopológicos ni espacios topológicos en general. Un claro contraejemplo para ambos casos sería la Línea de Sorgenfrey $\mathcal{L}_S$, donde todo elemento tiene una base local numerable pero no puede ser metrizable. Esto es por que $\mathcal{L}_S$ tiene un subconjunto denso numerable, pero no tiene la base numerable, que significa que es separable sin ser segundo numerable.

Una vez introducido el concepto de prenorma y dada una caracterización de grupos topológicos metrizables, podemos encontrar algo más acerca de los axiomas de separación en grupos topológicos.

Sea G un grupo topológico con neutro e y $\mathcal{N}_S(e)$ la familia de vecindades simétricas de e en G. Para un elemento $V \in \mathcal{N}_S(e)$ definimos $O_V \subset G \times G$ como

$$O_V = \{(g, h) \in G \times G : gh^{-1} \in V, g^{-1}h \in V\}.$$

Denotamos por $\mathcal{D}_G$ la familia de todos los subconjuntos simétricos de $G \times G$, y definimos el conjunto $\mathcal{V}_G$ como

$$\mathcal{V}_G = \{D \in \mathcal{D}_G : O_V \subset D \text{ para algún } V \in \mathcal{N}_S(e)\}.$$

Sea $\mathbb{R}$ el grupo aditivo de los números reales, y sea $\mathcal{U}$ una uniformidad en $\mathbb{R}$, cuya base esta formada por los conjuntos $U(\varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R} : |x-y| < \varepsilon\}$, donde $\varepsilon > 0$.

Sea G un grupo topológico. Una función f con valores reales sobre G es ***uniformemente continua*** si f es un mapeo uniformemente continuo de

$(G, \mathcal{V}_G)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$. Esto significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe $O \in \mathcal{V}_G$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ siempre que $(x, y) \in O$.

Un grupo topológico G es llamado ***uniformemente Tychonoff***, si para toda vecindad abierta V del neutro e de G, existe una función uniformemente continua $f : G \to \mathbb{R}$ que satisface $f(e) = 0$ y $f(x) \geq 1$ para cada $x \in G \setminus V$. Claramente, si G es uniformemente Tychonoff entonces es un espacio de Tychonoff.

Para mostrar nuestro resultado principal, necesitamos del siguiente hecho probado por A. A. Markov (teorema 3.3.9 en [7]), que es inmediato después del lema 4.8.

Teorema 4.10. *Sea G un grupo topológico con neutro e. Para cada vecindad abierta del neutro U, existe una prenorma continua N en G tal que la bola unitaria $B_N(1)$ está contenida en U.*

Teorema 4.11. *Todo grupo topológico G es uniformemente Tychonoff.*

Demostración. Sea U una vecindad abierta de la identidad e en G. Por el teorema 4.10, existe una prenorma continua N en G tal que $B_N(1) \subset U$. Entonces tenemos que $N(e) = 0$ y $N(x) \geq 1$, para cada $x \in G \setminus U$.

Ahora, supongamos que z es un punto de G, y ε un número positivo. Como N es continua, tenemos que existe una vecindad U del neutro e en G tal que $N(x) < \varepsilon$, para todo $x \in U$ (proposición 3.3.7 en [7]). Entonces, el conjunto $V = zU$ es una vecindad abierta de z. Tomamos $y \in zU$, entonces $z^{-1}y \in U$, y por lo tanto, $N(z^{-1}y) < \varepsilon$. Por la proposición 4.7, se sigue que $|N(z) - N(y)| < \varepsilon$. Por lo tanto, N es uniformemente continua y G es uniformemente Tychonoff. $\square$

4.2. Metrización en grupos paratopológicos

Anteriormente se justificó que un grupo paratopológico primero numerable no necesariamente es metrizable, sin embargo, existen algunas condiciones bajo las cuales un grupo paratopológico primero numerable resulta ser metrizable.

Un espacio de Tychonoff X es un ***p*-*espacio*** si existe una colección numerable $\xi = \{\gamma_n : n \in \omega\}$ de familias γ_n de conjuntos abiertos en la compactación de Stone-Čech βX de X tal que $\bigcap\{St(x, \gamma_n) : n \in \omega\} \subset X$, para todo $x \in X$. En 1963, A. Arhangel'skii introduce la clase de los p-espacios y demuestra que los p-espacios paracompactos son preimágenes perfectas de espacios métricos.

Un espacio topológico X se dice que tiene una ***diagonal regular*** G_δ si la diagonal $\Delta = \{(a, a) : a \in G\}$ se puede representar como $\Delta = \bigcap\{\overline{U} : U \in \gamma\}$, donde γ es alguna familia numerable de vecindades abiertas de Δ en $G \times G$.

Teorema 4.12. *Para todo grupo semitopológico Hausdorff paracompacto G de π-carácter numerable, existe un mapeo continuo e inyectivo de G sobre un espacio métrico.*

Demostración. Como G es Hausdorff con π-carácter numerable, tenemos que la diagonal Δ en $G \times G$ es un conjunto G_δ (corolario 5.7.5 en [7]). Por la paracompacidad de G, se sigue del ejercicio 5.5.7 en [11] que existe un mapeo inyectivo y continuo sobre un espacio métrico. □

Para mostrar una caracterización de metrización para grupos paratopológicos, requerimos del siguiente hecho auxiliar ([11]):

Lema 4.13. *Supongamos que un espacio X admite un mapeo perfecto sobre un espacio de Hausdorff Y y un mapeo continuo e inyectivo sobre un espacio de Hausdorff Z. Entonces X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $Y \times Z$.*

Una relación que guarda el primer axioma de numerabilidad con la metrización de un grupo semitopológico es:

Teorema 4.14. *Un grupo semitopológico G es metrizable si y sólo si es p-espacio paracompacto con π-caracter numerable.*

Demostración. Debido a que cualquier espacio métrico es paracompacto y p-espacio, bastará mostrar la suficiencia. Como G es paracompacto y p-espacio, entonces admite un mapeo perfecto sobre un espacio métrico (problema 228, cap. 5 en [5]). También, por el teorema 4.12, tenemos que G admite un mapeo inyectivo sobre un espacio métrico. Por el lema 4.13, concluimos que G es homeomorfo a un subespacio cerrado del producto de dos espacios métricos. Por lo tanto G es metrizable. □

El teorema anterior resulta tener diversas aplicaciones en espacios Čech-completos y primero numerables. En particular, tenemos:

Corolario 4.15. *Un grupo paratopológico es metrizable si y sólo si, es primero numerable, paracompacto y p-espacio.*

Además, a partir del teorema anterior, podemos concluir algo más sobre la línea de Sorgenfrey. Este es un grupo paratopológico primero numerable, paracompacto, pero no es p-espacio, ya que no es metrizable. El cuadrado $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ es también un grupo paratopológico primero numerable que no es paracompacto, aunque es ***subparacompacto***, es decir, toda cubierta abierta de $\mathcal{L}_S \times \mathcal{L}_S$ puede ser refinada por una cubierta σ-discreta. Esta combinación de propiedades no es sólo una característica de la línea de Sorgenfrey, sino que es, en cierto sentido, una típica característica de los grupos paratopológicos primero numerables.

A continuación, veremos una propiedad muy importante de los subespacios pseudocompactos de un grupo paratopológico regular y primero numerable. Zenor establece en [41] lo siguiente:

Teorema 4.16. *Un espacio X tiene una diagonal regular G_δ si y sólo si existe una sucesión de vecindades $\{\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de cubiertas abiertas de X con la siguiente propiedad:*

Para cualesquiera puntos distintos $x, z \in X$, existen vecindades abiertas O_x y O_z de x y z, respectivamente, y $k \in \mathbb{N}$ tal que ningún elemento de $\mathcal{G}_k$ intersecta a O_x y O_z.

Arhangel'skii y Burke probaron en [3] que todo grupo paratopológico Abeliano Hausdorff G primero numerable tiene una diagonal regular G_δ. Posteriormente Chuan Liu muestra el siguiente hecho en [18].

Teorema 4.17. *Sea G un grupo paratopológico Hausdorff primero numerable, entonces G tiene una diagonal regular G_δ.*

Demostración. Tomamos una base numerable $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ en el neutro e de G, tal que $V_{n+1}^2 \subset V_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in G$; entonces xV_n, $V_n x$ son abiertos para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que G es un grupo paratopológico. Para $x \in G$, $n \in \mathbb{N}$, sea $W_n(x) = xV_n \cap V_n x$. Entonces $W_n(x)$ es una vecindad de x. Sea $\mathcal{G}_n = \{W_n(x) : x \in G\}$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{\mathcal{G}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de cubiertas abiertas en G.

Afirmación: para $y, z \in G$, $y \neq z$, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que ningún elemento de $\mathcal{G}_n$ intersecta simultáneamente a yV_k y zV_k.

Supongamos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe un elemento $W_n(x_n) \in \mathcal{G}_n$ tal que $yV_k \cap W_n(x_n) \neq \emptyset$ y $W_n(x_n) \cap zV_k \neq \emptyset$. Entonces existen a_n, b_n, c_n, d_n y f_n en V_n tal que $ya_n = x_n b_n$, $x_n c_n = d_n x_n = zf_n$, $ya_n = d_n^{-1} d_n x_n b_n =$

$d_n^{-1}zf_nb_n$. Como $a_n \to e$, tenemos que $ya_n \to y$, por lo cual $d_n^{-1}zf_nb_n \to y$. También $d_n \to e$, ya que $d_n \in V_n$, como G es un grupo paratopológico, entonces $d_nd_n^{-1}zf_nb_n \to ey = y$, por lo tanto $zf_nb_n \to y$. Note que f_n, $b_n \in V_n$, entonces $f_nb_n \to e$, por lo cual $zd_nb_n \to z$. Como G es Hausdorff, entonces $y = z$, esto es una contradicción.

Por el teorema 4.16, G tiene una diagonal regular G_δ. □

De acuerdo al corolario 4 en [3], tenemos que un subconjunto pseudocompacto de un espacio regular X es metrizable si X tiene una diagonal regular G_δ. Por lo tanto se concluye lo siguiente:

Corolario 4.18. *Si H es un subespacio pseudocompacto de un grupo paratopológico regular primero numerable G, entonces H es compacto y metrizable.*

El siguiente ejemplo nos muestra que el teorema 4.18 no se cumple para espacios topológicos en general. Recordemos que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos infinitos de ω es ***casi ajena*** si para cualesquiera dos elementos distintos $A, B \in \mathcal{A}$, tenemos que $A \cap B$ es finito. Una familia maximal casi ajena (familia MAD) es un elemento maximal en la familia de todas las familias casi ajenas con el orden establecido por la contención. Un espacio topológico es de ***Mrówka*** (ó Isbell-Mrówka) si tiene la forma $\Psi(\mathcal{A}) = \omega \cup \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena de subconjuntos infinitos de ω, y su topología es generada por la siguiente base: $\{n\}$ es abierto para cada $n \in \omega$ y una vecindad básica de $A \in \mathcal{A}$ es de la forma $\{A\} \cup B$, donde $B \subset A$ y $A \setminus B$ es finito. Para toda familia MAD $\mathcal{A}$, $\Psi(\mathcal{A})$ es localmente compacto, pseudocompacto y primero numerable y si $\mathcal{A}$ es una familia MAD infinita, entonces $\Psi(\mathcal{A})$ no es normal (por lo tanto, no es compacto ni métrico). Por lo cual, concluimos que no podemos extender el teorema 4.18 a espacios topológicos.

Capítulo 5

Cardinales invariantes

En este capítulo abordaremos diversos resultados muy interesantes acerca del comportamiento de algunos cardinales invariantes de espacios topológicos y grupos paratopológicos, tales como el peso, peso red, densidad, carácter, pseudocarácter, número de Lindelöf, extensión y celularidad.

5.1. Cardinales invariantes elementales

En esta sección mostraremos que algunos cardinales invariantes básicos funcionan mejor en grupos topológicos (o en ocaciones en grupos paratopológicos) que en espacios topológicos.

Para un espacio topológico X denotaremos por $w(X)$, $nw(X)$, $d(X)$, $\chi(X)$, $\psi(X)$, $l(X)$, $e(X)$ y $c(X)$ el peso, peso red, densidad, carácter, pseudocarácter, número de Lindelöf, extensión y celularidad respectivamente. El π-peso y el π-carácter de X son denotados por $\pi w(X)$ y $\pi\chi(X)$. El mínimo número de subespacios compactos de X necesarios para cubrir a X es denotado por $k(X)$ y es llamado el ***número de cubierta compacta.***

La siguiente proposición es una combinación de la proposición 2.3 en [25] y la proposición 2.11 en [26]:

Proposición 5.1. *Las siguientes igualdades son válidas para cualquier grupo paratopológico T_1 G :*

$$w(G) = nw(G) \cdot \chi(G) = l(G \times G) \cdot \chi(G).$$

Demostración. La igualdad $w(G) = nw(G) \cdot \chi(G)$ es muy importante y además es sencilla de deducir ya que, si suponemos que tenemos una base local $\mathcal{N}(e)$ del elemento neutro e de un grupo paratopológico G y $\mathcal{C}$ es una red de G, entonces, por la continuidad de la multiplicación en G, la familia $\{UC : U \in \mathcal{N}(e),\ C \in \mathcal{C}\}$ es una base para G.

Ahora, sea $\mathcal{B}$ una base del neutro e en G. Sea $m : G \times G \to G$ la operación de multiplicación del grupo G. Entonces, $D = m^{-1}(e)$ es un subconjunto cerrado de el espacio $G \times G$ y por lo tanto $l(D) \leq l(G \times G)$. Sea τ^q una topología de grupo sobre G con la base $\mathcal{B}^q = \{U \cap U^{-1} : U \in \mathcal{B}\}$. Sea $\pi : G \times G \to G$ con $\pi(x, y) = x$ la proyección sobre la primera coordenada. Entonces, $\pi|D :\to (G, \tau^q)$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, $nw(G, \tau) \leq w(G, \tau^q) \leq \chi(G, \tau) \cdot l(D) \leq \chi(G) \cdot l(G \times G)$. Por la primera igualdad de esta proposición, concluimos que $w(G) \leq nw(G)\chi(G) \leq \chi(G) \cdot l(G \times G) \leq w(G)$. □

Un ejemplo que muestra que la proposición 5.1 no puede ser válida en espaciós topológicos, puede encontrarse en [4]. Sea $X = T \cup S$, donde $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ y $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Los puntos en T tienen vecindades abiertas usuales en el plano, y un abierto básico en un punto $(x, 0) \in S$ es el conjunto $A^{\varepsilon}_{(x,0)} = \{(y, 0) : |x - y| < \varepsilon\} \cup B_{\varepsilon}(x, \varepsilon)$, donde $B_{\varepsilon}(x, \varepsilon)$ es la bola con centro en (x, ε) de radio ε, para algún $\varepsilon > 0$. El conjunto T es primero numerable por la topología heredada de $\mathbb{R}^2$ y para algún punto $(x, 0) \in S$, el conjunto $\{A^{1/n}_{(x,0)} : n \in \omega\}$ es una base local numerable para $(x, 0)$, entonces S es primero numerable y así X es primero numerable también. Los conjuntos S y T, como subespacios del plano, tienen bases numerables entonces X tiene una red numerable, pero X no es segundo numerable, por lo tanto $w(X) > nw(X) \cdot \chi(X) = \omega$. Por lo cual, la proposición 5.1 no es válida para espacios topológicos en general.

Un subconjunto A de un grupo paratopológico G es llamado ***τ-estrecho*** en G si para toda vecindad del neutro e en G, existe un subconjunto F de G tal que $A \subset FU \cap UF$ y $|F| < \tau$. Claramente, G es τ-estrecho si y sólo si, es τ-estrecho en sí mismo. El ***índice de estreches*** de un grupo topológico G está definido como el mínimo cardinal $\tau \geq \omega$ tal que G es τ-estrecho, y será denotado como $ib(G)$.

Proposición 5.2. *La igualdad $w(G) = ib(G) \cdot \chi(G)$ se satisface para todo grupo topológico G.*

Demostración. Debido a que las igualdades $ib(G) \leq l(G) \leq w(G)$ (proposición 5.2.3 en [7]) y $\chi(G) \leq w(G)$ son ciertas para todo grupo topológico G, entonces bastará verificar la desigualdad $w(G) \leq ib(G) \cdot \chi(G)$.

Sea $\tau = ib(G) \cdot \chi(G)$. Denotamos por $\mathcal{H}$ una base del neutro e en G tal que $|\mathcal{H}| \leq \tau$. Como G es τ-estrecho, podemos encontrar para todo $U \in \mathcal{H}$, un conjunto $S_U \subset G$ con $|S_U| \leq \tau$ tal que $S_U U = G$. Para todo $U \in \mathcal{H}$, ponemos $\mathcal{B}_U = \{xU : x \in S_U\}$. La familia $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_U : U \in \mathcal{H}\}$ satisface $\mathcal{B} \leq \tau$, y probaremos que $\mathcal{B}$ es una base para G.

Ahora, sea O una vecindad del punto a en G. Entonces, podemos encontrar $U, V \in \mathcal{H}$ tal que $aU \subset O$ y $V^{-1}V \subset U$. Existen $x \in S_V$ tal que $a \in xV$ tal que $x \in aV^{-1}$. Tenemos que

$$xV \subset (aV^{-1})V = a(V^{-1}V) \subset aU \subset O,$$

esto es, xV es una vecindad abierta de a y $xV \subset O$, y además $xV \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, la familia $\mathcal{B}$ es una base para G y la igualdad queda probada.

la igualdad queda probada. □

La proposición 5.2 nos ayuda a encontrar algunas desigualdades en grupos topológicos que acotan superiormente el peso de estos (teorema 5.2.5 en [7]):

Teorema 5.3. *Todo grupo topológico satisface:*

a) $w(G) \leq d(G) \cdot \chi(G)$;

b) $w(G) \leq k(G) \cdot \chi(G)$;

c) $w(G) \leq l(G) \cdot \chi(G)$.

Demostración. Debido a que $ib(G) \leq c(G) \leq d(G)$ y $ib(G) \leq l(G) \leq k(G)$ para todo grupo topológico, por la proposición 5.2 obtenemos a), b) y c). □

Notemos que en el teorema 5.3 los incisos a) y c) son igualdades. También, dicho teorema no se puede extender para espacios Hausdorff compactos. Un ejemplo de esto es el ***espacio de dos flechas***, este es el conjunto $Z = [0,1] \times \{0,1\}$, dotado con la topología de orden lexicográfico, donde el orden lexicográfico está definido como: $\langle x, t\rangle < \langle y, s\rangle$ si $x < y$ o $x = y$ y $t < s$. Entonces Z con la topología dada por éste orden es un espacio compacto, primero numerable, separable pero $w(Z) = \mathfrak{c}$.

En los grupos paratopológicos, los incisos a) y c) no son ciertos, $\mathcal{L}_S$ es un claro ejemplo de esto. Veamos que el inciso b) es cierto para grupos paratopológicos con ciertas propiedades.

Proposición 5.4. *Sea G un grupo paratopológico Hausdorff con $\chi(G) \leq \alpha$. Si $G = \bigcup_{\beta\in\alpha} K_\beta$, con K_β compacto y $w(K_\beta) \leq \alpha$ para toda $\beta \in \alpha$. Entonces $w(G) \leq k(G) \cdot \chi(G)$.*

Demostración. Como K_β es compacto y Hausdorff, entonces $w(K_\beta) = nw(K_\beta)$ para toda $\beta \in \alpha$, por lo tanto $nw(G) \leq \alpha$. Por el teorema 5.1, tenemos que $w(G) = nw(G) \cdot \chi(G) \leq \alpha$. Por lo tanto, la prueba está completa. □

El siguiente resultado muestra que en grupos topológicos, no existe diferencia entre algunas funciones cardinales (proposición 5.2.6 en [7]).

Proposición 5.5. *Sea G un grupo topológico, entonces*
a) $\chi(G) = \pi\chi(G)$;
b) $w(G) = \pi w(G)$.

Demostración. a) Es suficiente mostrar que $\chi(G) \leq \pi\chi(G)$. Sea γ una π-base del neutro e en G tal que $|\gamma| = \pi\chi(G)$. Entonces la familia $\mu = \{UU^{-1} : U \in \gamma\}$ es una base local de e. En efecto, si O es una vecindad de e en G, existe una vecindad de e tal que $VV^{-1} \subset O$. Como γ es una π-base de e, exite $U \in \gamma$ con $U \subset V$. Entonces $W = UU^{-1} \in \mu$ y $e \in W \subset O$. Esto prueba que μ es una base de la identidad de G. Como $|\mu| \leq |\gamma| = \pi\chi(G)$, por lo cual $\chi(G) \leq \pi\chi(G)$.

b)Notemos que $d(G) \leq \pi w(G)$ y $\pi\chi(G) \leq \pi w(G)$. Por lo tanto, por el inciso a) y el teorema 5.3, tenemos

$$w(G) \leq d(G) \cdot \chi(G) \leq d(G) \cdot \pi\chi(G) \leq \pi w(G).$$

Ya que toda base es una π-base, concluimos que $\pi w(G) = w(G)$. □

Las dos igualdades del teorema 5.5 no son válidas para espacios compactos de Hausdorff, ya que si tomamos la compactación por un punto αD de un espacio discreto no numerable D, tenemos que $\aleph_0 = \pi\chi(\alpha D) < \chi(\alpha D) = |D|$. Además, el espacio de las dos flechas Z es compacto y satisface $\aleph_0 = \pi w(Z) < w(Z) = \mathfrak{c}$.

También, ambas igualdades del teorema 5.5 no pueden extenderse a grupos paratopológicos. Esto es porque la línea de Sorgengrey $\mathcal{L}_S$ satisface $\omega = \pi\omega(\mathcal{L}_S) < \omega(\mathcal{L}_S) = 2^\omega$. Además, Arhangel'skii y Burke construyen el siguiente ejemplo (teorema 37 en [3]):

Teorema 5.6. *Existe un grupo paratopológico numerable Tychonoff con π-base numerable que no es primero numerable.*

Presentamos un breve resumen de la demostración del teorema 5.6. Sea τ la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Definimos $\mathcal{B}_1$ como la familia de todos los $V \subset \mathbb{R}^2$, tales que existe $(a, b) \in V$, con las propiedades:

a) $V \setminus (a, b) \in \tau$ y
b) existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{(x, b) : a < x < a + \varepsilon\} \subset V$.

Es claro que si V_1 y $V_2 \in \mathcal{B}_1$ y $s \in V_1 \cap V_2$, entonces existe un $V \in \mathcal{B}_1$ tal que $s \in V \subset V_1 \cap V_2$. Por lo que $\mathcal{B}_1$ es la base de alguna topología τ_1 en $\mathbb{R}^2$ que contiene a la topología usual τ. No es difícil verificar que $(\mathbb{R}^2, \tau_1)$ es un grupo paratopológico. Como una π-base de τ es una π-base de τ_1, entonces $(\mathbb{R}^2, \tau_1)$ tiene una π-base numerable y es separable. Además, $(\mathbb{R}^2, \tau_1)$ no es Fréchet-Urysohn, ya que cada sucesión convergente en $(\mathbb{R}^2, \tau_1)$ a partir de cierto n, se vuelve horizontal. Por lo tanto, $(\mathbb{R}^2, \tau_1)$ no es primero numerable.

Ahora, si tomamos a G como el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ con ambas entradas racionales y dotado con la topología inducida por τ_1, obtenemos un subespacio de $(\mathbb{R}^2, \tau_1)$. Como G es denso en $(\mathbb{R}^2, \tau_1)$, entonces también G tiene una π-base numerable y G no es primero numerable por la misma razón de que $(\mathbb{R}^2, \tau_1)$ no lo es.

El ***i-peso*** de un espacio de Tychonoff X es denotado por $iw(X)$ y se define como el mínimo cardinal τ, tal que existe una biyección continua de X sobre un espacio de Tychonoff de cardinalidad τ. Tenemos que $iw(X) \leq w(X)$ y $iw(X) \leq nw(X)$, para todo espacio de Tychonoff X (lema 5.2.10 en [7]) .

Un viejo problema planteado por Arhangel'skii es encontrar una cota superior para cardinalidades de espacios regulares Lindelöf con pseudocarácter numerable. En grupos topológicos, el problema de Arhangel'skii tiene una solución relativamente simple (teorema 5.2.15 en [7]):

Teorema 5.7. *Todo grupo topológico G satisface $|G| \leq 2^{l(G) \cdot \psi(G)}$.*

Demostración. Todo espacio de Tychonoff satisface $|X| \leq 2^{w(X)}$ (teorema 1.5.1 en [11]). Como las biyecciones no cambian el tamaño de los espacios, tenemos la desigualdad $|X| \leq 2^{iw(X)}$. La proposición 5.2.11 en [7] nos dice que para cualquier grupo topológico G, existe un isomorfismo continuo sobre un grupo topológico H que satisface $w(H) \leq ib(G) \cdot \psi(G)$. Así, $iw(G) \leq ib(G) \cdot \psi(G)$ y tenemos que $|G| \leq 2^{ib(G) \cdot \psi(G)}$. Por la proposición 5.2.1 en [7] ($ib(G) \leq l(G)$ para todo grupo topológico G) concluimos que $|G| \leq 2^{l(G) \cdot \psi(G)}$. $\square$

Del teorema 5.7 se deduce que los grupos topológicos Lindelöf con pseudocarácter numerable tienen cardinalidad menor o igual que 2^ω. Sanchis y Tkachenko extienden el teorema 5.7 a grupos paratopológicos ([33]):

Teorema 5.8. *Todo grupo paratopológico Hausdorff G con $l(G) \cdot \psi(G) \leq \omega$ tiene cardinalidad menor o igual que 2^ω.*

Demostración. Sea $\mathcal{N}(e)$ la familia de vecindades abiertas del neutro e en G.

Afirmación 1: Para todo $U \in \mathcal{N}(e)$, existe una familia numerable $\lambda_U \subset \mathcal{N}(e)$ tal que $\bigcap_{V\in\lambda_U} V^{-1}V \subset U$.

En efecto, tomamos $U \in \mathcal{N}(e)$ y sea $F = G \setminus U$. Como G es Hausdorff, para cada $x \in F$ existen vecindades abiertas O_x y W_x en G tal que $e \in O_x$ y $x \in W_x$. Tomamos $V_x \in \mathcal{N}(e)$ tal que $V_x \subset O_x$ y $V_x^2 \subset W_x$. Entonces $V_x \cap V_x^2 = \emptyset$, por lo cual $V_x^{-1}V_x \cap V_x x = \emptyset$. Como la familia $\{V_x x : x \in F\}$ de conjuntos abiertos en G cubre al subconjunto cerrado F de G, y G es un grupo paratopológico de Lindelöff, podemos tomar un conjunto numerable $C \subset F$ tal que $F \subset \bigcup_{x\in C} V_x x$. Sea $\lambda_U = \{V_x : x \in C\}$. Por la elección de C y la igualdad $V_x^{-1}V_x \cap V_x x = \emptyset$ para $x \in C$, se concluye que $\bigcap_{V\in\lambda_U} V^{-1}V \subset U$.

Sea γ una familia de vecindades abiertas de e tal que $\{e\} = \bigcap \gamma$. Por la afirmación 1, para todo $U \in \gamma$ existe una familia numerable $\lambda_U \subset \mathcal{N}(e)$ tal que $\bigcap_{V\in\lambda_U} V^{-1}V \subset U$. Sea $\lambda = \bigcup_{U\in\gamma} \lambda_U$. Entonces la familia λ es numerable y $e \in \bigcap_{V\in\lambda} V^{-1}V \subset \bigcap \gamma = \{e\}$. Por lo tanto, $\bigcap_{V\in\lambda} V^{-1}V = \{e\}$.

Como G es de Lindelöff, para todo $V \in \lambda$ existe un conjunto numerable $C_V \subset G$ tal que $G = C_V \cdot V$.

Afirmación 2: La familia $\mathcal{P} = \{aV : V \in \lambda, a \in C_V\}$ es una ***pseudobase*** para G, es decir, para dos elementos distintos $x, y \in G$, existe un elemento $P \in \mathcal{P}$ tal que $x \in P$ y $y \notin P$.

En efecto, tomamos dos elementos distintos $x, y \in G$. Como $x^{-1}y \neq e$, existe $V \in \lambda$ tal que $x^{-1}y \notin V^{-1}V$. Se sigue de $G = C_V \cdot V$ que $x \in aV$, para algún $a \in C_V$. Supongamos que $y \in aV$. Entonces, podemos encontrar $v_1, v_2 \in V$ tal que $x = av_1$ y $y = av_2$, por lo cual $x^{-1}y = v_1^{-1}v_2 \in V^{-1}V$. Esta contradicción muestra que el elemento $P = aV \in \mathcal{P}$ satisface $x \in P$ y $y \notin P$.

Como la familia λ y los conjuntos C_V con $V \in \lambda$ son numerables, observamos que la pseudobase $\mathcal{P}$ también lo es. Tomando a $\mathcal{P}$ como una subbase de una topología τ en G, obtenemos el espacio (G, τ) que es T_1 y tiene base numerable. Como todo espacio T_1 de base numerable tiene peso a lo más 2^ω (teorema 2.2 en [15]), concluimos que $|G| \leq 2^\omega$. □

En el siguiente teorema observamos que en un grupo topológico G, el número de cubierta compacta $k(G)$, puede ser utilizado para limitar el peso red de éste.

Teorema 5.9. *Sea G un grupo topológico, entonces $nw(G) \leq k(G) \cdot \psi(G)$.*

Demostración. Sea $\tau = k(G) \cdot \psi(G)$. Como $ib(G) \leq l(G) \leq k(G)$, por la proposición 5.2.11 en [7], existe un isomorfismo continuo $\varphi : G \to H$ sobre un grupo topológico H tal que $w(H) \leq \tau$. Sea $\mathcal{K}$ una familia de conjuntos compactos en G tal que $\bigcup \mathcal{K} = G$ y $|\mathcal{K}| = k(G) \leq \tau$. La restricción de φ a todo $K \in \mathcal{K}$ es un homeomorfismo, de modo que $w(K) \leq \tau$ para todo $K \in \mathcal{K}$. Como $G = \bigcup \mathcal{K}$, concluimos que $nw(G) \leq \tau \cdot \tau = \tau$. $\square$

Notemos que el espacio de las dos flechas Z, cumple $nw(Z) = w(Z) = \mathfrak{c}$. Ya que Z es compacto y primero numerable tenemos que $\aleph_0 = k(Z) \cdot \psi(Z) < nw(Z) = \mathfrak{c}$. Por lo cual concluimos que el teorema 5.9 no es válido para espacios Hausdorff compactos.

5.2. El número de Nagami

En esta pequeña parte mostraremos una propiedad muy importante: todos los grupos topológicos σ-compactos tienen celularidad numerable. Posteriormente, extenderemos este resultado a grupos paratopológicos T_1.

Supongamos que X es un subconjunto de Y y que γ es una familia de subconjuntos de Y. Diremos que γ ***separa*** X ***de*** $Y \setminus X$ si para todo $x \in X$ y todo $y \in Y \setminus X$, existe un $F \in \gamma$ tal que $x \in F$ y $y \notin F$.

Sea βX la compactación de Stone-Čech de un espacio de Tychonoff X y sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos cerrados de βX. El ***número de Nagami*** se define como:

$$Nag(X) = \text{mín}\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \subset \mathcal{F},\ \mathcal{P} \textit{ separa } X \textit{ de } \beta X \setminus X\}.$$

Todo espacio de Tychonoff X cumple $Nag(X) \leq k(X)$, entonces todo espacio Tychonoff σ-compacto satisface $Nag(X) \leq \aleph_0$.

Finalmente, un espacio X se dice que es ***τ-celular*** (o equivalentemente, $cel_\tau(X) \leq \tau$) si toda familia γ de conjuntos G_τ en X contiene una subfamilia η tal que $|\eta| \leq \tau$ y $\overline{\bigcup \eta} = \overline{\bigcup \gamma}$.

Debido a que todo grupo topológico σ-compacto G tiene $Nag(G) \leq \omega$ y todo grupo topológico G con $Nag(G) \leq \tau$ es τ-celular (teorema 5.3.18 en [7]), se puede concluir el siguiente resultado.

Corolario 5.10. ***[M.G. Tkachenko]*** *Todo grupo topológico σ-compacto tiene celularidad numerable.*

Esté corolario aparecio por primera vez en 1983 y fue mostrado por Tkachenko en [34].

El corolario 5.10 no es cierto para espacios topológicos compactos. Esto es, si tomamos la compactación por un punto αD, de un espacio discreto no numerable D, tenemos que αD es un espacio compacto que contiene una cantidad no numerable de conjuntos abiertos ajenos dos a dos.

Por otra parte, el teorema 5.10 puede extenderse a grupos paratopológicos T_1.

Teorema 5.11. *Si G es un grupo paratopológico T_1 y σ-compacto, la celularidad de G es numerable.*

Demostración. Como G es T_1, por el teorema 1.12 se tiene que el grupo topológico G^* asociado a G es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado del producto $(G, \tau) \times (G, \tau^{-1})$, donde τ es la topología de G. Como (G, τ) y (G, τ^{-1}) son σ-compactos, entonces también lo es el producto $(G, \tau) \times (G, \tau^{-1})$, y como G^* es isomorfo a un subgrupo cerrado, entonces G^* es σ-compacto y por corolario 5.10, G^* tiene celularidad numerable. Debido a que G es imagen isomorfa y continua de G^* y los mapeos continuos no incrementan la celularidad, podemos concluir que G tiene celularidad numerable. $\square$

El teorema 5.11 fue presentado por Reznichenko en 2008. Pero, recientemente Tkachenko presentó en [37] el mismo resultado sin la necesidad de axiomas de separación.

Por el teorema 5.3.15 en [7] sabemos que para cualquier espacio topológico de Tychonoff X se cumple la igualdad $nw(X) = Nag(X) \cdot iw(X)$. El siguiente resultado nos muestra que el i-peso puede ser remplazado por el pseudocarácter en el caso de los grupos topológicos.

Teorema 5.12. *Todo grupo topológico G satisface $nw(G) = Nag(G) \cdot \psi(G)$.*

Demostración. Claramente, $\psi(G) \leq nw(G)$. Ya que todo espacio de Tychonoff X satisface $Nag(X) \leq nw(X)$, entonces $Nag(G) \cdot \psi(G) \leq nw(G)$. Ahora, si $\tau = Nag(G) \cdot \psi(G)$, entonces la identidad e de G es un conjunto G_τ en G, y el lema 5.3.24 en [7] implica que existe un homomorfismo continuo abierto $\pi : G \to K$ sobre un grupo topológico K con $nw(K) \leq \tau$ tal que $\{e\} = \pi^{-1}\pi(e)$. Por lo tanto, π es un isomorfismo topológico de G sobre K y $nw(G) \leq \tau$. $\square$

El teorema anterior no es válido para espacios topológicos en general. Consideremos Z el espacio de las dos flechas. Por ser compacto, $Nag(Z) \leq \omega$ y $\psi(Z) = \chi(Z) = \omega$, pero $nw(Z) = w(Z) = \mathfrak{c}$.

Conclusión

La presente tesis está desarrollada en las áreas de topología general y álgebra topológica. Está basada principalmente en el estudio comparativo de las propiedades de tipo compacidad en los espacios topológicos, grupos topológicos y grupos paratopológicos.

Fueron de nuestro especial interés los grupos paratopológicos, debido a que en esta clase de grupos, pueden o no preservarse las propiedades de grupos topológicos estudiadas a lo largo de este trabajo. También, hemos mostrado la gran influencia de los axiomas de separación en los grupos paratopológicos con alguna propiedad de tipo compacidad.

Se realizó un estudio acerca de las caracterizaciones de metrización en grupos topológicos y espacios topológicos. Además, a partir de algunos hechos presentados por Arhangel'skii y Reznichenko ([2]), fue posible presentar una caracterización de metrización para grupos paratopológicos.

Fueron presentados algunos hechos importantes acerca del comportamiento de algunos cardinales invariantes en espacios topológicos y grupos topológicos y paratopológicos. En especial, fue de mayor interés estudiar el teorema de Tkachenko: todo grupo topológico σ-compacto tiene celularidad numerable ([35]).

Por último, hemos de recalcar la importancia de las propiedades de tipo compacidad en los grupos paratopológicos, ya que es aquí donde es más extenso el estudio de éstas y otras propiedades topológicas.

Bibliografía

[1] O. T. Alas, M. Sanchis, Countably compact paratopological groups, Semigroup Forum 74 no. **3** (2007), 423–438.

[2] A. V. Arhangel'skii, (1981). Every topological group is a quotient group of a zero-dimensinal topological group, Soviet Math. Dokl. **23**, **3**, pp. 615–618. Russian original in: Dokl. AN SSSR 258, pp. 1037–1040.

[3] A. V. Arhangel'skii, D. K. Burke, (2006). *Spaces with a regular G_δ-diagonal*, Topol. Appl. **153**, **11**, pp. 1917–1929.

[4] A. V. Arhangel'skii, W. Holsztynski, Sur les réseaux dans les espaces topologiques. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. (1963) pp.493–497.

[5] A. V. Arhangel'skii, V. I. Ponomarev, (1984). *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises* (Reidel, translated from Russian).

[6] A. V. Arhangel'skii, E. A. Reznichenko, (2005) Paratopological and semitopological groups versus topological groups, Topol. Appl. **151**, pp. 107–119.

[7] A. V. Arhangel'skii, M.G. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Studies in Mathematics, Vol.**I**, Atlantis Press and World Scientific, Paris-Amsterdan 2008.

[8] Birkhoff, G. (1936). A note on topological groups, *Comput. Math.* **3**, pp. 427–430.

[9] B. M. Bokalo, I. I. Guran (1996). Sequentially compact Hausdorff cancellative semigroup is a topological group, Mat. Studii **6** , pp. 39–40.

[10] R. Ellis (1957). A note on the continuity of the inverse, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, pp. 372–373.

[11] R. Engelking, *General Topology* (PWN, Warszawa), 1976.

[12] C. Hernández, M. G. Tkachenko (2006) Three examples of pseudocompact quasitopological groups, Topol. Appl. **153**, **18**, pp. 3615–3620.

[13] Hewitt, E. and Ross, K. A. (1963). Abstract Harmonic Analysis, Vol. **I** (Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg– New York).

[14] T. Jech, *Set Theory: The Third Millennium Edition, Revised and Expanded*, Springer Monographs in Mathematics, (2003).

[15] I. Juhász,, *Cardinal functions in topology–ten years later*, second ed., Mathematical Centre Tracts, vol. **123**, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.

[16] Kakutani, S. (1936). Über die Metrization der Topologischen Gruppen, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **12**, pp. 82–84.

[17] Korovin A. V. (1992) *Continuous actions of pseudocompact groups and axioms of topological groups*, Comment. Math. Univ. Carolin. **33**, 335–343.

[18] C. Liu *A note on paratopological groups*, Comment. Math. Univ. Carolin. 47 no. **4** (2006), 633–640.

[19] Markov, A. A. (1945). On free topological groups, In: *Topology and Topological Algebra*, Translation Series 1, **8** (1962), pp. 195–272. American Math. Society. Russian original in: *Izv. Akad. Nauk SSSR* **9** (1945), pp. 3–64.

[20] Novák On the Cartesian product of two compact spaces, Fund. Math. **40** (1953), pp. 106–112.

[21] R. Pichardo-Mendoza, Á. Tamariz-Mascarúa, H. Villegas-Rodriguez *Pseudouniform topologies on $C(X)$ given by ideals*, Comment.Math.Univ.Carolin. **54** (2013) 557–577.

[22] Protasov, I. V. (1994). *Discrete subsets of topological groups*, Math. Notes **55**, 1–2, pp. 101–102. Russian original in: Mat. Zametki **55**, pp. 150–151.

[23] T. G. Raghavan, J. L. Reilly. *On the continuity of group operations*, Indian J. Appl. Math. 9 no. **8** (1978), 747–752.

[24] O. V. Ravsky, *On H-closed paratopological groups*, Visnyk Lviv. Univ. Ser. Mat.-Mekh. **59** (2001), 96–101.

[25] O. V. Ravsky, (2001). Paratopological groups I, Mat. Studii 16, **1**, pp. 37–48.

[26] O. V. Ravsky, (2002). Paratopological groups II, Mat. Studii 17, **1**, pp. 93–101.

[27] O. V. Ravsky, *The topological and algebraic properties of paratopological groups*, Ph.D. thesis. Lviv University, 2003 (in Ukrainian).

[28] O. V. Ravsky, (2-)Pseudocompact paratopological groups that are topological, arXiv:1003.5343v2, March 28, 2012.

[29] Reznichenko, E. A. (1989). *A pseudocompact space in which all subsets of not full cardinality are closed and discrete*, Moscow Univ. Math. Bull. **44, 6**, pp. 70–71. Russian original in: Vestnik Moscov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. no. **6**, pp. 69–70.

[30] Reznichenko, E. A. (1994). *Extensions of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups*, Topol. Appl. **59**, 233–244.

[31] S. Romaguera, M. Sanchis, *Continuity of the inverse in pseudocompact paratopological groups*, Algebra Colloq. 14 no. **1** (2007), pp. 167–175.

[32] I. Sánchez, *Subgroups of products of paratopological groups*, submitted.

[33] M. Sanchis, M. G. Tkachenko , *Recent progress in paratopological groups*, Quaderni Math. (2012), in press.

[34] M. G. Tkachenko (1983). *On the Souslin property in free topological groups over compact Hausdorff spaces*, Math. Notes **34**, 3–4, pp. 790–793. Russian original in: Mat. Zametki **34**, pp. 601–607.

[35] M. G. Tkachenko (1988). *Compactness type properties in topological groups*, Czech. Math. J. **38**, pp. 324–341.

[36] M. G. Tkachenko (2009). *Paratopological Groups: Some Questions and Problems*, Questions Answers Gen. Topology 27 no. **1**, 1–21.

[37] M. G. Tkachenko (2012). *Axioms of separation in semitopological and paratopological groups and related functors*, preprint.

[38] L.-H. Xie, S. Lin (2012). *A note on the continuity of the inverse in paratopological groups*, preprint.

[39] E. K. Vandouwen The product of two countably compact topologica groups, Trans. Amer. Math. Soc. **262** (1980), pp. 417–427.

[40] Weil, A. (1937) *Sur les Espaces a Structure Uniforme et sur la Topologie Generale*, Publ. Math. Univ. Strasbourg (Hermann, Paris).

[41] Zenor P. (1972) On spaces with regular G_δ-diagonals, Pacific J. Math. **40**. 759–763.

Índice alfabético