



# **UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA**

**Programa Integrado de Maestría y Doctorado en Ciencias  
Económicas**

**“Convergencia y Productividad Total de los Factores: Concepto y  
Medición”**

**T E S I S**

**QUE PRESENTA PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN  
CIENCIAS ECONOMICAS**

**Lic. F. ALBERTO SÁNCHEZ RODRÍGUEZ**

**DIRECTOR DE LA TESIS**

**Dr. ENRIQUE HERNÁNDEZ LAOS**

---

**México, Distrito Federal, 5 de diciembre del 2013**



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

Nº: 00027

Matrícula: 2121901017

CONVERGENCIA Y PRODUCTIVIDAD  
TOTAL DE LOS FACTORES;  
CONCEPTO Y MEDICIÓN.

En México, D.F., se presentaron a las 11:00 horas del día 5 del mes de diciembre del año 2013 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. IGNACIO LLAMAS HUITRON  
DR. JOSE LUIS ESTRADA LOPEZ  
DR. ENRIQUE HERNANDEZ LAOS



FELIPE ALBERTO SANCHEZ RODRIGUEZ

ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS ECONOMICAS

DE: FELIPE ALBERTO SANCHEZ RODRIGUEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

## APROBAR

REVISÓ



LIC. JULIO CESAR DE LARA SASSI  
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

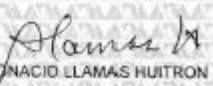
Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISION DE CSH




DR. JOSE OCTAVIO NATERAS DOMINGUEZ

PRESIDENTE



DR. IGNACIO LLAMAS HUITRON

VOCAL



DR. JOSE LUIS ESTRADA LOPEZ

SECRETARIO



DR. ENRIQUE HERNANDEZ LAOS

A mis padres, esposa, y hermanas  
por su amor y apoyo incondicional

Al Dr. Enrique Hernández Laos en  
agradecimiento por su ayuda y confianza  
en la elaboración de este trabajo

# “Convergencia y Productividad Total de los Factores: Concepto y Medición”

## Contenido.

Introducción.....	2
1. La convergencia en el estado actual.....	5
2. Metodologías econométricas para estimar la ecuación de convergencia.....	25
3. Definición y medición de la Productividad Total de los Factores (PTF).....	30
3.1. Enfoque de cuentas de crecimiento.....	32
3.2. Enfoque de números índice.....	35
3.2.1. El índice multilateral de productividad translog propuesto por Caves, Christensen, y Diewert (1982) (CCD).....	37
3.2.2. Número índice EHL.....	41
3.3. Enfoque función distancia.....	47
3.3.1. Modelo input – orientated (CCR).....	48
3.3.2. Modelo output – orientated (CCR).....	52
3.4. Enfoque econométrico.....	55
4. Conclusiones.....	56
Apéndice.....	59
Bibliografía.....	76

## Introducción

La presente investigación se refiere al tema relacionado con la convergencia y la Productividad Total de los factores (PTF). La hipótesis de convergencia consiste en el acercamiento de las economías menos desarrolladas a las economías más avanzadas, esto quiere decir que en el largo plazo, las desigualdades que existen entre ambas disminuirán, llegando a tener el mismo bienestar económico. El estudio de la PTF, la cual es definida como el total de producto dividido por el total de insumos. Esta medida es fundamental para la convergencia, ya que si la brecha de la PTF es amplia o reducida, esto tendrá un efecto positivo o negativo sobre la convergencia (en ingresos per cápita) de los países.

Uno de los primeros autores en mencionar en que consiste la convergencia fue Solow (1957) a partir de su modelo de crecimiento exógeno, una de las conclusiones que sobre salen es el explicar que en el largo plazo las economías tienden a converger al mismo estado estacionario. A partir de entonces se han desarrollado varios artículos, los cuales buscan probar la existencia de dicha hipótesis, uno de los primeros en probar la existencia de convergencia es Baumol (1986), quien utiliza el método de OLS para estimar la ecuación de regresión, en sus resultados encuentra evidencia a favor de la convergencia, las metodologías para estimar la ecuación de convergencia han ido corrigiendo errores que se han presentado, por ejemplo: el problema de la endogeneidad y el problema de la correlación de los errores. Para tal propósito se ha empleado la metodología de panel, la cual ha generado varios estimadores por ejemplo: LSDV, LSDV – Kiviet, MD, AH, GMM, System GMM, etc., con estas nuevas metodologías econométricas se han aplicado para obtener los coeficientes estimados de la ecuación de convergencia, el uso de la metodología de panel ha ocasionado un cambio en la velocidad a la cual las economías tienden a converger en el tiempo, ya que al utilizar el método de OLS, las tasas de convergencia daban la famosa ley de hierro del 2%, pero ahora cuando se utiliza la metodología de panel, la tasa de convergencia ha aumentado, esta oscila entre 5% y hasta 10%, además de obtener robustez en los coeficientes estimados, quien implemento el uso de la metodología de panel en el estudio de la convergencia fue Islam (1995), otros autores como Caselli, Esquivel, y Lefort (1996); Di Liberto, Pigliaru, y Chelucci (2011), etc.,

han hecho uso de la metodología de panel en sus investigaciones para probar la hipótesis de convergencia.

Con el uso del enfoque de panel se ha podido obtener tanto la convergencia en PTF y una nueva manera de obtener su medición. Trabajos como el de Islam (2003); Di Liberto, Pigliaru, y Chelucci (2011); Ball, San Juan, y Ulloa (2012); etc., hacen uso de la metodología de panel para probar la existencia de convergencia en PTF. En algunos casos se encuentra evidencia de la presencia de convergencia en PTF, pero en otros casos se rechaza, por lo que no se ha llegado a un consenso sobre esta hipótesis. Tampoco se ha mencionado nada acerca de la existencia de una velocidad a la cual deban de converger las economías cuando se habla en términos de PTF y no de ingresos per cápita.

Existen otras maneras para obtener la medición de la PTF y observar el fenómeno de convergencia. Los enfoques que existen para tal motivo son: Cuentas de crecimiento, números índice, función distancia y enfoque econométrico. Los más utilizados en investigaciones recientes ha sido el uso del enfoque de función distancia y el enfoque econométrico. Pero en el presente trabajo hacemos notar que el enfoque econométrico no es la mejor manera para obtener la medición de la PTF, ya que fuerza a que la función de producción tome una forma única, en este caso toma la forma de la función Cobb-Douglas. Por tal motivo se recomienda el uso del enfoque de números índices y el de función distancia, para posteriormente comparar los resultados obtenidos por ambos métodos, ya que el de números índice sigue supuestos neoclásicos, mientras que el enfoque de función distancia no está sometido a tales supuestos, es por eso que en futuras investigaciones se plantea el uso de ambos enfoques y comparar resultados.

En el presente trabajo se pretende analizar los hallazgos que se han realizado en el tema relacionado con la convergencia del 2002 hasta nuestros días, así observaremos si hay cambios importantes en el tema, gracias a las nuevas implementaciones econométricas que han surgido y utilizado en este análisis de la convergencia, y poder designar cuál de estos métodos es el más adecuado de aplicar para obtener los estimadores de la ecuación de convergencia más robustos. Se pretende al igual analizar las diferentes metodologías

existentes para la medición de la PTF, y poder llegar a una conclusión de cuál de las metodologías empleadas son las más adecuadas para el cálculo de la PTF.

El trabajo está dividido de la manera siguiente: En el punto número uno analizaremos los trabajos actuales que abordan el tema de convergencia, así como la convergencia en PTF, y observar que hallazgos han surgido sobre el tema. Después en el punto número dos, mencionaremos brevemente las metodologías empleadas para estimar la ecuación de convergencia, así como señalar algunas investigaciones que han dado luz para indicar cuál es la metodología más adecuada para obtener dicha ecuación. En el punto número tres, mencionamos en que consiste la PTF, así como los diferentes conceptos que se le han dado a esta medición, además indicaremos los diferentes enfoques que se han empleado para obtener la medición de la PTF. Por último, en el punto cuatro hacemos una recapitulación del trabajo y señalamos nuestras conclusiones.

## Convergencia y Productividad Total de los Factores: Concepto y Medición

### 1. La convergencia en el estado actual

Uno de los primeros autores en señalar la hipótesis de convergencia es Solow (1956). En el artículo de Solow una de las hipótesis arrojadas por su modelo, es que los países tienden a converger en el largo plazo, en otras palabras: Las economías menos desarrolladas crecerán más rápido que las desarrolladas en términos per cápita, para que en el largo plazo las economías lleguen al mismo punto estacionario y tengan los mismos estándares de vida en ingreso per cápita. Desde entonces se han hecho varios estudios empíricos sobre este tema para afirmar o rechazar dicha hipótesis, entre los primeros trabajos empíricos podemos encontrarnos con el desarrollado por Baumol (1986), donde presenta evidencia de convergencia en su muestra utilizada, pero la crítica que le hacen es que su muestra está sesgada, ya que solo toma países que prácticamente son economías desarrolladas. Los autores que han trabajado más acerca sobre el tema son Sala-i-Martin y Barro. El primero de ellos nos presenta dos definiciones<sup>1</sup> principales acerca de la convergencia, estas son: Convergencia beta, la cual puede ser absoluta o condicional; y sigma convergencia. El concepto relacionado con beta convergencia lo definiremos a continuación, señalando primero beta convergencia absoluta y después beta convergencia condicional. Existirá beta convergencia absoluta si los países pobres tienden a crecer más rápido que los ricos, llegando al mismo y único estado estacionario. La definición de beta convergencia condicional señala la existencia de diferentes estados estacionarios y requiere la inclusión de variables de control para esas diferencias. El último concepto es el de sigma convergencia, este existirá cuando un grupo de economías converjan en el sentido de sigma si la dispersión de sus ingresos reales per cápita tiende a decrecer en el tiempo. Un punto a señalar de importancia entre estos conceptos es el hecho, de que la existencia de beta convergencia no implica que exista sigma convergencia. En cambio la existencia de sigma convergencia llevara a la existencia de beta convergencia. Algunos autores que han trabajado el tema son: Baumol (1986); Grier y Tullock (1989); Sala-i-

---

<sup>1</sup> Esta terminología fue introducida por primera vez en Sala-i-Martin (1990).



Martin (1990); Barro y Sala-i-Martin (1992); Mankiw, Romer y Weil (1992); Holtz-Eakin (1993); Sala-i-Martin (1996); Islam (1995); etc.

En las últimas décadas, se han desarrollado varios trabajos de investigación, relacionados sobre la teoría del crecimiento, los cuales han crecido aceleradamente. Actualmente se plantean nuevos esquemas acerca de este tema con nuevos modelos, en donde se relajan supuestos neoclásicos para observar los resultados que se obtendrán a la hora de relajar dichos supuestos. Una de las principales hipótesis que surge de los modelos de teoría del crecimiento, tiene que ver con la convergencia, la cual puede existir entre países y/o regiones. El paradigma básico para la discusión de la convergencia se desprende del modelo desarrollado por Solow (1956)<sup>2</sup>. Posteriormente el trabajo fue ampliado por Ramsey (1928), Cass (1965), y Koopmans (1965). Como se sabe el modelo es de teoría de crecimiento neoclásico, en donde predice que todas las economías convergerán al mismo estado estacionario. Cuando este fenómeno persiste, se estará apoyando a los modelos de crecimiento exógeno, mientras que, cuando no exista dicha convergencia entre países, se estará a favor de los modelos de crecimiento endógeno, donde una de las hipótesis del crecimiento endógeno es la inexistencia de dicha convergencia.

La noción de convergencia es entendida de dos maneras diferentes: la primera consiste en términos de niveles de ingreso. Si los países son similares en términos de preferencias y tecnológicos, entonces el estado estacionario en niveles de ingreso será el mismo para ellos, y con el tiempo todos tendrán que llegar al nivel de ingreso per cápita; el segundo término de convergencia consiste en términos de tasas de crecimiento. En el modelo de Solow la tasa de crecimiento del estado estacionario está determinada por una tasa de progreso tecnológico exógena, entonces la tecnología es vista como un bien público y puede ser compartida, todos los países eventualmente alcanzaran la tasa de crecimiento del estado estacionario (Islam, 1995).

---

<sup>2</sup> El paradigma de la hipótesis de convergencia de manera formal surge del artículo desarrollado por Solow, pero con anterioridad, como se mencionó Abramovitz ya había mencionada que los países en el tiempo desvanecerían sus desigualdades.

El tema sobre la hipótesis de convergencia (beta convergencia) ha sido trabajado enormemente, teniendo su mayor auge en los años ochenta y noventa, en donde se han realizado varias investigaciones empíricas para probar la hipótesis de convergencia, en sus dos aspectos: convergencia absoluta y convergencia condicional, ya sea de una manera formal o informal<sup>3</sup>. Utilizando el método desarrollado por Mankiw, Romer, y Weil (1992); y Barro y Sala-i-Martin (1992) del cual se obtiene una ecuación de regresión, la cual puede ser estimada con el método de mínimos cuadrados ordinales (MCO).

Siguiendo el trabajo de Mankiw, Romer, y Weil (1992), obtendremos la ecuación de regresión. Los investigadores parten del modelo original de Solow:

En el modelo propuesto de Solow la tasa de ahorro, el crecimiento de la población, y el progreso tecnológico son exógenos. Existen dos insumos, capital y trabajo (K, L), que se les paga de acuerdo a su productividad marginal, se asume una función de producción Cobb-Douglas<sup>4</sup>:

$$Y_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (1)$$

---

<sup>3</sup> En el trabajo de Islam (2003) hace la separación de las investigaciones realizadas utilizando un método de manera formal y uno informal. La diferencia entre ambos términos, consiste en el hecho de que los resultados obtenidos de las investigaciones formales, son derivados a partir de los modelos de teoría de crecimiento, mientras que las primeras investigaciones, antes de 1992, no fueron derivadas a partir de modelos de teoría de crecimiento. Pero como menciona Islam en su texto, estos estudios previos que no fueron derivados a partir de los modelos teóricos, no implica que no tengan conexión con los modelos de crecimiento.

<sup>4</sup> Los modelos de crecimiento exógeno parten de la siguiente función de producción  $Y = F(A, K, L)$ . Donde K es el stock de capital, L es el trabajo, A es el cambio tecnológico (PTF). La función toma la forma de una Cobb-Douglas ( $Y = A K^\alpha L^{1-\alpha}$ , donde  $0 < \alpha < 1$ ), ya que cumplirá con los requisitos básicos que toda la función de producción neoclásica debe de tener en los modelos de crecimiento exógeno. Esta función tanto en el modelo de Solow, como en el de R-C-K, cumple con los siguientes tres requisitos indispensables:

- Exhibe rendimientos constantes a escala.
- Cada factor utilizado (K y L) presenta rendimientos marginales decrecientes.
- La función cumple con las condiciones de INNADA.

Para ver en detalle la formalización matemática de estas tres condiciones se sugiere al lector revisar el siguiente libro: Barro R; Sala-i-Martin (2009). *Crecimiento económico*.

En los modelos de crecimiento endógeno no cumplirán con algunos de los supuestos hechos sobre la función de producción neoclásica, ya que esta es una de las fuentes principales de donde estos modelos se irán desarrollando.

Dónde: Y es el producto, K es el capital, L es el trabajo, y A es el nivel de tecnología. L y A se asumen como tasa exógenas de crecimiento n y g, respectivamente.

$$L_t = L(0)e^{nt} \quad (2)$$

$$A_t = A(0)e^{gt} \quad (3)$$

$L_t A_t$  Será el número de unidades de trabajo efectivo, y crece en tasa de  $n + g$ .

En el modelo se asume que una fracción constante del producto se destina a la inversión, s. Definiendo k como el stock de capital por unidad de trabajo efectivo,  $k = K/AL$ ; y es definido como el producto por unidad de trabajo efectivo,  $y = Y/AL$ . La evolución de k está determinada por:

$$\dot{k}_t = sy(t) - (n + g + \delta)k_t$$

(5)

$$\dot{k}_t = sk_t^\alpha - (n + g + \delta)k_t$$

Donde  $\delta$  es la tasa de depreciación. La ecuación anterior implica que k converja al valor del estado estacionario definido por:

$$sk^{*\alpha} = (n + g + \delta)k^* \quad (6)$$

O

$$k^* = \left[ \frac{s}{(n + g + \delta)} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (7)$$

La proporción capital – trabajo tiene una relación positiva a la tasa de ahorro y negativa a la tasa de crecimiento de la población.

La predicción central del modelo de Solow concierne al impacto del ahorro y del crecimiento de la población sobre el ingreso real. Sustituyendo la ecuación (7) en la

función de producción y tomando logaritmo natural, podremos encontrar el estado estacionario en ingreso per cápita.

$$\ln \left[ \frac{Y_t}{L_t} \right] = \ln A(0) + gt + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(s) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(n + g + \delta) \quad (8)$$

Esto surge porque el modelo asume como se había mencionado anteriormente que los factores de producción son pagados respecto a sus productividades marginales, por lo cual se predicen los signos de la ecuación, y además las magnitudes de los coeficientes sobre el ahorro y el crecimiento de la población. La participación del capital en los ingresos es de un tercio, el modelo implica una elasticidad del ingreso per cápita respecto a  $n + g + \delta$  de aproximadamente -0.5.

Se asume que  $g$  y  $\delta$  son constantes entre los países. La variable  $g$  refleja principalmente el avance de los conocimientos, que no es específico de algún país (country-specific). Respecto a la tasa de depreciación, no existe alguna razón fuerte para esperar que esta tasa cambie considerablemente entre los países. El término  $A(0)$  no solo refleja la tecnología, también refleja la dotación de recursos, el clima, las instituciones, etc. Esto puede diferir entre los países. Se asume que

$$\ln A(0) = \alpha + \epsilon \quad (9)$$

Dónde:  $\alpha$  será una constante; y  $\epsilon$  será un country-specific shock. Aplicamos  $\ln$  del ingreso per capita en el tiempo, se obtendrá:

$$\ln \left( \frac{Y}{L} \right) = \alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(s) - \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(n + g + \delta) + \epsilon \quad (10)$$

Se asume que la tasa de ahorro y la tasa de crecimiento de la población son independientes de los movimientos de los factores country-specific de la función de producción. Eso asume que  $s$  y  $n$  son independientes de  $\epsilon$ .

Adicionalmente en el trabajo de Solow, hace una predicción cuantitativa acerca de la velocidad de convergencia al estado estacionario. En donde  $y^*$  será el estado estacionario

del nivel del ingreso por trabajo efectivo, y dejano a  $y_t$  como el valor actual del tiempo t. la velocidad de convergencia alrededor del estado estacionario está dada por:

$$\frac{d\ln(y_t)}{dt} = \lambda[\ln(y^*) - \ln(y_t)] \quad (11)$$

Donde la velocidad estará compuesta por:

$$\lambda = (n + g + \delta)(1 - \alpha) \quad (12)$$

El modelo sugiere una regresión para estudiar la tasa de convergencia. La ecuación (11) implica que:

$$\ln y(t_2) = (1 - e^{-\lambda t}) \ln(y^*) + e^{-\lambda t} \ln y(t_1) \quad (13)$$

Donde  $y(t_1)$  es el ingreso por trabajo efectivo del periodo inicial. Restando  $\ln y(t_1)$  en ambos lados de la ecuación (13) obtenemos:

$$\ln \hat{y}(t_2) - \ln \hat{y}(t_1) = (1 - e^{-\lambda t}) \ln(y^*) - (1 - e^{-\lambda t}) \ln \hat{y}(t_1) \quad (14)$$

Finamente sustituyendo por  $y^*$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \ln \hat{y}(t_2) - \ln \hat{y}(t_1) &= (1 - e^{-\lambda t}) \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln(s_{t1}) \\ &- (1 - e^{-\lambda t}) \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln(n_{t1} + g + \delta) - (1 - e^{-\lambda t}) \ln \hat{y}(t_1) \end{aligned} \quad (15)$$

La versión aumentada de esta ecuación, donde se incluye el capital humano queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \ln \hat{y}(t_2) - \ln \hat{y}(t_1) &= (1 - e^{-\lambda t}) \frac{\alpha}{1 - \alpha - \varphi} \ln(s_{t1}) + (1 - e^{-\lambda t}) \frac{\varphi}{1 - \alpha - \varphi} \ln(h^*) \\ &- (1 - e^{-\lambda t}) \frac{\alpha + \varphi}{1 - \alpha - \varphi} \ln(n_{t1} + g + \delta) - (1 - e^{-\lambda t}) \ln \hat{y}(t_1) \end{aligned} \quad (16)$$

La ecuación anterior es utilizada para probar la hipótesis de beta convergencia condicional, es a partir de esta ecuación donde se han desarrollado múltiples investigaciones, obteniendo resultados muy diferentes y, no se ha llegado a un consenso respecto a la aceptación o rechazo de dicha hipótesis.

En la investigación desarrollada por Islam (2003)<sup>5</sup>, nos hace un recuento de los trabajos empíricos realizados para probar la existencia de beta convergencia, ya sea condicional o absoluta. En el trabajo realizado por el investigador, nos presenta los resultados que se han obtenido hasta el año 2002. Donde las principales conclusiones que nos señala después de hacer todo el recuento desde el inicio del estudio de convergencia son:

- No existe un consenso respecto a la velocidad de convergencia, ni a la elasticidad del producto respecto al capital. Ya que utilizando diferentes métodos, estos valores difieren en las investigaciones realizadas.<sup>6</sup>
- La velocidad de convergencia a la cual se llega en los estudios es del 2%, esta es llamada la ley de hierro.
- Se encuentra evidencia de beta convergencia absoluta en muestras pequeñas de países desarrollados. También hay evidencia de sigma convergencia, en estas mismas muestras.
- No se encuentra evidencia alguna de beta convergencia absoluta, ni de sigma convergencia en muestras globales (donde se incluyen en dichas muestras, países desarrollados y subdesarrollados).
- Existe beta convergencia condicional, tanto en muestras pequeñas de países desarrollados, como muestras amplias de entorno global.

Como podemos observar estas conclusiones obtenidas a través del trabajo de Islam son hasta el año 2002, como se había mencionado anteriormente, la pregunta que surge es:

---

<sup>5</sup> Otro trabajo donde podemos encontrar una revisión de los trabajos realizados con el tema de convergencia, es en George, Oxley, y Carlaw (2003).

<sup>6</sup> Se señala en estudios como el de Barro, y Sala-i-Martin (1992); Sala-i-Martin (1996), que existe una tasa de convergencia del 2%, en varios de sus estudios obtiene esta tasa, la cual se le denomina ley de hierro, cabe mencionar que esta velocidad de convergencia es obtenida por el método de mínimos cuadrados ordinales.

¿Que nuevas evidencias se han encontrado en nuestros días relacionadas con el tema de la convergencia?

A continuación se presentara una serie de investigaciones más recientes que hablan del tema de convergencia, para poder observar si se ha avanzado en el paradigma que surge del modelo de Solow.

El trabajo de Abreu, M., de Groot, H.L.F.R., y Florax, R.G.M. (2005), los autores analizan si la tasa de convergencia del 2% que se ha obtenido en diferentes estudios, es un resultado para creer que la tasa de convergencia es una constante natural. Para llevar a cabo su prueba, utilizaran la meta análisis para investigar si la tasa de convergencia del 2% es un mito o no, además evalúan varios problemas de interpretación y estimación. Utilizan una muestra de 619 estudios acerca del tema

Dentro de sus conclusiones las que llegan los autores, es que sus resultados favorecen a la legendaria tasa de convergencia del 2% que se encuentran en diferentes estudios. Este resultado es obtenido en su modelo permitiendo efectos aleatorios entre las diferentes medidas. Mencionan también que la tasa de convergencia puede variar sistemáticamente de acuerdo a varias diferencias observables entre los estudios, incluso si uno toma en cuenta fuentes no observables de variaciones. Una segunda conclusión tiene que ver con la corrección para el sesgo de variables omitidas de heterogeneidad no observada en los niveles de tecnología, llevando a unas tasas de convergencia muy altas. Corrigiendo dicho sesgo se obtendrán tasas no tan elevadas.

Varblane y Vahter (2005). Analizan el proceso de convergencia para los países en transición y los que se van a incluir en la Unión Europea (UE); estos se comparan con los miembros ya establecidos de la UE para el periodo de 1995 a 2004. Dentro de la investigación, prueban la convergencia tanto absoluta como condicional, y la convergencia en el sentido de sigma. Los datos son tomados del Eurostat.

Los resultados muestran evidencia de convergencia absoluta para las economías en transición, mientras que se encuentra una disminución de la dispersión para las

economías que se piensan anexar (existe sigma convergencia) durante el periodo estudiado. Existe una velocidad de convergencia del 2.2% para el periodo de 2001 a 2004 entre los miembros pertenecientes de la Unión Europea y los que se están pensando en anexarse.

Whelan, y McQuinn (2006). En su trabajo implementan un nuevo enfoque del modelo de Solow y estiman la velocidad de la convergencia condicional. Ellos muestran que es consistente y posible estimar la velocidad de convergencia condicional en el modelo de Solow, sin tener en cuenta las técnicas para tratar los efectos fijos de un país específico. Su muestra de datos proviene PWT versión 6.1, tomando una muestra de 96 países, para el periodo de 1950 – 2000.

Se encuentra evidencia que dentro de grupos las estimaciones de la regresión de crecimiento es probable que exista un sesgo hacia abajo sobre la velocidad de convergencia. Dentro de la muestra estudiada se encuentra que existe convergencia condicional con una tasa del 7% por año. Esta tasa es algo más rápida que la estimada con el modelo de Solow.

Kutan, y Yigit (2007). Tratan el problema de la convergencia, el crecimiento de la productividad y la integración europea, específicamente concentrándose en los spillovers del conocimiento. Para llevar a cabo su investigación utilizaran un modelo de crecimiento endógeno estocástico. Utilizaran los 5 miembros más recientes de la Unión Europea para conformar los 15 más actuales, estos países son: España, Portugal, Austria, Finlandia y Suecia, tomando como benchmarking a Francia. Los datos utilizados son trimestrales para el periodo de 1980 – 2004.

Los resultados muestran que hay mejoras en las tasas de crecimiento de la productividad después de la integración de estos países. Se observa un incremento total del crecimiento debido a la acumulación del capital como resultado de fondo estructural y de la cohesión. Con esto se observa que la integración ayuda al aumento de la productividad y a probar la existencia de convergencia.



Young, Higgins, y Levy (2007). En su estudio exploran la posible existencia de heterogeneidad en los determinantes del crecimiento en 32 estados de los Estados Unidos. Para observar si existe convergencia o divergencia entre los estados, usan el método de estimación 3SLS-IV. Los datos utilizados son tomados de Bureau of Economic Analysis Regional Economic Information System (BEA-REIS) y del censo de Estados Unidos, todas las variables fueron expresadas en dólares de 1992. Los datos utilizados son de 3058 condados de Estados Unidos para el estudio de la heterogeneidad en la estructura del proceso de crecimiento y en la tasa de convergencia. Se incluye la variable de ingreso per cápita y 41 variables de condición.

Los resultados obtenidos en su investigación, consiste en la presencia de convergencia en los Estados Unidos cerca del 7%, que es una tasa más alta que la obtenida con el método de mínimos cuadrados ordinales. Se encuentra evidencia que en los 32 condados presenta una tasa de convergencia del 2%. Se encuentra una sustancial heterogeneidad estados individuales.

Chi-Keung (2009). El autor en su investigación planea probar si hay evidencia de convergencia entre las áreas metropolitanas de los Estados Unidos. Ya que en un estudio previo tomando como periodo de análisis de 1969 – 2001, se encuentra evidencia de divergencia en estas áreas, los investigadores llegaron a tal conclusión utilizando una prueba de raíz unitaria univariante para los datos de series de tiempo. En el trabajo de Lau Chi-Keung, utilizara una serie de pruebas para observar si hay convergencia en estas áreas metropolitanas. Las pruebas que utiliza para su propósito son: una prueba lineal y una no lineal de raíz unitaria de un Exponential Smooth Auto-Regressive Augmented Dickey-Fuller (ESTAR-ADF), utilizara el modelo ESTAR, para capturar la dinámica del crecimiento entre los estados y también para capturar la probable tasa de crecimiento de las diferentes regiones a la cual convergerán; y utiliza pruebas de raíz unitaria para las series de tiempo de sus datos. Los datos utilizados en su investigación son tomados de Bureau of Economic Analysis Regional Economic Information System (REIS), el periodo que analiza es 1929 – 2005.

Las conclusiones a las que llega, es que tanto usando pruebas lineales y no lineales de raíz unitaria se encuentra evidencia a favor de beta convergencia y sigma convergencia entre las áreas metropolitanas de Estados Unidos. Una segunda conclusión que menciona en su trabajo tiene que ver con la convergencia absoluta, que solo se puede derivar del modelo neoclásico de crecimiento solo si se mantienen los supuestos en la naturaleza de los factores de insumo y el comportamiento maximizador de los agentes.

CREMed (2009). Investigan si existe convergencia o divergencia económica para las economías del sur del Mediterráneo con la Unión Europea. Su muestra consiste en tomar los primeros 15 países de la Unión Europea que la conformaban en 1995, y con la actual, que está conformada de 27 países, en lo que concierne a los países del sur del Mediterráneo se excluye a palestina por falta de datos comparables, su periodo de análisis es de 1995 – 2007.

En las conclusiones se observa que no existe convergencia de las economías mediterráneas respecto a los primeros quince países que conformaban la Unión Europea. La dispersión entre las economías ha aumentado en el periodo de 1995 – 2007. En cambio si se incluyen los países del Partenariado Euromediterráneo, que incluye a los veintisiete de la Unión Europea actual, mencionan que si se produce un acercamiento pausado de las economías en términos per cápita. Este fenómeno de acercamiento se debe al fuerte crecimiento que experimentan muchos de los nuevos países europeos.

Ozgen, Nijkamp, y Poot (2010). El objetivo principal de su estudio es analizar el efecto de la migración en la convergencia de los ingresos medios a través de un enfoque de meta análisis evaluando varios estudios econométricos que han incorporado la migración como una variable explicativa en el modelo de regresión para observar la convergencia en los ingresos.

Las conclusiones que se encontraron es la evidencia de beta convergencia, con una tasa del 2.7%. Señalan que un incremento del 1% en la tasa de migración neta de una región eleva la tasa de ingreso per cápita en esa región en un promedio de 0.1%. Introduciendo la variable de migración neta en la regresión de crecimiento incrementa la estimación de

beta convergencia ligeramente. Dentro de sus hallazgos se encuentra evidencia de la existencia de  $\beta$  – convergencia condicional, pero esta velocidad de convergencia sin incluir la migración neta es de 2.7 por ciento, cuando se incluye la migración neta la velocidad cambia a 2.73 por ciento.

Madsen, y Timol (2011). En su trabajo buscan probar convergencia absoluta y convergencia condicional en una muestra de manufacturas de la OCDE. Utilizando modelos de teoría de crecimiento endógeno. Donde buscan observar si la PTF y la productividad laboral convergencia en el tiempo. Los investigadores consideraran un periodo de tiempo sustancialmente largo que los trabajos previos realizados, su muestra temporal consiste en 137 (1870 – 2006) años para 19 países de la OCDE.

En las conclusiones obtenidas por los autores, se encuentra una fuerte evidencia de convergencia en la productividad de las manufacturas de los 19 países de la OCDE, la convergencia ha sido llevada principalmente por la intensidad, spillovers en tecnología a través del canal de importaciones, el catching up de la tecnología se ha dado a través de los canales de desarrollo financiero. Se encuentra que a lo largo de la historia en tramos de tiempo y utilizando una sección cruzada de datos, una fuerte evidencia de beta convergencia y sigma convergencia. Además hay evidencia beta convergencia condicional en una regresión de panel usando 5, 10 y 15 años.

Las estimaciones de los resultados sugieren que la teoría del crecimiento endógeno explica el crecimiento de la productividad en las industrias manufactureras de los países industrializados sobre los pasados 137 años. La mayor parte de la teoría del crecimiento endógeno sugiere que el crecimiento es determinado por el capital humano doméstico, por la inversión y desarrollo, y los spillovers tecnológicos internacionales.

Li y Zhou (2011). Ellos estudian la convergencia absoluta y condicional en el ingreso real per cápita. Utilizan los modelos no paramétricos y semi paramétricos. La fuente de los datos es tomada de: Penn World Tables; World Development Indicators y United Nations. Se toma una muestra de 164 países para el periodo de 1970 a 2006.

Dentro de los resultados semi paramétricos se encuentra que ciertas variables ayudan al crecimiento económico, mientras que otras tienen un efecto negativo<sup>7</sup>. La comparación entre los resultados del enfoque no paramétrico y el semi paramétrico muestra que la contribución indirecta del crecimiento de los ingresos iniciales vía control de variables es una parte importante para la contribución del crecimiento economía en los ingresos. El control de las variables tiene un efecto negativo para la convergencia en los países pobres, mientras que para los países desarrollados este control de variables es positivo para la convergencia. La hipótesis de convergencia absoluta se mantiene solo para las economías con bajos niveles de ingreso per cápita. Sin embargo, la hipótesis de convergencia condicional se mantiene para todas las economías.

Barro (2012). Estudiará tanto sigma como beta convergencia condicional, la novedad de su trabajo es que introducirá los efectos de un país fijo. Toma una muestra de 80 países para un periodo de 1960 a 2009, una segunda muestra para 28 países en un periodo de 1870 a 2009.

Encuentra evidencia para la muestra de 80 países en el periodo que va de 1960 a 2009 sin introducir el efecto del país fijo, se tiene que existe beta convergencia condicional y la tasa de convergencia es alrededor de 1.7%. La inclusión del efecto del país fijo también genera una convergencia condicional en el sentido de beta, además de que la velocidad de convergencia aumenta. Para la muestra de 28 países se observa la existencia de beta convergencia condicional, aquí se tiene presente el efecto del país fijo y la tasa de convergencia obtenida es de 2.4% por año. La combinación de resultados obtenidos en la muestra pequeña y larga implica que la tasa convergencia condicional es del 2% lo cual mantiene la ley de hierro.

Gallup (2012). Analizará la distribución de los ingresos con tres enfoques: tendencia de regresión lineal, tendencia por tramos y estimación del núcleo estocástico. Con estos

---

<sup>7</sup> Las variables que favorecen al crecimiento introducidas como proxy son: inversión, emisión de dióxido de carbono, comercio, expectativas de vida e inversión extranjera directa; las variables que tienen efecto negativo en el crecimiento son: tamaño del gobierno, urbanización, inflación y participación del crédito externo.

enfoques observará si los niveles de ingreso convergen o divergen. Utiliza una muestra de 87 países de la OECD, en un periodo que va de 1985 a 2009 en la mayoría de la muestra. En sus conclusiones se observa una fuerte evidencia respecto a la convergencia en el sentido de sigma (la dispersión ha disminuido), la evidencia señala que los países con altas diferencias han disminuido y que sus ingresos han aumentado en la recientes décadas.

Dentro del tema de convergencia existen varios tipos de definiciones las cuales podemos en listar de la siguiente manera<sup>8</sup>:

- Convergencia dentro de la economía vs convergencia entre economías.
- Convergencia en términos de tasas de crecimiento vs convergencia en términos de niveles de ingreso.
- $\beta$ -convergencia vs  $\sigma$ -convergencia.
- Convergencia absoluta vs convergencia condicional.
- Convergencia en niveles-ingreso vs convergencia en PTF.
- Convergencia determinística vs convergencia estocástica.

Se resaltan estos conceptos, porque existe uno de nuestro especial interés, el cual vamos a explicar a continuación, este tiene que ver con el concepto de convergencia en PTF. Una definición que se nos hace la más conveniente la proporcionan Baumol, Nelson y Wolff (1994), la cual consiste en:

La convergencia residual se refiere a la posibilidad que después de eliminar los efectos estadísticos de la variables estimadas en la explicación del cálculo de la convergencia, el comportamiento del resto (y lo estadísticamente no explicado) del residuo de la variable dependiente (tal como la productividad o el ingreso per cápita) proporcione una muestra de convergencia entre los países estudiados. Eso es, por ejemplo, después de corregir sus diferencias en gastos en equipo, la productividad del país A podría converger con la del país B..... Los estudios

---

<sup>8</sup> Esta lista de tipos de convergencia podemos encontrarla en el trabajo de Islam (2003). Otro trabajo donde nos muestran varios tipos de convergencia y sus definiciones, lo podemos encontrar en por Baumol, Nelson y Wolff (1994), ellos hacen énfasis a siete diferentes conceptos relacionados con la convergencia.

indican que muchos países pobres se beneficiaron de la convergencia residual, incluso aunque cayera la inversión y otras variables pertinentes los condenaran a divergir de la mayoría de las economías del mundo. Eso sugiere que si los países adoptaran políticas que mejoraran su rendimiento sobre la convergencia explicada, ellos podrán estar confortados por la evidencia que las medidas probablemente no están determinadas por su residuo el cual tendrá un comportamiento divergente.

En otras palabras, la convergencia en TPF mide el grado de acercamiento tecnológico que tienen las economías. La convergencia en ingresos puede acelerarse o alejarse dependiendo si la diferencia inicial en niveles de TPF es pequeño o amplio.

Expondremos una serie de trabajos que se han realizado sobre este tema de convergencia en PTF, observaremos si existe tal hipótesis de convergencia o si se rechaza, además de otras conclusiones a las que han llegado los investigadores.

Maudos, Pastor y Serrano (2000). Ellos analizan la convergencia en productividad laboral para los países de la OECD utilizando un enfoque no paramétrico para medir el índice de Malmquist. Su muestra consiste en 23 países en el periodo de 1975 – 1990. La base de datos es tomada de Summers- Heston (1991) Penn World Table, Mark 5.6. En los resultados obtenidos se observa la existencia substancial de niveles de ineficiencia en los países de OECD, pero estas se fueron reduciendo en el periodo de análisis. Se localiza evidencia que el cambio tecnológico no favorece a la convergencia en productividad laboral, la principal fuente de convergencia en los países pobres es la tasa de acumulación del capital.

Islam (2003). En su trabajo se centra en el análisis de la productividad dinámica, para explicar que las diferencias en productividad (PTF) son más importantes que las diferencias en las tasas de acumulación para dar explicación de diferentes ingresos per cápita entre los países. Usará un enfoque de panel para calcular los índices de productividad en una amplia muestra de países para dos periodos de tiempo, que él denomina periodo inicial y al segundo periodo subsecuente. La muestra de países que

utiliza Islam es de 83, el periodo es de 1960 – 1990. El periodo inicial es de 1960 – 1975, y el periodo subsecuente es de 1975 – 1990.

Se observa en los resultados que obtenidos, que en un gran número de países se incrementó el mejoramiento en los niveles de productividad vis-a-vis al país líder, que es US. Esto es interpretado como un signo de difusión tecnológica. Las magnitudes de los mejoramientos en productividad son sin embargo muy pequeñas para el volumen del resto de los países. Hay otros países que exhiben un mayor mejoramiento y la brecha que existe respecto al líder se ha ido haciendo más pequeña.

Coelli, y Rao (2005). En sus investigación examinan las tendencias respecto a la productividad y producción en la agricultura para países desarrollados y en desarrollo. En su estudio utilizaran la metodología del DEA para poder derivar el índice de Productividad de Malmquist. Los datos utilizados provienen de la AGROSTAT, su muestra consiste en 93 países para el periodo de 1980 – 2000.

En sus resultados encuentran que la productividad total de los factores crece en un 2.1 por ciento al año, con una contribución del cambio en eficiencia (catch-up) del 0.9 por ciento anual y el cambio tecnológico (movimiento de la frontera) con una contribución del 1.2 por ciento anual. China exhibe un mejoramiento espectacular con una tasa de crecimiento en su PTF del 6.0 por ciento. Se encuentra evidencia de convergencia y de catch-up.

Triki, Chaffai, y Plane (2005). En su trabajo se proponen examinar la productividad total de los factores para seis sectores manufactureros de Túnez, y una vez obtenidos los resultados, compararlos con las productividades de los países de la OCDE y estudiar la evolución de la brecha de la productividad total de los factores de Túnez y los países de la OCDE. El periodo de análisis en el cual realizan su estudio es de 1983 – 1999 y un sub periodo.

En sus conclusiones nos mencionan que la medida de PTF muestra un mejoramiento diferente entre los sectores y en el sub periodo de análisis. Que solo tres sectores. Se

encuentra evidencia de la existencia de convergencia en PTF de Túnez y los países de la OCDE, cuando estos últimos son tomados como punto de referencia, para encontrar esta convergencia utilizaron datos de panel y se les aplicó la prueba de raíz unitaria.

Escribano, y Stucchi (2008). Se enfocan en estudiar la evolución dinámica de la productividad (PTF) en las empresas a través de los ciclos económicos, y observar si existe convergencia en PTF entre las empresas analizadas. La muestra tiene datos anuales para empresas manufactureras de España para el periodo de 1991 – 2005.

Muestran evidencia que existe convergencia en PTF en las empresas durante el periodo de recesión que tuvo España, pero no existe convergencia durante el periodo de expansión. Se señala que existe convergencia tanto en beta convergencia como sigma convergencia en PTF, sus datos los comparan con otras formas de medir la PTF y se encuentran los mismos resultados

Mahmood, y Afza (2008). Intentan explicar el milagro del crecimiento en los países del Este Asiático. Para esto utilizan el enfoque del DEA y el índice de productividad de Malmquist el cual cuantifica la PTF. Utilizaron un método de regresión de panel con efectos aleatorios para explicar que variables son de relevancia en la PTF. Su muestra consiste en 5 países del Este de Asia: China, Corea del Sur, Tailandia, Malasia e Indonesia, para el periodo de 1980 – 2000.

En los resultados encontrados muestra que los países que definen la frontera son Indonesia y Malasia. En 1990 Corea del Sur alcanzó la frontera de tecnológica, mientras que Tailandia permaneció siendo la economía técnicamente ineficiente. Para toda la muestra se encuentra que la productiva se incrementó en los 20 años de estudio. Este crecimiento se debió a la innovación tecnológica, más que a los mejoramientos en eficiencia. La única variable que tiene un efecto positivo sobre el crecimiento de la PTF es la educación, mientras que la inversión extranjera directa y la apertura comercial no son determinantes del crecimiento en la PTF



Di Liberto, Mura, y Pigliaru (2008). Los investigadores proponen en su trabajo utilizar la metodología de panel de efectos fijos basados en el trabajo de Islam (2000), para evaluar la existencia de convergencia tecnología entre las regiones de Italia. Evaluarán los resultados obtenidos comparándolos con otras estimaciones que obtendrán de los métodos siguientes: Least Square with Dummy Variables (LSDV), corrección del sesgo del método LSDV, y el método GMM. En su muestra incluyen 19 regiones de Italia y su periodo de análisis es de 1963 – 1993.

En los resultados encontrados, señalan una presencia de heterogeneidad entre las regiones de Italia en la PTF, el resultado presentado es robusto para el uso de diferentes estimaciones tales como LSDV, corrección del sesgo LSCV y GMM. Han encontrada una fuerte evidencia de apoyo la hipótesis de convergencia en PTF que ha sido el principal factor observado en las regiones de Italia a mediados de los setentas., pero esta convergencia en PTF no ha generado una decreciente y persistente desigualdad en los ingresos per cápita en las regiones.. Por ultimo encuentran que su medida de capital humano está altamente correlacionada positivamente con la PTF. Este resultado confirma una de las hipótesis dentro del marco de Nelson y Phelps, el cual dice que el capital humano es el principal determinante para la existencia de catch-up tecnológico.

Madsen (2008). En su trabajo examina el efecto que tienen las patentes internacionales sobre la productividad total de los factores para 16 países de OCDE en un periodo bastante largo de 120 años (1883 – 2004). Además examinan si el flujo internacional de las patentes ha contribuido a la convergencia en PTF en los países de la OCDE tomados en la muestra.

En las conclusiones nos señala el autor que tanto las patentes internacionales y los spillovers del conocimiento juegan un papel importante en la PTF de los países de la OCDE a través del canal del comercio. Encuentran la existencia de sigma convergencia para los 16 países de la OCDE, esta convergencia es atribuida a los spillovers del conocimiento y a las patentes internacionales, señalan que los países no tienen un catch-up

automáticamente respecto a la frontera tecnológica, para lograr este catch-up necesitan a traer conocimiento internacional para lograr su mejora.

Di, Pigliaru y Chelucci (2008). En su investigación adoptan una metodología de panel de efecto-fijo, que les permite tomar en cuenta tanto la PTF y la convergencia neoclásica. Utilizan una muestra de 76 países en el periodo de 1960 – 2003. Sus datos son tomados del Penn World Tables (2006) y la variable de capital humano es tomada de Barro y Lee (2000). Su análisis empírico confirma la presencia de una alta y persistente heterogeneidad de la TFP entre los países. No encuentran evidencia global de la existencia PTF convergencia. Los autores encuentran que el líder en TFP es Estados Unidos, cada vez más se está alejando del resto de los países. Los países de Europa, con algunas excepciones, parecen empeorar en el ranking de la PTF, mientras que los países del Este de Asia, parecen mejorar enormemente.

Badunenko, Henderson y Russell (2008). En su trabajo analizan el crecimiento macroeconómico y los patrones de convergencia. Ellos utilizan recientes resultados econométricos/estadísticos para corregir el sesgo existente en la metodología del DEA. Una vez corregido el sesgo estudian la evolución de la distribución de la productividad mundial en el periodo de 1965 – 2000. Su muestra consiste en 70 países usando la base de Summers- Heston (2006) Penn World Tables 6.2. Sus conclusiones son: el cambio tecnológico no es neutral, todos los avances tecnológicos toman lugar en las economías ricas. Se encuentra evidencia de que el cambio en eficiencia explica la aparición de dos modos de distribución del producto por trabajador. Así mismo, la acumulación del capital tiene una menor importancia en la distribución del producto por trabajador.

Boussemart, Briec y Tavéra (2009). En su investigación analizan la evidencia del catching-up tecnológico, para el sector manufacturero, para una muestra de 14 países de la OECD en un periodo de análisis de 1970 a 2001. Plantean que su medida de la TPF no asume tecnología y distribución eficiente. Los datos utilizados son anuales y son tomados de la base de International Sectoral Data Bank (ISDB) y OECD STAN database for Industrial Analysis.

Los resultados obtenidos sugieren que a diferencia de las investigaciones previas, los autores encuentran la existencia de movimientos hacia la PTF catching-up tecnológico durante el periodo de 1970 a 1986 para la OECD y para los países Europeos. Los patrones del catching-up fueron revertidos en el periodo de 1987 – 2001.

Di liberto, Pigliaru, y Chelucci (2011). En el trabajo realizado adoptan la metodología de panel de efectos fijos para tomar en cuenta tanto la PTF y la hipótesis de convergencia. Estimaron valores para la PTF usando diferentes estimadores tales como LSDV, Corrección – Kiviet LSDV, y GMM a la Arellano y Bond. Los datos utilizados provienen de la PWT (2006), con la excepción del capital humano que es tomado de Barro y Lee (2000), el índice de calidad institucional es tomado de International Risk Guide, y el de apertura del comercio proviene de Sachs y Warner (1995). Utilizan una muestra de 76 países en el periodo de 1960 – 2003.

En su estudio empírico encuentran evidencia de una alta y persistente heterogeneidad en los niveles de PTF entre los países. Además de no encontrar evidencia del proceso de convergencia global en la PTF. Además se encuentra que USA, el líder en PTF, está más distanciado que el resto de los países. Mientras que los países Europeos parecen empeorar en el ranking de la PTF, Mientras que los países del Este de Asia han aparecido como los mayores ganadores. Se encuentra que existe convergencia condicional en la PTF.

Rabanal, P., Rubio-Ramírez, J. F., & Tuesta, V. (2011). Lo que buscan probar los investigadores es que el proceso de PTF en US y sus principales socios comerciales, presentan en la PTF una raíz unitaria cointegrada y tiene un vector de cointegración de (1,-1). Los datos con los que trabajaron son trimestrales para el periodo de 1980 – 2007, los cuales son obtenidos de Bureau of Economic Analysis.

En sus conclusiones muestran que el proceso de PTF en US y sus socios comerciales efectivamente son cointegrados y presentan un vector de cointegración de (1.-1). Y que la relativa volatilidad de la tasa de cambio real con respecto a la producción se ha incrementado en los US, Reino Unido, Canadá y Australia en los últimos 20 años. Además de que se exhibe una convergencia entre la muestra estudiada.

Ball, San Juan, y Ulloa (2012). Dentro de su trabajo se enfocan en examinar la relación entre los ciclos económicos y la convergencia en productividad (PTF) en la agricultura de los condados de US. Dentro de su trabajo probaran también la hipótesis del catch – up usando un modelo especificado ignorando los ciclos económicos. Después mostraran como la tasa de convergencia cambia entre las diferentes fases del ciclo económico.

Encuentran evidencia a favor de la convergencia en PTF. Encuentran que los estados menos especializados presentan mayores tasas de productividad que los estados que son más especializados. El resultado encontrado apoya a la hipótesis del catch – up. Respecto a la velocidad de la tasa de convergencia en los diferentes estados del ciclo económico, mencionan que esta tasa es más rápida durante la contracción que durante la expansión.

Di Liberto, y Usai (2013). En su trabajo se proponen analizar utilizando la metodología de efectos fijos de panel, que les permite tomar en cuentas tanto la PTF y la convergencia tradicional neoclásica, para las regiones Europeas. Los datos calculados para la PTF serán comparados con varias estimaciones para su robustez, entre estas estimaciones están: OLS, LSDV, corrección espacial LSDV, corrección-Kiviet LSDV y GMM a la Arrellano y Bond. Su muestra consiste en 199 regiones de Europa para el periodo de 1985 – 2006.

En sus conclusiones encuentran una alta y persistente heterogeneidad de PTF entre las regiones de Europa. Además no se encontrar evidencia de un proceso global de convergencia en PTF entre estas regiones. Esta dispersión se ha mantenido constante a través del tiempo. Encuentran que hay una polarización de productividad de las regiones ricas del Norte de Europa, quienes tienen mayor productividad, mientras que las regiones del Sur de Europa pierden terreno en términos de productividad.

Bournakis (2012). La principal hipótesis en su trabajo es si la transferencia de tecnología es una conducta para el crecimiento de la productividad para los países que están por debajo de la frontera de eficiencia. Analiza los países de Grecia y Alemania. Donde Grecia es el país seguidor, mientras que Alemania es el líder en tecnología. La base de datos utilizada proviene del EU KLEMS y es usada la base de la OECD-STAN para complementar la fuente el periodo de análisis es de 1980 – 2003.

Los resultados exhiben la existencia de una transferencia de tecnología importante para los movimientos del crecimiento en la TFP. No obstante, la velocidad de transferencia es lenta, ciertamente más lenta que la expuesta en otros estudios anteriores. La velocidad de convergencia tecnológica muestra un amplio grado de una alta brecha tecnológica entre Alemania y Grecia en el final del periodo.

## **2. Metodologías econométricas para estimar la ecuación de convergencia**

En este apartado presentaremos de manera breve las metodologías econométricas que han ido surgiendo para estimar la ecuación de convergencia. Se han adaptado estas nuevas metodologías en el tema de convergencia, las cuales corrigen problemas como: sesgo de variables omitidas, variables endógenas, y correlación entre las variables y en el tiempo.

Existen diversas metodologías econométricas desarrolladas y empleadas, para aplicarlas y obtener estimaciones más robustas para los coeficientes de la ecuación de convergencia, y corregir los problemas que mencionamos previamente. Algunas de las metodologías son:

- Mínimos Cuadrados Ordinales (OLS, son sus siglas en ingles)
- Mínimos Cuadrados con Variables Dummy (LSDV)
- Corrección de sesgo a la Kiviet de Mínimos Cuadrados con Variables Dummy (LSDV-Kiviet)
- Corrección espacial de Mínimos Cuadrados con Variables Dummy (spatially-LSDV)
- Anderson-Hsiao Estimador de Variables Instrumentales en Nivel (AHI)
- Anderson-Hsiao Estimador de Variables Instrumentales en Diferencias (AH (d))
- Estimador GMM a la Arellano (GMM)
- Estimator GMM System (sys-GMM)
- Estimador en dos etapas de Mínimos Cuadrados (2SLS)
- Estimador en tres etapas de Mínimos Cuadrados (3SLS)
- Estimador generalizado en tres etapas de Mínimos Cuadrados (G3SLS)

- Estimador de la mínima distancia (MD)

A continuación se discutirá de manera breve las metodologías empleadas para la estimación de los coeficientes. Además en el apéndice se mostrara el desarrollo para la obtención de estas estimaciones.

En las primeras investigaciones que se realizaron para estimar la validez del modelo de Solow y verificar la hipótesis de convergencia que surge de este modelo, los estudiosos del tema han estimado la ecuación (16) utilizando el método de Mínimos Cuadrados Ordinales (MCO o OLS sus siglas en ingles). Para obtener la ecuación de convergencia se asume que el término de error es independiente de las variables de ahorro y crecimiento poblacional<sup>9</sup>. Este supuesto hecho, permite poder estimar la ecuación por el método de mínimos cuadrados, ya que sin este supuesto no se podría utilizar dicha estimación econométrica. Una alternativa que se da para relajar el supuesto de correlación del término de error respecto a las variables explicativas, es reconocer que esta correlación existe, para que después se encuentren variables para poder estimar dicho termino. Por lo cual se puede optar por usar la metodología de IV utilizada por Anderson-Hsiao (AH). Sin embargo dada la esencia y el alcance del termino A (0) (es el término de Productividad Total de los Factores) surge la dificultad de acercarse utilizando los instrumentos mencionados en AH, los cuales estarán correlacionados con las variables explicativas incluidas en el modelo y no estarán correlacionadas con A (0). La opción de utilizar los estimadores de IV propuestos por AH no serán confiables Islam (1995).

Con lo mencionado previamente surge el problema de endogeneidad del termino de error con las variables explicativas, ocasionando que ocurra un sesgo es las estimaciones de los coeficientes y por lo tanto las estimaciones obtenidas no sean robustas. Otro problema que presenta el utilizar la ecuación (16) y ser estimada por OLS, es el hecho que se asume la existencia de una función de producción idéntica para todos los países. Esto ha sido un problema notable, por lo cual se ha sugerido para corregir este problema, el utilizar la

---

<sup>9</sup> Sin este supuesto hecho, lo más probable es que el termino de error este probablemente correlacionado con la tasa de ahorro y el crecimiento poblacional, entre otras variables, tales como dotaciones de recursos, etc. En las investigaciones donde se utiliza la metodología econométrica de panel este supuesto es relajado.

metodología de panel, la cual no asume una función de producción idéntica para todos los países, y considera que existen diferentes funciones de producción de la forma llamada *country effects*

Un problema común en la estimación de datos de panel con efectos individuales, es saber cómo deben ser tratados estos efectos si deben de ser fijos o aleatorios. En el último caso se asume que los efectos no están correlacionados con las variables exógenas incluidas en el modelo Islam (1995).

La estimación por el método de Mínimos Cuadrados con Variables Dummy (LSDV) son basados en el supuesto de efectos fijos esto es todavía permitido, aunque tal supuesto puede parecer todavía fuerte. Uno de los problemas que causa el utilizar LSDV surge con el problema de carácter dinámico. Ya que la presencia de la variable dependiente rezagada del lado derecho de la ecuación (16.5), hace que los estimadores de LSDV sean inconsistentes cuando se considera que  $N$  tiende al infinito. Sin embargo las propiedades asintóticas de los estimadores de panel de datos pueden ser considerados en la dirección de  $T$ , lo cual hace que los estimadores de LSDV sean considerados como consistentes y asintóticamente equivalentes a los estimadores de Máxima Verosimilitud (MLE siglas en inglés) Amemiya (1967).

Otros estimadores que muestran un mejor desempeño es el de mínima distancia (MD) que es propuesto por Chamberlain (1982, 1983). Este tipo de estimadores son especialmente designados para los modelos donde los efectos fijos estén correlacionados con las variables exógenas incluidas. El estimador MD tiene la propiedad adicional de que los estimadores son robustos para cualquier presencia de correlación serial en el término  $v_{it}$ .

El método GMM es utilizado para corregir dos problemas que se presentan en la metodología de panel dinámico, estos problemas son: la correlación de efectos individuales y la endogeneidad de las variables explicativas. Los resultados arrojados por estos estimadores supera a los previamente mencionados, por el hecho de corregir los dos problemas mencionados. Corrigiendo las dificultades de la metodología de panel por el

método GMM, al calcular la tasa de convergencia, se obtiene una tasa más elevada que la famosa ley de hierro, la cual menciona que existe una velocidad de convergencia del 2%. Pero este método tiene un problema, y surge al momento de obtener las primeras diferencias.

Se ha demostrado que el utilizar las estimaciones por el método GMM surgirá un problema al estimar la ecuación de crecimiento (ecuación de convergencia en panel dinámico), esto se debe cuando persisten las series de tiempo y el número de observaciones de las series de tiempo son pequeñas, por lo cual los coeficientes obtenidos con el método GMM se comportaran de manera pobre. Por lo cual para corregir este problema al utilizar los estimadores GMM se propone utilizar los System GMM, los cuales corrigen el problema y dan una robustez a los coeficientes estimados. Estos estimadores son congruentes en la teoría de crecimiento económico y en la parte empírica son mejores que otras metodologías. La velocidad de convergencia que resulta de estos estimadores es de nuevo del 2%.

Se han presentado varias metodologías econométricas, con las cuales se han ido corrigiendo los problemas que se han ido presentando para poder estimar la ecuación de convergencia, pero ahora nos surge la siguiente pregunta: ¿Qué estimadores de los que acabamos de presentar, nos darán los resultados más robustos y confiables, para que en futuras investigaciones se use ese método?

La respuesta a nuestra pregunta planteada no es fácil, ya que como pudimos ver existen muchas maneras para estimar la ecuación de convergencia, algunos indicios para poder hacer una elección adecuada sobre el método que se podría aplicar en futuras investigaciones, la han proporcionado varios autores, quienes han aplicado la metodología Monte Carlo a las estimaciones econométricas presentadas en sus trabajos relacionados con la convergencia, y han encontrado algunos resultados que nos ayudaran a elegir que metodología econométrica es la más adecuada:

Kiviet (1995). Nos presenta en su trabajo que aplicando el estudio Monte Carlo a las estimaciones hechas en LSDV, estimaciones IV y GMM. Encuentra que para muestras



pequeñas en  $T$ , la corrección del sesgo de las estimaciones obtenidas en el método LSDV, parecen ser más atractivas que las de las estimaciones de GMM. En el trabajo hecho de Kiviet señala que el estudio realizado aplicando el análisis Monte Carlo analiza un panel dinámico y encuentra que para  $T \leq 20$  y  $N \leq 50$  las estimaciones de la corrección del sesgo LSDV y los estimadores IV son consistente, mejores que los obtenidos en las estimaciones GMM. Por otra parte a pesar de que las estimaciones de Kiviet resultan tener un sesgo más alto, estas estimaciones resultan ser más eficientes que las de los estimadores IV. Así que el análisis Monte Carlo sugiere utilizar los estimadores Kiviet para paneles pequeños  $T \leq 10$ .

Blundell, y Bond (1998). Presentan que en sus hallazgos utilizando el estudio Monte Carlo, que los estimadores System GMM son más eficientes que los GMM, además sugieren que los estimadores System GMM presentan mejores propiedades para las muestras pequeñas. En su estudio encuentran que los estimadores GMM están sesgados a la baja y son muy poco precisos. Con lo cual sugieren utilizar los estimadores System GMM.

Judson, y Owen (1999). Utilizan el enfoque Monte Carlo para observar el rendimiento de varios estimadores y para saber cuáles son los que tienen el menor sesgo posible al estimar los coeficientes para paneles amplios y cortos. Encuentran evidencia que los estimadores LSDV pueden ser significativos incluso con dimensiones de tiempo amplias como 30. Para paneles de dimensiones pequeñas los estimadores LSDV también serán una buena elección. Sin embargo como las dimensiones de tiempo van incrementándose los estimadores IV serán igual de buenos

Hsiao, Pesaran, y Tahmiscioglu (2002). Ellos van a comparar los estimadores de máxima verosimilitud, mínima distancia, IV y GMM, en muestras finitas. En sus resultados encuentran que el enfoque de máxima verosimilitud parece dominar al enfoque de GMM tanto en términos de sesgo como en la raíz media del error cuadrático de los estimadores. La comparación en tamaño y poder de las pruebas muestran que los estimadores de máxima verosimilitud son mejores.

Bun, y Carree (2005). En su estudio desarrollan un nuevo estimador para corregir el sesgo para los efectos fijos en el modelo de panel dinámico (sesgo corregido LSDV), esto deriva en limitar la distribución para fijar T y N grandes. Utilizando el experimento Monte Carlo compara estos estimadores con los IV y los GMM, y encuentran evidencia que la corrección del sesgo de LSDV es mejor que los estimadores comparados, incluso en muestras pequeñas.

Buddelmeyer, Oguzoglu, y Webster (2008). En el trabajo realizado por los autores utilizan el experimento Monte Carlo sobre los diferentes estimadores (OLS, LSDV, IV, y GMM), para identificar el sesgo en las estimaciones considerando los efectos fijos en los modelos de panel. Encuentran evidencia que los estimadores estudiados utilizando el análisis Monte Carlo son buenos para paneles grandes y pequeños. Sin embargo los estimadores OLS superan a los otros estimadores cuando se mantiene lo siguiente: que el corte transversal sea pequeño  $N=20$ , dimensiones de tiempo cortas  $T=5$ , y los coeficientes sobre la variable dependiente rezagada sea amplia  $\gamma=0.8$ .

### **3. Definición y medición de la Productividad Total de los Factores (PTF)**

En el trabajo realizado por Abramovitz (1956) donde nos menciona que la PTF es una medida de nuestra ignorancia, es uno de los primeros artículos donde le toman importancia a la medición y explicación acerca de este tema. Posteriormente en el artículo seminal de Solow (1957) pone la contabilidad del crecimiento en fundamentos teóricos, para así poder calcular las tasas de crecimiento de la PTF (también conocido como residual de Solow), además sugiere de manera implícita el uso de números índices, para poder obtener una medición de la PTF. En el trabajo realizado por Tinbergen (1959) sigue un enfoque de cuentas de crecimiento, pero utiliza este enfoque haciendo la comparación de manera absoluta y no de manera relativa como generalmente se sugiere<sup>10</sup>, para el periodo de 1870 a 1910. Denison (1967) también trabaja midiendo la PTF utilizando el enfoque absoluto de cuentas del crecimiento para los países de Bélgica, Dinamarca, Francia,

---

<sup>10</sup> Para abordar el tema sobre la medición de la PTF utilizando el enfoque de cuentas de crecimiento de forma absoluta y relativa, se puede ver en el trabajo realizado por Islam (2001). En su trabajo explica de manera clara la diferencia entre medición absoluta y relativa.

Alemania, Italia, Holanda, Noruega, Reino Unido y Estados Unidos. Otros autores que siguen la misma metodología son: Barger (1969); Bergson (1975); Kravis (1976); etc. Los primeros en introducir al campo empírico el uso de la metodología de cuentas del crecimiento de forma relativa son Jorgenson, y Nishimizu (1978). Quienes obtuvieron la medición de la PTF de forma relativa para los países de Estados Unidos y Japón. Los que siguieron la metodología desarrollada por Jorgenson y Nishimizu, se encuentran: Christensen, Cummings, y Jorgenson (1980, 1981); Wolff (1991), el autor utiliza los datos de Maddison para obtener la PTF de los países del G – 7 en el periodo de 1870 - 1979; Dollar, y Wolff (1994), se concentran en el análisis de la industria manufacturera para medir la PTF, donde seleccionan años entre 1963 y 1985; y Dougherty, y Jorgenson (1996, 1997) miden la PTF relativa para el grupo de países del G – 7 para los años de 1960 – 1989. En los años noventa surge un nuevo enfoque para obtener la PTF, este enfoque fue desarrollado por Islam (1995), donde utiliza la metodología econométrica (enfoque de regresión de panel) para obtener resultados de la PTF. Utiliza una muestra de 96 países para comparar los niveles de PTF. También en los años noventa se introduce el enfoque de función distancia, este aparece en el trabajo realizado por Färe, Grosskopf, Norris, y Zhang (1994). Los autores utilizan una muestra de los países de la OCDE, y posteriormente comparan los resultados obtenidos de la función distancia con el índice de Tornqvist.

La Productividad Total de los Factores puede ser una medida del total del producto entre el total de insumos. Normalmente el total de insumos es una agregación del capital físico y del trabajo, y se pueden pasar por alto insumos tales como la tierra<sup>11</sup>. Existen diferentes mediciones parciales de la productividad, tales como: la productividad laboral, que es un cociente del total del producto y el número total de trabajadores usados en la producción o el número total de horas trabajadas; la otra medición parcial es la productividad del capital, que igual consiste en el cociente del total del producto y el total de capital físico utilizado en la producción.

---

<sup>11</sup> Por tal motivo algunos autores prefieren dar el nombre de Productividad Multifactorial. Ya que con esto se pueden incluir múltiples insumos pero no todos.

Lo primero que debemos señalar es la definición de la Productividad Total de los Factores<sup>12</sup> y la de convergencia en PTF. A continuación daremos algunas definiciones que han presentado los investigadores acerca de este tema de la PTF<sup>13</sup>:

- Para Abramovitz (1956), la PTF es la medida de nuestra ignorancia.
- En el trabajo de Jorgenson y Griliches (1967) nos plantean que la PTF no refleja todo el cambio tecnológico, sino solo una parte no onerosa de los avances técnicos.
- En un trabajo realizado por Statistics Canada (1998), mencionan que el progreso tecnológico o el crecimiento de la Productividad Total de los Factores es estimada como un residual de la función de producción. La Productividad Total de los Factores es así la mejor expresión de la eficiencia de la producción económica y el prospecto para incrementar aún más la producción.
- Para Hulten (2000), dicen que el residual no puede ser equiparado con el cambio tecnológico, aunque es muy frecuente hacerlo. Para extender la productividad a ese efecto, es por medio de la innovación, esto es la parte sin costo que captura el cambio tecnológico. Ese mana del cielo puede reflejar las spillovers de las externalidades, o puede simplificar el reflejo de la inspiración y el ingenio.

En los párrafos anteriores observamos solo algunas definiciones con las que podemos entender en que cosiste la PTF. Ahora señalaremos las diferentes metodologías que se han propuesto para de medir la PTF.

---

<sup>12</sup> En el trabajo realizado por Lipsey, y Carlaw (2004) argumentan que la PTF no es una medida del cambio tecnológico. Más bien es una medida imperfecta de las ganancias súper-normales las cuales son asociadas con el crecimiento creado por el cambio tecnológico. Estas ganancias son similares pero no idénticas, para Jorgenson, y Griliches (1967) toman el concepto como un free lunches. Para Solow (1957) también señala que el término cambio tecnológico es una expresión corta para cualquier tipo de movimiento de la función de producción.

Lipsey, y Carlaw (2004) presentan en su trabajo seis razones del por qué la PTF es una medida imperfecta de esas ganancias.

<sup>13</sup> En el trabajo realizado por Solow (1957) nos presenta de una forma teórica y congruente la obtención del residual, que es la parte no explicada dentro del modelo utilizado.

En el trabajo desarrollado por Mawson, Carlaw y McLellan (2003), nos señalan que existen 4 maneras principales para medir la PTF, las cuales consiste en<sup>14</sup>:

- Enfoque de cuentas del crecimiento.
- Enfoque de números índice.
- Enfoque función distancia
- Enfoque econométrico.

### **3.1. Enfoque de cuentas de crecimiento**

Este enfoque nos permite descomponer el crecimiento del producto en diferentes crecimientos de insumos (normalmente capital y trabajo) y el cambio en la productividad total de los factores. Las cuentas del crecimiento requieren una función de producción específica que defina qué nivel de producción puede ser algún tiempo particular dada la disponibilidad de cierto nivel de diferentes insumos y la productividad total de los factores.

La función de producción es escrita como:

$$Y_t = A_t f(K_t, L_t) \quad (17)$$

Donde  $Y_t$  es la producción en el periodo t;  $A_t$  es la productividad Total de los Factores en el periodo t;  $K_t$  es el stock de capital en el periodo t; y  $L_t$  es el trabajo disponible en el periodo t.

Mawson, Carlaw y McLellan (2003), nos mencionan que el enfoque de cuentas del crecimiento está basado en los siguientes supuestos:

- El primero consiste en que la tecnología o la Productividad Total de los Factores son separables.

---

<sup>14</sup> Un trabajo previo de Islam (2001) trata el tema de la medición de la PTF, la diferencia entre ambos trabajos, es que en el de Islam no se incluye de manera explícita la medición de la PTF utilizando una función distancia. Además de que Islam señala que el enfoque de función distancia ha sido limitado a países desarrollados y frecuente mente a sectores particulares de una economía.

- El segundo consiste en que la función de producción exhibe rendimientos constantes a escala.
- El tercero consta en asumir que los productores se comportan de manera eficiente, por lo cual buscan maximizar los beneficios.
- El cuarto y último supuesto, es que se asume que los mercados son completamente competitivos, que los participantes en estos mercado son tomadores de precios, quienes solo pueden ajustar las cantidades de sus demandas.

Lo siguiente después de establecer los supuestos de las cuentas del crecimiento es diferenciar la ecuación (17) respecto del tiempo, para obtener:

$$\dot{Y} = \dot{A}f(K, L) + \frac{\partial f}{\partial K} \dot{K}A + \frac{\partial f}{\partial L} \dot{L}A \quad (18)$$

Donde los puntos indican las derivadas parciales respecto del tiempo. Dividiendo (18) por Y obtenemos:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + A \frac{\partial f}{\partial K} \frac{\dot{K}}{Y} + A \frac{\partial f}{\partial L} \frac{\dot{L}}{Y} \quad (19)$$

La elasticidad del producto respecto al trabajo  $w_L$  y la elasticidad del producto respecto al capital  $w_K$  pueden ser escritas como:

$$w_L = \frac{\partial Y}{\partial L} \frac{L}{Y} = A \frac{\partial f}{\partial L} \frac{L}{Y} \quad (20)$$

$$w_K = \frac{\partial Y}{\partial K} \frac{K}{Y} = A \frac{\partial f}{\partial K} \frac{K}{Y} \quad (21)$$

Con lo anterior podemos recibir la ecuación (19) como:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + w_K \frac{\dot{K}}{K} + w_L \frac{\dot{L}}{L} \quad (22)$$

De la ecuación (22) resolvemos para obtener la tasa de crecimiento de la PTF:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{Y}}{Y} - w_K \frac{\dot{K}}{K} - w_L \frac{\dot{L}}{L} \quad (23)$$

Dónde:

$\frac{\dot{A}}{A}$ : es la tasa de crecimiento de PTF (es un residual).

$\frac{\dot{Y}}{Y}$ : es la tasa de crecimiento del producto real.

$\frac{\dot{K}}{K}$ : es la tasa de crecimiento del stock de capital.

$\frac{\dot{L}}{L}$ : es la tasa de crecimiento del insumo trabajo.

$w_K$  Y  $w_L$ : es la participación (elasticidades) del capital y trabajo en los ingresos.

El crecimiento de la PTF es un residual, que representa la parte del crecimiento real de la producción que no puede ser explicado por el crecimiento en el insumo capital o el insumo trabajo.

Para aplicar la ecuación 7, se necesitan las estimaciones de las elasticidades  $w_K$  Y  $w_L$ . Pero estas estimaciones no siempre están disponibles. Sin embargo para que estas puedan ser obtenidas se asume que la función de producción toma la forma de una función Cobb-Douglas la cual tiene rendimientos constantes a escala:

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha} \quad (23)$$

Los factores de producción son pagados respecto a sus productividades marginales, entonces  $w_K$ , es igual a la parte del ingreso pagada al capital y  $w_L$  es igual a la parte del ingreso pagada al trabajo. De la ecuación (22) si tenemos los datos de las tasas de crecimiento reales de la producción  $\frac{\dot{Y}}{Y}$ , las tasas de crecimiento del stock de capital  $\frac{\dot{K}}{K}$ , la tasa de crecimiento del insumo trabajo  $\frac{\dot{L}}{L}$ , y la participación del capital y trabajo en el ingreso  $w_K$  Y  $w_L$ , entonces se tendrá la suficiente información para obtener las estimaciones del crecimiento de la PTF  $\frac{\dot{A}}{A}$ .

### 3.2. Enfoque de números índice

El enfoque de números índices consiste en dividir un índice de cantidad de producto por un índice de cantidad de insumo para obtener un índice de productividad<sup>15</sup>, por lo tanto:

$$A_t = \frac{Y_t}{I_t} \quad (24)$$

Dónde:  $A_t$  será la PTF;  $Y_t$  será un índice de cantidad de producto; e  $I_t$  es un índice de cantidad de insumos. Los subíndices indican el periodo de tiempo. En este enfoque de números índices no se necesita especificar una función de producción para medir la PTF (como en el caso del enfoque de cuentas del crecimiento, donde se especifica una función de producción) y subsecuentemente las tasas de crecimiento pueden no ser las mismas como cuando se usa el enfoque de cuentas de crecimiento<sup>16</sup>.

En el trabajo realizado por Solow (1957) sugiere de una manera implícita el uso de números índices para el cálculo de la Productividad Total de los Factores. Así que utiliza el un numero índice Divisia<sup>17</sup>, cuyo rasgo particular de este tipo de índice, es que considera al tiempo de forma continua, lo cual considera los movimientos infinitesimales entre cuales quiera dos momentos dados. Esto es así porque la medición se plantea en términos de tasas de crecimiento calculadas como resultado de diferenciar las variables respecto del tiempo en la medición de la PTF.

---

<sup>15</sup> Uno de los índices más utilizados para calcular la productividad multifactorial en los sectores como lo hacen la Australian Bureau of Statistics y US Bureau of Labor Statistics, es el índice de Tornqvist el cual es definido como:

$$Y_T(p^0, p^1, y^0, y^1) = \prod_{i=1}^m \left( \frac{y_i^1}{y_i^0} \right)^{0.5(s_i^0 + s_i^1)}$$

<sup>16</sup> Existe un problema a la hora de obtener la PTF, como lo señalan los autores Mawson, Carlaw y McLellan (2003):

“After obtaining an output and input quantity indexes the calculation of a TFP index is straightforward. From this TFP index productivity growth rates can be easily calculated. The difficulty is in determining what type of index to use and then obtaining the necessary price and quantity data to construct them. To construct an output (input) quantity index it is necessary to determine an appropriate way to aggregate the different outputs (inputs) produced in an economy.”

<sup>17</sup> El problema con la formulación del índice Divisia es que estadísticamente no se tienen los datos de todo el tiempo, solo se tienen datos de un momento determinado del tiempo, por lo cual es que se han desarrollado otro tipo de índices, donde no se considera de forma continua, más bien toman al tiempo de forma discreta.



Los números índices que más se han empleado para la agregación de cantidades heterogéneas de insumos y productos, son los índices de Laspeyres, Paasche y Fisher. Estos tipos de índices consideran el tiempo de forma discreta y no continua como el índice Divisia. El primero consiste en una media aritmética que utiliza como ponderaciones el periodo base; el segundo índice utilizado consiste en una media aritmética de índices simples, que utiliza como coeficientes de ponderación el periodo actual; por último el índice de Fisher es una media geométrica de los dos índices anteriores mencionados. Para el cálculo de la PTF además del uso de índices de cantidades, se necesitan índices de precios tanto de insumos como de productos. De hecho los índices de Laspeyres, Paasche y Fisher son muy similares a los utilizados para agregar cantidades, pero revirtiendo el papel de las cantidades y los precios en cada una de las formulaciones.

Los índices de precios son la contraparte de un índice de cantidades, siempre y cuando se cumpla la llamada regla del producto. Esta regla consiste en que la multiplicación de índice de cantidad por el índice de precios, en el caso de los insumos, resulte igual al índice de crecimiento de los costos totales y, en el caso de los productos, resulte igual al índice de crecimiento de los ingresos totales percibidos por la empresa. Para que se cumpla la regla del producto, por lo general la contra parte de los índices de cantidades y de precios no pueden ser del mismo tipo, esto quiere decir que si el índice de precios es del tipo Paasche, entonces el índice de cantidad debe de ser del tipo Laspeyres, por el contrario, si el índice de cantidades es del tipo Paasche, entonces el índice de precios debe de ser del tipo Laspeyres, y si los índices de cantidades son del tipo Fisher, el de precios también debe de ser del tipo Fisher. El índice ideal de Fisher como vemos es la excepción, ya que cumple la regla del producto aunque los índices de cantidades y de precios son Fisher.

Existe otro índice que se ha utilizado para el cálculo de la medición de la PTF, este se conoce como índice de cantidades de Tornqvist o índice translogaritmico, el cual se expresa en términos logarítmicos, y cuyas ponderaciones constituyen el promedio de las ponderaciones de dos años consecutivos, suele considerarse como la versión del índice Divisia que se aproxima a tiempo discreto (Jorgenson y Griliches, 1967). En términos empíricos y estadísticos, la aplicación de este índice proporcionara resultados muy

similares a los obtenidos con el índice de Fisher. Se recomienda el uso del primero por la facilidad de obtención de la información, ya que sus resultados se aproximan a los que se obtienen al aplicar el índice de Fisher. Existe otro tipo de números índice los cuales son considerados como número índice superlativos, ya que este tipo de números índice permiten acceder a funciones de producción doblemente diferenciables, de carácter homogéneo y lineal. Este tipo de índice existirá siempre y cuando se mantengan los supuestos optimizadores en el comportamiento del productor, y además, la tecnología pueda ser representada por una función de producción cuadrática. En el siguiente párrafo se desarrollara este índice superlativo, y se señalara otro índice, en el cual no se necesita hacer ningún supuesto acerca del comportamiento optimizador del productor, ni de un mercado competitivo.

A continuación se presentan algunos de los números índice que se han propuesto para medir la PTF.

### **3.2.1. El índice multilateral de productividad translog propuesto por Caves, Christensen, y Diewert (1982) (CCD)**

Se asume que las observaciones de dos países cuales sea tiene una función translogaritmica. Una comparación de productividad entre k y l, puede ser basada entre k y l o algún promedio de ellas. En el ejemplo que proponen Caves, Christensen, y Diewert (1982), consideran primero usar a k como base de comparación. Se defina la productividad de k relativa a l como la disminución mínima proporcional ( $\lambda_k$ ) en todos los elementos de  $Y^k$  tal que el resultado del vector de producción es producido con los niveles de insumo de k y la productividad de l. Así  $\lambda_k$  es la solución de la siguiente ecuación:

$$F(\ln(Y^k/\lambda_k), \ln X^k, l) = 0 \quad (25)$$

La cual es equivalente a:

$$F(\ln Y^l, \ln X^l, l) - F[(\ln(Y^k/\lambda_k)), \ln X^k, l] = 0 \quad (26)$$

Aplicando la identidad cuadrática de Diewert (IC)<sup>18</sup> a la ecuación anterior junto con  $\sum_i^l F_i = -I$  y  $F_i[\ln(Y^k/\delta_k), \ln X^l, l] = F_i(\ln Y^k, \ln X^l, l)$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \ln \lambda_k = & -\frac{1}{2} \sum_i [F_i(\ln Y^l, \ln X^l, l) + F_i(\ln Y^k, \ln X^k, l)] \ln(Y_i^k/Y_i^l) \\ & -\frac{1}{2} \sum_n [F_n(\ln Y^l, \ln X^l, l) + F_n(\ln Y^k, \ln X^k, l)] \ln(X_n^k/X_n^l) \end{aligned} \quad (27)$$

Donde  $F_i(F_n)$  son las derivadas parciales de F con respecto a los logaritmos individuales de producto (insumo) de ambos países.

Ahora se considera al país I como la base de comparación. En este caso se define la productividad de k relativa a la de I como el incremento máximo proporcional ( $\lambda_l$ ) en todos los elementos de  $Y^l$  tal que el resultado del vector de producto es producido con los niveles de insumo de I y el nivel de productividad de k. Así  $\lambda_l$  es la solución de la siguiente ecuación:

$$F(\ln \lambda_l Y^l, \ln X^l, k) = 0 \quad (28)$$

Restando  $F(\ln Y^k, \ln X^k, k)$  de ambos lados de la ecuación previa y aplicando IC obtenemos:

$$\begin{aligned} \ln \lambda_l = & -\frac{1}{2} \sum_i [F_i(\ln Y^l, \ln X^l, k) + F_i(\ln Y^k, \ln X^k, k)] \ln(Y_i^k/Y_i^l) \\ & -\frac{1}{2} \sum_n [F_n(\ln Y^l, \ln X^l, k) + F_n(\ln Y^k, \ln X^k, k)] \ln(X_n^k/X_n^l) \end{aligned} \quad (29)$$

Se tiene dos definiciones alternativas de la productividad del país k relativa a la productividad del país I. En la primera k es tratado como el país base, y en el otro caso I esta tratado como el país base. Una definición invariante natural del país base de la

---

<sup>18</sup> Para ver de una forma detallada del método del IC, se encuentra en el trabajo de Diewert (1976), en Caves, Christensen, y Diewert (1982), se señala de manera rápida el método, pero no se desarrolla todo el método.

productividad relativa de k y l es una media geométrica de  $\lambda_k$  y  $\lambda_l$ , que se denota como  $\lambda_{kl}$ :

$$\ln\lambda_{kl} = (\ln\lambda_k + \ln\lambda_l)/2 \quad (30)$$

Esta ecuación puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \ln\lambda_l = & -\frac{1}{2} \sum_i [F_i(\ln Y^l, \ln X^l, l) + F_i(\ln Y^k, \ln X^k, k)] \ln(Y_i^k/Y_i^l) \quad (31) \\ & -\frac{1}{2} \sum_n [F_n(\ln Y^l, \ln X^l, l) + F_n(\ln Y^k, \ln X^k, k)] \ln(X_n^k/X_n^l) \\ & -\frac{1}{4} [F_i(\ln Y^k, \ln X^k, l) - F_i(\ln Y^l, \ln X^l, l)] \\ & + F_i(\ln Y^l, \ln X^l, k) - F_i(\ln Y^k, \ln X^k, k) \ln(Y_i^k/Y_i^l) \\ & -\frac{1}{4} [F_n(\ln Y^k, \ln X^k, l) - F_n(\ln Y^l, \ln X^l, l) + F_n(\ln Y^l, \ln X^l, k)] \\ & - F_n(\ln Y^k, \ln X^k, k) \ln(X_n^k/X_n^l) \end{aligned}$$

Al obtener las derivadas de  $F_i$  y  $F_n$ , es sencillo verificar que la expresión de la tercera y cuarta línea de la ecuación (31) es igual a cero, como en la expresión de la quinta y sexta línea.

Si las entidades económicas minimizan costos de los niveles de producto y los precios de los insumo, y maximizan los beneficios sobre los niveles de insumo y el precio del producto entonces  $F_i$  es igual a la negativa de la participación de los beneficios  $R_i$ , y  $F_n$  son iguales a la participación de los costos  $W_n$ . Entonces se puede reescribir la ecuación (31) como:

$$\ln\lambda_{kl} = \frac{1}{2} \sum_i (R_i^k + R_i^l) \ln(Y_i^k/Y_i^l) - \frac{1}{2} \sum_n (W_n^k + W_n^l) \ln(X_n^k/X_n^l) \quad (32)$$

Este es el índice de productividad bilateral translog propuesto por Christensen y Jorgenson (1970). Este índice es atractivo para hacer una comparación binaria invariante de productividad de un país base, pero esta comparación binaria no satisface los

requerimientos de circularidad  $\ln\lambda_{kl} \neq \lambda_{km} - \lambda_{ln}$ . Se extiendes la definicion para permitir que el índice bilateral de compracion de la productividad pueda obtener una comparación transitiva de productividad multilateral. Procediendo como se hizo arriba, se define que la productividad del país k es relativa a la productividad de todos los S países como una media geométrica de una comparación bilateral de productividades entre k y cada uno de los S países:

$$\overline{\ln\lambda_k} = \frac{1}{S} \sum_s^S \ln\lambda_{ks} \quad (33)$$

Sustituyendo el índice bilateral de productividad en la ecuación (33) obtenemos:

$$\begin{aligned} \overline{\ln\lambda_k} = & \frac{1}{2} \sum_i (R_i^k + \bar{R}_i) (\ln Y_i^k - \overline{\ln Y_i}) - \sum_n (W_n^k + \bar{W}_n) (\ln X_n^k - \overline{\ln X_n}) \\ & + \sum_i (\bar{R}_i \overline{\ln Y_i} - \bar{R}_i \ln Y_i) - \sum_n (\bar{W}_n \overline{\ln X_n} + \bar{W}_n \ln X_n) \end{aligned} \quad (34)$$

Finalmente el índice multilateral de productividad translog,  $\ln\lambda_{kl}^*$  es definido como:

$$\begin{aligned} \ln\lambda_{kl}^* = & \overline{\ln\lambda_k} - \overline{\ln\lambda_l} \\ = & \frac{1}{2} \sum_i (R_i^k + \bar{R}_i) (\ln Y_i^k - \overline{\ln Y_i}) - \frac{1}{2} \sum_i (R_i^l + \bar{R}_i) (\ln Y_i^l - \overline{\ln Y_i}) \\ & - \frac{1}{2} \sum_n (W_n^k + \bar{W}_n) (\ln X_n^k - \overline{\ln X_n}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_n (W_n^l + \bar{W}_n) (\ln X_n^l - \overline{\ln X_n}) \end{aligned} \quad (35)$$

Este índice de productividad multilateral es transitivo:

$$\ln\lambda_{kl}^* = \ln\lambda_{km}^* - \ln\lambda_{lm}^* \quad (36)$$

Se reduce a un índice bilateral de productividad translog cuando S es igual a 2. Un enfoque alternativo que permite comprar cada país directamente con un país hipotéticamente representativo (h), que tiene un vector de producto  $\overline{\ln Y_i}$ , un vector de

insumos  $\overline{\ln X_n}$ , una participación de los beneficios  $\overline{R_i}$  y una participación de costos  $\overline{W_n}$ , se obtendrá la siguiente expresión:

$$\ln \lambda_{kn} = \frac{1}{2} \sum_i (R_i^k + \overline{R_i}) (\ln Y_i^k - \overline{\ln Y_i}) - \frac{1}{2} \sum_n (W_n^k + \overline{W_n}) (\ln X_n^k - \overline{\ln X_n}) \quad (37)$$

### 3.2.2. Número índice EHL

En el trabajo realizado por Hernández L. Enrique (2007) (de aquí en adelante EHL) nos presenta la elaboración de un índice, con el cual podemos medir la PTF. Los resultados obtenidos por el índice propuesto por el autor, llegan a ser muy similares a los que se obtienen al aplicar el índice multifactorial de productividad translog que desarrollamos previamente. A continuación se desarrolla el índice que propone EHL.

Partimos del hecho de que en cualquier periodo "0" el valor de los ingresos totales generados por la producción del producto "i" ( $Y_i$ ) deben ser iguales al valor total de costos incurridos  $\sum_{j=1, \dots, m} X_{ij}^0$ , esto es, el valor de la compensación a los "m" factores de producción, incluyendo las ganancias extraordinarias de las empresas.

$$Y_i^0 = \sum_{j=1, \dots, m} X_{ij}^0 \quad (38)$$

Al descomponer tanto el producto como los insumos en su componente de precio y cantidad se tiene:

$$P_i^0 y_i^0 = \sum_{j=1, \dots, m} w_{ij}^0 x_{ij}^0 \quad (39)$$

Definimos índices parciales de requerimientos de insumos por unidad de producción, es decir, índices inversos de la productividad parcial de cada uno de los insumos:

$$H_{ij}^0 = x_{ij}^0 / y_i^0 \quad (40)$$

Y los introducimos en la igualdad anterior, con lo que se tiene una especificación del precio del producto "i" en el año "0":

$$P_i^0 = \sum_{j=1, \dots, m} w_{ij}^0 H_{ij}^0 \quad (41)$$

Valuamos la producción de un periodo subsiguiente, digamos "1" a los precios del año "0" y se obtiene:

$$y_i^0 P_i^0 = y_i^1 \left[ \sum_{j=1, \dots, m} w_{ij}^0 H_{ij}^0 \right] \quad (42)$$

Ahora dividimos por el valor del producto "i" en el periodo "0" en ambos lados de la igualdad anterior y se tiene:

$$\left[ \frac{(y_i^1 P_i^0)}{(y_i^0 P_i^0)} \right] = \sum_{j=1, \dots, m} \left[ \frac{(y_i^1 w_{ij}^0 H_{ij}^0)}{(y_i^0 P_i^0)} \right] \quad (43)$$

Ahora bien, dado que:  $y_i^1 = \frac{x_{ij}^1}{H_{ij}^1}$  se sigue que:

$$\left[ \frac{(y_i^1 P_i^0)}{(y_i^0 P_i^0)} \right] = \sum_{j=1, \dots, m} \left[ \frac{(x_{ij}^1 w_{ij}^0)(H_{ij}^0/H_{ij}^1)}{(y_i^0 P_i^0)} \right] \quad (44)$$

Al multiplicar y dividir por  $x_{ij}^0$  se tiene:

$$\left[ \frac{(y_i^1 P_i^0)}{(y_i^0 P_i^0)} \right] = \sum_{j=1, \dots, m} \left[ \frac{(w_{ij}^0 x_{ij}^0)}{(y_i^0 P_i^0)} \right] \left[ \frac{(x_{ij}^1/x_{ij}^0)(H_{ij}^0/H_{ij}^1)}{1} \right] \quad (45)$$

Para simplificar la notación definimos:  $\alpha_{ij}^0 = \frac{(w_{ij}^0 x_{ij}^0)}{(y_i^0 P_i^0)}$  en donde  $\alpha_{ij}^0$  mide la participación del valor del insumo "j" en el valor del producto "i" en el año "0". De manera paralela definimos:  $\pi_{ij} = H_{ij}^0/H_{ij}^1$  que muestra el crecimiento de la productividad parcial del insumo "j" en la producción del producto "i" entre el periodo "0" y el periodo "1" respectivamente.<sup>41</sup> De lo anterior se sigue que la última expresión puede escribirse como:

$$\left[ \frac{(y_i^1 P_i^0)}{(y_i^0 P_i^0)} \right] = \sum_{j=1, \dots, m} (\alpha_{ij}^0 \pi_{ij}) (x_{ij}^1 / x_{ij}^0) \quad (46)$$

Al agregar todos los productos "i" ( $i = 1, \dots, n$ ) de la industria o economía se tiene

$$\sum_{i=1, \dots, n} \left[ \frac{(y_i^1 P_i^0)}{(y_i^0 P_i^0)} \right] = \sum_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1, \dots, m} [\alpha_{ij}^0 \pi_{ij} (x_{ij}^1 / x_{ij}^0)] \quad (47)$$

Puede demostrarse que, de manera *ex post*, es posible estimar un promedio ponderado de los escalares  $\pi_{ij}$  para la totalidad de los productos y los insumos, que denominaremos  $\pi^*$ . En el cálculo de  $\pi^*$  las ponderaciones están dadas por la importancia de cada insumo "j" ( $j=1 \dots m$ ) en la elaboración de cada producto y, a la vez, están ponderados por la importancia de cada producto "i" ( $i=1 \dots n$ ) en el valor de la totalidad de producto. De esta manera, la última igualdad puede expresarse como:

$$\sum_{i=1, \dots, n} \left[ \frac{(y_i^1 P_i^0)}{(y_i^0 P_i^0)} \right] = \pi^* \left[ \sum_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1, \dots, m} \{ \alpha_{ij}^0 (x_{ij}^1 / x_{ij}^0) \} \right] \quad (48)$$

El lado izquierdo de la igualdad anterior representa, en esencia, un índice Laspeyres de cantidad del crecimiento del conjunto de los productos ( $L_y$ ) y la última parte del lado derecho expresa un índice de cantidad del crecimiento del conjunto de los insumos ( $L_x$ ) en donde cada uno de los insumos esta ponderado por su respectiva participación en el valor de cada producto en el año base. Por lo tanto, esa igualdad puede expresarse como:

$$L_y = \pi^* L_x \quad (49)$$

Y, por lo mismo, se llega a la siguiente expresión:

$$\pi^* = L_y / L_x \quad (50)$$

En donde  $\pi^*$  expresa un índice de la productividad conjunta de los "m" factores productivos considerados en los análisis, utilizados en la generación de los "n" productos procesados en la industria (economía), y su cuantificación se define como el cociente de dos índices de cantidades de tipo Laspeyres: uno de productos dividido por otro de insumos múltiples. En las agregaciones se utilizan las "participaciones factoriales"  $\alpha_{ij}^0$ , las



cuales no están sujetas a los supuestos económicos tradicionales de comportamiento optimizador por parte de los productores, y tampoco es necesario que en la formulación tenga que suponerse la existencia de rendimientos constantes a escala.

Sabemos las limitaciones a que están sujetos los índices de Laspeyres de cantidades, en el sentido en que, al mantener constante el año base de comparación, se incurre en un sesgo de sustitución conforme avanza el tiempo, considerando con mayor importancia los productos y los insumos que crecen relativamente menos rápido, y restando importancia relativa a los que crecen más aceleradamente. Una forma de atenuar ese sesgo es por medio del encadenamiento de los índices, lo que no es más que cambiar cada año la base de estimación, en cuyo caso el período "0" se convierte en el "t - 1" y el "1" se convierte en el período "t" a lo largo de toda la serie. Pero el sesgo puede eliminarse totalmente si, en lugar de valuar el producto del año "t" a los precios del periodo "t-1" se valúa el producto del año "t - 1" a los precios del período "t" en la tercera igualdad desarrollada anteriormente. En ese caso, se llega a una formulación de la productividad multifactorial similar, pero con base en índices de cantidades del tipo Paasche ( $P_y$  y  $P_x$ ). Se tienen, entonces, para cada par de años sucesivos, dos valores del índice de la productividad, el primero basado en índices de cantidades de Laspeyres ( $\pi^*$ ) y el segundo basado en índices de cantidades de Paasche ( $\pi^+$ ), es decir:

$$\pi^* = L_y/L_x \quad (51)$$

$$\pi^+ = P_y/P_x \quad (52)$$

Puede entonces, sin perder generalidad el argumento, optarse por el promedio geométrico de ambos índices, lo que generará un índice de productividad multifactorial del tipo (Ideal) de Fisher ( $\pi^f$ ), como resultado del cociente de dos índices de Fisher de cantidades, uno de productos ( $F_y$ ) y el otro de insumos ( $F_x$ ):

$$\pi^f = F_y/F_x \quad (53)$$

En donde:

$$F_y = [L_y P_y]^{1/2} \quad (54)$$

$$F_x = [L_x P_x]^{1/2} \quad (55)$$

Esta sería una formulación insesgada (estadísticamente) de la productividad multifactorial, toda vez que como se vio más arriba, es el índice (Ideal) de Fisher el que mejor cumple con los requisitos postulados por el método *axiomático* de selección de números índices.

Aún más, dado que en términos empíricos el índice de Fisher de cantidades puede aproximarse muy cercanamente por medio de un índice de cantidades de Törnqvist (Diewert y Lawrence, 1999; Diewert y Nakamura, 2003), y dada la relativa facilidad de cómputo de este último tipo de índice, podría ser recomendable llevar a cabo tal aproximación, en cuyo caso se tendría:

$$\pi^f \approx \pi^t = [T_y/T_x] \quad (56)$$

Es decir, la productividad multifactorial se aproximaría por el cociente de dos índices de Törnqvist: uno de productos ( $T_y$ ) entre otro de insumos ( $T_x$ ).

Por último, vale hacer notar que toda la discusión anterior continúa siendo válida si el planteamiento se realiza, no como medición de la productividad multifactorial a lo largo del tiempo en un solo país, sino como medición de los *niveles* comparativos de productividad multifactorial entre dos o más países en un momento dado.

El calcular la PTF utilizando el enfoque de números índice, requiere una decisión respecto a la formulación del tipo de índice que se usara para la construcción de la cantidad de producto y de insumo. Existen dos enfoque en los cuales se pueden escoger entre diferentes formulaciones de números índice, estos son los enfoques económicos y los axiomáticos.

El utilizar el enfoque axiomático involucra el comprar las propiedades de diferentes formulaciones de números índice con un número deseable de propiedades matemáticas. El índice que pase la mayor cantidad de pruebas, será el preferido para ser utilizado bajo el enfoque axiomático Diewert, y Lawrence (1999) utilizan en enfoque axiomático para

determinar que formulación de número índice se puede usar, los axiomas importantes que deben de cumplir los números índice (o propiedades deseables) son:

- Prueba de cantidades constantes: si las cantidades son las mismas en los dos periodos, entonces el índice de producto debe de ser el mismo en ambos periodos independientemente del precio de los bienes en ambos periodos.
- Prueba de base constante: si los precios son constantes sobre dos periodos, entonces el nivel de producción en el periodo 1 comparado con el del periodo 0 es igual al valor del producto en el periodo 1 dividido por el valor del producto en el periodo 0.
- Prueba de incrementos proporcionales en cantidades: si todas las cantidades en el periodo  $t$  son multiplicadas por un factor común, por ejemplo  $\lambda$ , entonces el índice de cantidad en el periodo  $t$  comparado con el periodo 0 debería incrementar también en  $\lambda$ .
- Prueba de inversión de tiempo: si los precios y las cantidades en el periodo cero y  $t$  son intercambiadas, entonces el resultado del índice de producción debería de ser recíproco del índice original.

En el trabajo de Diewert, y Lawrence (1999), señalan que las cuatro propiedades para los números índice mencionados previamente, solamente las cumple el índice ideal de Fisher el cual presenta las cuatro propiedades. Mientras que tanto el índice de Laspeyres y Paasche son inconsistentes con la prueba de inversión de tiempo.

Como hemos señalado el enfoque axiomático para la elección de un número índice adecuado para la medición de la PTF, se centra en pruebas matemáticas las cuales deben de satisfacer dicho índice elegido. El utilizar el enfoque económico para la elección de números índices apropiados, se centra desde el punto de vista de la teoría económica, por lo que invoca criterios para la elección de números índices más pertinentes. Esta elección considera supuestos acerca del comportamiento de los productores, así como criterios acerca de la forma que supuestamente debe asumir la tecnología. Los agentes económicos (productores) son racionales, ya que buscan maximizar sus beneficios bajo la

restricción de la técnica; son tomadores de precios; y el mercado es perfectamente competitivo. El índice más utilizado cuando se aplica el enfoque económico son los índices superlativos. Ya que satisfacen estos criterios y supuestos económicos, además de que cumplen con las propiedades del enfoque axiomático.

### **3.3. Enfoque función distancia**

El primero en introducir el marco teórico para estudiar y medir la ineficiencia fue Farrell (1957). Él propuso que la eficiencia debe ser observada desde una perspectiva real y no ideal, donde cada unidad productiva debe ser evaluada con relación a otras unidades tomadas de un grupo representativo y homogéneo. En su trabajo la eficiencia puede ser considerada como el producto de dos términos: eficiencia técnica y asignativa. La primera se logra si la empresa opera en cualquiera de los puntos de la frontera de producción, es decir, si dada la utilización de insumos la empresa es capaz de generar la máxima producción que es técnicamente eficientemente posible, dada la tecnología utilizada; el segundo término utilizado, consiste en los productos generados y los insumos utilizados minimizan los costos con los que opera la empresa en la producción de ese volumen de producto, esto quiere decir que los insumos será eficientemente asignados.

La idea planteada por Farrell ha podido desarrollarse a partir de dos metodologías: la estimación de frontera estocástica (técnica paramétrica) y el DEA (Data Envelopment Analysis o Análisis Envoltante de datos, es una técnica no paramétrica). La primera implica el uso de la econometría, mientras que la segunda recurre a los algoritmos de programación lineal. En nuestra investigación se utilizará la segunda metodología para calcular el índice de productividad de Malmquist (el cual mida el crecimiento de la PFT)<sup>19</sup>.

El enfoque del DEA es un método no paramétrico que usa la programación lineal para determinar la eficiencia relativa de las unidades tomadoras de decisión (Decision Making Units DMU). En el enfoque del DEA, una DMU es una entidad, una persona, una firma o

---

<sup>19</sup> La función distancia es introducido en el análisis del consumidor por Malmquist en (1953) y Shepard (1953) lo introduce la idea de función distancia en el análisis de la producción. Caves, Christensen and Diewert (1982) introducen la idea del índice de Malmquist en la literatura de la productividad, donde muestran que es equivalente al índice de Törnqvist bajo ciertas condiciones.

una economía que tiene inputs y produce outputs. El modelo del DEA asegura funciones similares por todas las DMU en la muestra para poder especificar los mismo inputs y outputs para cada DMU en la muestra. En un análisis DEA se realizan dos procesos simultáneamente mediante el uso de algoritmos de programación lineal: la obtención de la frontera eficiente y la estimación de la ineficiencia. La obtención de la frontera eficiente se calcula maximizando el output dado el nivel de inputs si se utiliza orientación output y minimizando el input dado el nivel de outputs si se utiliza orientación input (Quindós, Rubiera y Vicente; 2003).

A continuación presentaremos los modelos para el cálculo de la frontera eficiente:

### 3.3.1. Modelo input – orientated (CCR)

Específicamente, la  $DMU_j$  consume una cantidad  $x_{ij}$  de input  $i$  y produce una cantidad  $y_{rj}$  de producto  $r$ . Se asume que  $x_{ij} \geq 0$  y  $y_{rj} \geq 0$ , y además se asume que DMU tiene al menos un valor positivo de input y al menos un valor positivo de output, como habíamos señalado antes.

La forma de relación de output a input es usada como una medida de eficiencia de la  $DMU_j = DMU_o$  pára que las proporciones relativas sean evaluadas para todas las  $DMU_j$  donde  $j = 1, 2, \dots, n$ . se puede interpretar el modelo CCR como la construcción de reducción de un simple caso de múltiples – outputs / múltiples inputs para cada DMU a la de una solo output virtual y un input virtual. Para una DMU en particular la relación de un output virtual y un solo input – virtual proporcionara una medida de eficiencia que será una función de los multiplicadores. La función objetivo para una DMU en particular para ser evaluada será:

$$\max h_o(u, v) = \frac{\sum_r u_r y_{r0}}{\sum_i v_i x_{i0}} \quad (57)$$

Donde las variables serán  $u_r$  y  $v_i$ , mientras que  $y_{r0}$  y  $x_{i0}$  son los valores observados de output e input respectivamente, de la  $DMU_o$ .

Un conjunto de restricciones normalizadas (uno para cada DMU) reflejaran la condición de relación del output virtual y el input virtual para todas las DMU, incluyendo  $DMU_j =$

$DMU_o$  el cual debe ser menor o igual a la unidad. El problema de programación matemática quedaría escrito de la siguiente manera:

$$\max h_o(u, v) = \frac{\sum_r u_r y_{r0}}{\sum_i v_i x_{i0}}$$

Sujeto a: (58)

$$\frac{\sum_r u_r y_{rj}}{\sum_i v_i x_{ij}} \leq 1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$u_r v_i \geq 0 \quad \forall i \text{ y } r$$

Se hace la observación que a graves de un desarrollo complejo se puede remplazar los valores  $u_r v_i \geq 0$  con los siguientes valores:

$$\frac{u_r}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}}, \frac{u_r}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}} \geq \varepsilon > 0 \quad (59)$$

Dónde:

$\varepsilon$  Es un elemento de distinto Archimedean menor que cualquier número real positivo. Para tener una explicación más detallada sobre este punto se recomienda ver el trabajo de Arnold et al. (1998). La condición anterior garantizara que los valores que se obtengan de la solución sean positivos.

Las relaciones obtenidas anteriormente van a generar un número infinito de soluciones, lo cual genera un problema en la obtención de los valores exactos. Sin embargo en el trabajo de Charnes and Cooper (1962) dan respuesta a este problema, desarrollando una transformación para obtener una solución<sup>20</sup> representativa en programación lineal fraccional y obtener su equivalente en el problema de programación lineal donde hay un cambio de variables de  $(u, v)$  a  $(\mu, \nu)$  esto resulta en la siguiente transformación:

$$\mu_r = \frac{u_r}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}} \quad (60)$$

$$v_i = \frac{v_r}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0}} \quad (61)$$

<sup>20</sup> La solución de  $(u, v)$  para que  $\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1$

$$\max Z = \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro}$$

Sujeto a: (62)

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1$$

$$\mu_r v_i \geq 0$$

Para que el problema dual de programación lineal sea:

$$\theta^* = \min \theta$$

Sujeto a: (63)

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \theta x_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{r0} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

El último modelo a veces referido a él como el modelo de Farrell. En la literatura del DEA la parte correspondiente a la economía se asume muy seguido que hay una fuerte disposición libre porque se asigna un coeficiente diferente de cero a cada variable de holgura como parte de la medida de eficiencia y por lo tanto se omite esa baja actividad en el objetivo. A esto Farrell lo define con el nombre de eficiencia débil.

Para solucionar este problema de variables de holgura que tienen valores diferentes de cero se propone un segundo paso para el problema de programación lineal. Se puede resolver el sistema (63) para obtener un resultado eficiente. Esto resulta porque se le puede asignar que  $\theta = 1$  y  $\lambda_k^* = \lambda_o^*$  y todos los otros  $\lambda_j^* = 0$  por lo cual siempre existirá

una solución para (63). Esto implicara que  $\theta^* \leq 1$ . La solución óptima,  $\theta^*$ , dará un resultado eficiente para cada DMU. Este proceso es repetitivo para cada  $DMU_j$ . Las DMU con valores  $\theta^* < 1$  serán ineficientes, mientras que las DMU con valores  $\theta^* = 1$  serán puntos eficiente, por lo que estarán sobre la frontera eficiente. Algunos puntos sobre la frontera pueden tener eficiencia débil, porque se tiene variables de holgura diferentes de cero, para poder evitar este problema se presenta el siguiente programa lineal donde las variables de holgura tomaran sus valores máximos.

$$\max \sum_{i=1}^m S_i^- + \sum_{r=1}^s S_r^+$$

Sujeto a: (64)

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + S_i^- = \theta^* x_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - S_r^+ = y_{r0} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda_j, S_i^-, S_r^+ \geq 0 \quad \forall i, j, r$$

Se hace notar que las variables  $S_i^-$  y  $S_r^+$ , no afecta el valor optimo  $\theta^*$  que se obtuve en (63)

Cabe señalar que el problema desarrollado anteriormente se puede resolver como se había mencionado siguiendo un problema en dos pasos.

$$\min \theta - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m S_i^- + \sum_{r=1}^s S_r^+ \right)$$

Sujeto a: (65)

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + S_i^- = \theta x_{i0} \quad i = 1, 2, \dots, m$$



$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - S_r^+ = y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda_j, S_i^-, S_r^+ \geq 0 \quad \forall i, j, r$$

Donde las variables de holgura  $S_i^-$  y  $S_r^+$  serán usadas para convertir las diferencias obtenidas en (63) en ecuaciones equivalentes. En este problema  $\theta$  ya no es una variable, este es un valor obtenido como resultado en el primer paso.

Con lo desarrollado anteriormente se pueden desprender dos conceptos de eficiencia, los cuales son:

Eficiencia del DEA. El desempeño de una DMU, es totalmente eficiente si y solo si  $\theta^* = 1$  y  $S_i^{-*} = S_r^{+*} = 0$ <sup>21</sup>

Eficiencia débil del DEA. El desempeño de una DMU es eficientemente débil si y solo si  $\theta^* = 1$  y  $S_i^{-*} \neq 0$  y/o  $S_r^{+*} \neq 0$  para algún  $i$  y  $r$  en algún óptimo alternativo.

### 3.3.2. Modelo output – orientated (CCR)

Se presentó en el apartado anterior el modelo input – orientated, ahora presentaremos el modelo output – orientated. Iniciaremos con el lado del output y se considerara en lugar del input virtual un output virtual. El problema quedara de la siguiente forma, en lugar de maximizar como en el input, lo que se hará a continuación será minimizar:

$$\min \frac{\sum_i v_i x_{io}}{\sum_r u_r y_{ro}}$$

Sujeto a: (66)

---

<sup>21</sup> William Cooper; L. Seiford; and Joe Zhu, *op. cit.*

$$\frac{\sum_i v_i x_{ij}}{\sum_r u_r y_{rj}} \geq 1 \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

$$u_r, v_i \geq \epsilon > 0 \quad \text{para todo } i \text{ y } r.$$

De nuevo se utilizara la transformación realizada por Charnes and Cooper (1962) para el modelo lineal de programación fraccional (modelo de multiplicadores), para después obtener el asociado con el problema dual, lo anterior quedare expresado de la siguiente forma:

$$\min q = \sum_{i=1}^m v_i x_{io}$$

Sujeto a:

(67)

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} \geq 0$$

$$\sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} = 1$$

$$\mu_r, v_i \geq \epsilon \quad \forall r, i$$

$$\max \emptyset + \epsilon \left( \sum_{i=1}^m S_i^- + \sum_{r=1}^s S_r^+ \right)$$

Sujeto a:

(68)

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + S_i^- = x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - S_r^+ = \emptyset y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Como podemos observar el modelo (68) es calculado en dos pasos: primero se calcula  $\phi^*$  ignorando las holguras. Después se optimizarán estas holguras manteniendo fijo  $\phi^*$  en el siguiente problema de programación lineal:

$$\max \sum_{i=1}^m S_i^- + \sum_{r=1}^s S_r^+$$

Sujeto a: (69)

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + S_i^- = x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - S_r^+ = \phi^* y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Con esto se puede modificar las definiciones de eficiencia del DEA (input – orientated) para darles un significado tomando en cuenta el modelo output – orientated:

Una DMU es eficiente si y solo si  $\phi^* = 1$  y  $S_i^- = S_r^+ = 0$  para toda  $i$  y  $r$ . Una DMU será eficientemente débil si  $\phi^* = 1$  y  $S_i^- \neq 0$  y/o  $S_r^+ \neq 0$  para algún  $i$  y  $r$  en algún óptimo alternativo.

Los modelos del DEA presentados con anterioridad pueden ser utilizados para ser representados como los el modelo BCC que fue elaborado por Banker, Charnes and Cooper (1984). A este modelo BBC se le va adjuntar una restricción la cual será  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$  además de que se agrega una variable, esta indicara que tipo de rendimientos a escala (constantes, crecientes y decrecientes) se pueden presentar en el modelo, esta es la principal diferencia entre el modelo CCR y BCC. También se puede referir al modelo BCC como modelo VRS (Variable Returns to scale) y al modelo CCR también se le conoce como CRS (Constant Returns to Scale).

El cálculo del índice de Malmquist para el crecimiento de la PTF usando el DEA será construido de la siguiente manera:

El índice permite medir el crecimiento de la productividad entre dos periodos  $t$  y  $t+1$  utilizando para ello datos de output e input de cada individuo (en nuestro caso de países). El procedimiento se basa en el cálculo de la distancia que separa a cada individuo de la tecnología de referencia en cada periodo utilizando para ello la función distancia que puede expresarse como:

$$D_0^t(x^t, y^t) = \inf\{v^{t,t}: (x^t, y^t/v^{t,t}) \in F^t\} = [\sup\{v^{t,t}: (x^t, v^{t,t}y^t) \in F^t\}]^{-1} \quad (70)$$

Esta función puede definirse como la inversa de la máxima expansión a la que es preciso someter el vector de outputs del periodo  $t$  ( $y^t$ ), dado el nivel de inputs ( $x^t$ ), para dicho individuo ( $x^t, y^t$ ) sea eficiente y se encuentre por tanto sobre la frontera del periodo  $t$ . Esta sería la función distancia para un solo periodo, ya que compara observaciones de un periodo con la tecnología del mismo periodo. No obstante, el índice de Malmquist requiere definir funciones distancia con respecto a tecnología de periodos diferentes por lo que será necesario definir las siguientes funciones:

$$D_0^{t+1}(x_j^{t+1}, y_j^{t+1}), D_0^t(x_j^{t+1}, y_j^{t+1}) \text{ y } D_0^{t+1}(x_j^t, y_j^t) \quad (71)$$

Tomando en cuenta lo anterior el índice de Malmquist de productividad para analizar el cambio en la PTF entre el periodo  $t$  y  $t+1$  se define como:

$$M_0(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{D_0^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_0^t(x^t, y^t)} \left[ \left( \frac{D_0^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{D_0^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \right) \left( \frac{D_0^t(x^t, y^t)}{D_0^{t+1}(x^t, y^t)} \right) \right]^{1/2} \quad (72)$$

La expresión anterior muestra como el crecimiento en la PTF, representado por  $M_0$ , se puede expresar como el producto de dos componentes, el efecto del cambio en eficiencia relativa (movimientos hacia la frontera de producción) entre los periodos  $t$  y  $t+1$ , que está representado por la primer proporción, y el cambio tecnológico (desplazamientos de la frontera) entre los periodos  $t$  y  $t+1$ , el cual es la media geométrica dentro los corchetes.

### 3.4. Enfoque econométrico

El enfoque econométrico para la medición de la productividad involucra la estimación de parámetros de una función específica. En muchas ocasiones la función de producción es expresada en tasas de crecimiento, y después es estimada para obtener unas estimaciones de los parámetros que reflejen el crecimiento en el progreso tecnológico, que es interpretado como una medida del crecimiento de la productividad.

Una de las ventajas que presenta el utilizar el enfoque econométrico es el obtener una información completa de las representaciones de la tecnológica específica de la producción. Además de las estimaciones de la productividad, también se gana información en otros parámetros sobre la tecnología de producción. Como se sabe esto no es posible al utilizar el enfoque de cuentas de crecimiento o el de números índices. Por otra parte

Dentro del marco econométrico, existe la posibilidad de probar la validez de los supuestos que son utilizados en el enfoque de cuentas de crecimiento y el de números índice porque son propiedades de la tecnología de producción. El incrementar la flexibilidad y la disponibilidad de poder probar diferentes supuestos del enfoque econométrico no viene sin costos. El utilizar el enfoque econométrico incrementa el problema de las estimaciones, las cuales pueden estar dirigidas a la robustez de los parámetros estimados. Además otro problema al que se enfrenta este enfoque tiene que ver con el utilizar muestras pequeñas, las restricciones como por ejemplo los rendimientos constantes a escala son generalmente impuestos para preservar los grados de libertad. La siguiente ecuación es con la cual se utiliza para medir la PTF, esta es obtenida de la ecuación de convergencia<sup>22</sup>:

$$\ln y(t_2) = (1 - e^{-\lambda t}) \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(s_{t1}) - (1 - e^{-\lambda t}) \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln(n_{t1} + g + \delta) + (1 - e^{-\lambda t}) \ln y(t_1) + (1 - e^{-\lambda t}) \ln A_0 + g (t_2 - e^{-\lambda t} t_1) \quad (73)$$

#### 4. Recapitulación y Conclusiones

---

<sup>22</sup> En el trabajo de Islam (1995) podemos observar con más detalle el desarrollo con el cual se llegó a la ecuación (6)

En el presente trabajo nos hemos centrado en un análisis acerca de los trabajos que se han elaborado del 2002 hasta la fecha, sobre el tema relacionado con la convergencia y los nuevos descubrimientos que se han obtenido desde entonces. Además de enfocarnos en el estudio específico de la convergencia en PTF. Ya que si existe una brecha pequeña o amplia en PTF, ocasionara que coexista una convergencia o divergencia en los ingresos per cápita, por lo que revisamos algunos trabajos que hablan sobre este tema de importancia. Después en el punto numero dos señalamos las diferentes metodologías que se han utilizado para calcular los estimadores de la ecuación de convergencia, y nos dimos a la tarea de la revisión de algunos trabajos, donde nos dan una guía para elegir la mejor metodología econométrica para calcular los estimadores de la ecuación de convergencia. Por último, en el punto número tres, señalamos en que consiste la Productividad Total de los Factores (PTF), así como el significado que le han dado varios estudiosos del tema. Así mismo señalamos los diferentes enfoques que han surgido para la medición de la PTF.

Las principales conclusiones a las que hemos llegado en nuestro trabajo son las siguientes:

En el tema relacionado con la convergencia sigue existiendo un consenso respecto a la existencia de beta convergencia absoluta para muestras homogéneas de países y la existencia de sigma convergencia. Mientras que muestras grandes de países, no hay evidencia alguna de beta convergencia absoluta ni de sigma convergencia. Cabe hacer notar que beta convergencia absoluta existirá siempre y cuando se mantengan los supuestos sobre la naturaleza de los factores (capital y trabajo) y el comportamiento de los agentes (agentes maximizadores, en el caso del productor maximizador de la ganancia, y en el caso del consumidor maximizador de su utilidad). En el caso de beta convergencia condicional hay evidencia de su existencia en muestras pequeñas y amplias, al igual que de sigma convergencia. Aunque en este último punto, debemos señalar que la disminución en la dispersión de los ingresos ha sido paulatinamente lenta y en algunos años se volvió nula, para posteriormente volver a disminuir la dispersión muy lentamente.

En el punto de la convergencia en PTF, no hay un consenso del todo puntualizado, ya que las investigaciones revisadas señalan resultados diferentes. Sin embargo en la mayoría de

los trabajos revisados muestran que existe una convergencia en PTF. Se encuentra evidencia de que el cambio tecnológico no es neutral, y que solo se da en los países desarrollados. Hay un mayor grado de convergencia en los países avanzados, estos se acercan más a la frontera tecnológica o al país de referencia, según la metodología que se utilice.

Como se mencionó en el apartado número dos, existen varios métodos para estimar los coeficientes de la ecuación de convergencia. Los cuales han dado diferentes tasas de convergencia. Esto nos indica el tiempo en que una economía menos desarrollada reduce las diferencias existentes entre ella y una economía avanzada. Como señalamos estas diferencias normalmente son en ingresos per cápita, pero también puede ser en PTF. Al utilizar el método de OLS se obtendrán velocidades de convergencia del 2%, pero las estimaciones estarán sesgadas. Para que estas estimaciones no estén sesgadas y los resultados sean robustos se debe de mantener que  $N = 20$  y  $T = 5$ . Si es que se requiere utilizar este método. En futuras investigaciones se recomienda el uso de la metodología de panel, y los resultados más robustos que se obtendrán serán de las estimaciones de los métodos LSDV, LSDV – Kiviet, GMM, y System GMM. Los dos primeros métodos darán resultados confiables tanto en muestras amplias como cortas, tanto en  $N$  y  $T$ . Mientras que las estimaciones del método System GMM, se recomienda en muestras pequeñas y se obtendrán resultados más confiables que al utilizar las estimaciones GMM. Los estimadores GMM, se recomienda utilizarlos cuando se tengan muestras amplias, para que no existan sesgos es los coeficientes estimados y los resultados sean robustos.

Al medir la Productividad Total de los Factores, nos hemos encontrado con varios enfoques para obtener esta medición. Sugerimos que para futuras investigaciones relacionadas sobre el tema de la PTF se utilicen dos enfoques, esto con el fin de comparar los resultados obtenidos, por lo que ambas mediciones serán complementarias. Los enfoques sugeridos para obtener la medición de la PTF es el uso de la función distancia y el enfoque de números índices. El primero de estos enfoques, no requiere la necesidad de un comportamiento racional por parte del agente productor, ni de un mercado competitivo, ya que la construcción de esta visión no está basada en ideas neoclásicas, por

lo que no hay necesidad de poner a un país de referencia, donde todos los demás países tengan que acercarse a este. Cuando se utilice el método de números índices, se sugiere utilizar dos tipos de índices: un índice superlativo CCD, ya que cumple con los criterios económicos y criterios axiomáticos; además se sugiere el uso del índice EHL, ya que este tipo de medición de la PTF no requiere los supuestos maximizadores por parte del productor ni de un mercado competitivo, pero a pesar de esto los dos índices señalados siguen basándose en ideas neoclásicas, es por eso que planteamos la idea de comprar los resultados obtenidos con los del enfoque de función distancia.

#### **Apéndice:**

##### **Estimador de panel.**

El enfoque de panel Islam reformula la ecuación (16) del trabajo de Mankiw, Romer, y Weil, para presentarla en términos de ingreso per cápita, y no en términos ingreso por hombre efectivo.

$$\hat{y}(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} = \frac{Y(t)}{L(t)A(t)e^{gt}} \quad (16.1)$$

De modo que



$$\ln \hat{y}(t) = \ln \left( \frac{Y(t)}{L(t)} \right) - \ln A(0) - gt \quad (16.2)$$

$$= \ln y(t) - \ln A(0) - gt$$

Donde  $y(t)$  es el ingreso per cápita,  $(Y(t)/L(t))$ . Sustituyendo por  $\hat{y}(t)$  en la ecuación (16) obtendremos la ecuación de crecimiento en nivel de ingreso per cápita:

$$\begin{aligned} \ln y(t_2) - \ln y(t_1) &= (1 - e^{-\lambda t}) \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln(s_{t1}) - (1 - e^{-\lambda t}) \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln(n_{t1} + g + \delta) \\ &\quad - (1 - e^{-\lambda t}) \ln y(t_1) + (1 - e^{-\lambda t}) \ln A(0) + g(t_2 - e^{-\lambda t} t_1) \end{aligned} \quad (16.3)$$

Poniendo el término  $y(t_1)$  al lado derecho de la ecuación anterior, nosotros obtenemos la ecuación de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \ln y(t_2) &= (1 - e^{-\lambda t}) \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln(s_{t1}) - (1 - e^{-\lambda t}) \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln(n_{t1} + g + \delta) \\ &\quad + (e^{-\lambda t}) \ln y(t_1) + (1 - e^{-\lambda t}) \ln A(0) + g(t_2 - e^{-\lambda t} t_1) \end{aligned} \quad (16.4)$$

Se puede observar que ahora la ecuación anterior representar un modelo dinámico de datos de panel con  $(1 - e^{-\lambda t}) \ln A(0)$  como el tiempo invariante individual del termino country-effect. La notación convencional para el enfoque de panel es de la siguiente forma:

$$y_{it} = \gamma y_{i,t-1} + \sum_{j=1}^2 \beta_j x_{it}^j + \eta_t + \mu_i + v_{it} \quad (16.5)$$

Dónde:

$$y_{it} = \ln y(t_2)$$

$$y_{i,t-1} = \ln y(t_1)$$

$$\gamma = e^{-\lambda t}$$

$$\beta_1 = (1 - e^{-\lambda t}) \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

$$\beta_2 = -(1 - e^{-\lambda t}) \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

$$x_{it}^1 = \ln(s)$$

$$x_{it}^2 = \ln(n + g + \delta)$$

$$\mu_i = (1 - e^{-\lambda t}) \ln A(0)$$

$$\eta_t = g(t_2 - e^{-\lambda t} t_1)$$

El término  $v_{it}$  es el erro transitorio que varía entre los países y periodos de tiempo, este término tiene media igual a cero. El termino  $\mu_i$  es el componente time-invariant el cual varia entre las ecoinomias y puede controlar varios factores no observados, el termino  $\eta_t$  es un componente de tendencia, que captura las tasas de crecimiento de la frontera tecnológica y asume rendimientos constantes

Se puede notar que la ecuación (16.4) de panel fue realizada alrededor de la aproximación hacia el estado estacionario y se supone la captura dinámica hacia el estado estacionario. Esto ocasiona que sea válido para periodos cortos de tiempo. Podemos notar que en la simple regresión de corte transversal (ecuación 16), se asume que las variables ahorro y crecimiento de la población ( $s$  y  $n$ ) son constantes para todo el periodo de estudio. Esta aproximación hecha, es más realista en periodos corto de tiempo. La metodología de panel nos permite tomar en consideración antes los efectos individuales de los países, para poder integrarlos en el proceso de convergencia en varios intervalos de tiempo consecutivos.

Redefiniendo la ecuación de panel (16.5) esta puede ser expresa en forma matricial de la siguiente manera:

$$y = W\delta + (I_N \otimes I_T)\eta + \epsilon \quad (16.6)$$

Donde  $\delta = (\gamma, \beta')$ , la variable  $y$ , y  $W = [y_{-1} : X]$  son  $NT \times 1$  y  $NT \times (K + 1)$  matrices de observaciones,  $\epsilon$  es un vector de  $NT \times 1$  perturbaciones y  $\iota_T$  es un vector de unos  $T \times 1$

### Estimador LSDV y LSDV-Kiviet.

Se observa claramente que en la ecuación (16.5) los efectos son aleatorios, el regresor  $y_{it}$  esta correlacionado con termino del componente de perturbacion  $\eta_t + v_{it}$ . Por lo tanto los estimadores estándar del modelo serán inconsistentes debido a esta correlación existente. Por lo tanto, usualmente se evitan las estimaciones de los coeficientes  $(\gamma, \beta)'$  mediante tecnicas del componente de error, ya que eso lleva a varias complicaciones. Para evitar este tipo de problemas comúnmente que los efectos individuales son fijos o se trata de manera aleatoria a los efectos individuales como fijos. Entonces los  $N$  componentes del vector  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)'$  que constituyete  $N$  parámetros desconocidos correspondientes a las variables Dummy  $I_N \otimes \iota_T$  en la ecuación (16.6). Cabe resaltar que las estimaciones harán que se pierdan grados de libertad, especialmente cuando  $N$  es grande. Estimando los  $N + K + 1$  coeficientes de (16.6) esta estimación se le conoce como Mínimos Cuadrados con Variables Dummy (LSDV) o estimación de efectos fijos. Partiendo de los resultados obtenidos de la regresión estándar, los resultados obtenidos para  $\delta$  pueden ser expresados de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{LSDV} &= (W'AW)^{-1}W'Ay & (16.7) \\ &= \delta + (W'AW)^{-1} \begin{pmatrix} y'_{-1} & A_\epsilon \\ X' & A_\epsilon \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donde queda una matriz de  $NT \times NT$  y  $A = I_N \otimes (I_T - \frac{1}{T}\iota_T\iota_T')$ . Se hace notar que  $A$  esta dentro de la transformación pero fuera de los efectos individuales. Por facilidad de exposición que todas las variables explicativas están variando en el tiempo de modo que  $W'AW$  es invertible. aunque la exogeneidad de los regresores  $X$  implica que  $E(X'A_\epsilon) = 0$ , tenemos que  $E(X'A_\epsilon) \neq 0$ , puede ser mostrado que:

$$E(y'_{-1}A_\epsilon) = -\sigma_\epsilon^2 \frac{N}{1-\gamma} \left( 1 - \frac{1-\gamma^T}{T(1-\gamma)} \right) \quad (16.8)$$

Por lo tanto los estimadores LSDV de  $\delta$  son consistentes para  $T \rightarrow \infty$  pero inconsistentes cuando  $N \rightarrow \infty$  y  $T$  es finita Nickell (1981).

Kiviet (1995) deriva una formula aproximada del sesgo de los estimadores LSDV (16.7) en una estacionaridad normal para un panel dinámico de datos tal que la aproximación de la magnitud de los errores sea del orden  $O(N^{-1})$  y del orden  $O(T^{-2})$  en el mismo tiempo. En Kiviet (1999) su análisis es extendido, y se encuentra una aproximación al sesgo producido, no exactamente en el orden  $O(T^{-1})$ , pero se encuentra una exactitud para el orden  $O(N^{-1})$ . A continuación se mostrara las magnitudes de varias contribuciones para el sesgo de muestras finitas y como decrece respecto tanto a  $T$  y  $N$ . lo cual nos ayudara a selección una implementación para corregir el sesgo del estimador LSDV con propiedades atractivas para muestras finitas.

Para emplear la notación usual  $O$  y  $O_p$  sin ambigüedad para el panel de datos, donde la muestra tiene dos dimensiones, se pondrá la notación en un amplio contexto definido como:  $\phi$  y  $\psi$  son números reales. Si los elementos  $a_{kl}$  (donde  $k=1, \dots, K$  y  $l=1, \dots, L$ ) de una matriz  $K \times L$  no estocástica  $A$  constituye secuencias  $\{a_{kl}(i, t)\}$  para  $i=1, \dots, N$  y  $t=1, \dots, T$ , donde permite que  $N \rightarrow \infty$  o  $T \rightarrow \infty$  o ambas. Entonces  $A = O(N^\phi)$  que indica la existencia de una constante finita  $\bar{a}_\phi > 0$  tal que  $|N^{-\phi} a_{k,l}(i, t)| < \bar{a}_\phi, \forall k, l, i, t$ . Similarmente  $A = O(T^\psi)$  indica que existe una constante finita  $\bar{a}_\psi > 0$  tal que  $|T^{-\psi} a_{k,l}(i, t)| < \bar{a}_\psi, \forall k, l, i, t$ . Además  $A = O(N^\phi T^\psi)$  indica que existe una constante finita  $\bar{a}_{\phi,\psi} > 0$  tal que  $|N^{-\phi} T^{-\psi} a_{k,l}(i, t)| < \bar{a}_{\phi,\psi}, \forall k, l, i, t$ .

Cuando  $A = O(N^\phi)$  decimos que los elementos de  $A$  estan en su mayoría en el orden  $N^\phi$  que es equivalente a  $A = O(N^\phi T^\psi)$ , entonces las cantidades  $N^{-\phi} a_{k,l}$  son finitas, incluso cuando  $T$  esta limitada. De una manera más general,  $A = O(N^\phi T^\psi)$  indica que todos los elementos de  $A$  son en su mayoría de orden  $N^\phi T^\psi$ .

Además se define que cuando la matriz  $A$  contenga elementos aleatorios,  $A = O_p(N^\phi)$  indica que para todo  $\epsilon > 0$  existira una constante finita  $\bar{a}_\epsilon > 0$  y un entero positivo  $N_\epsilon$  tal que  $\text{Prob}(|N^{-\phi} a_{k,l}(i, t)| > \bar{a}_\epsilon) < \epsilon, \forall k, l, i$  he  $i > N_\epsilon$ . Similarmente  $A = O_p(T^\psi)$  indica

que para todo  $\epsilon > 0$  existe una constante finita  $\bar{a}_\epsilon > 0$  y un entero positivo  $T_\epsilon$  tal que  $\text{Prob}(|T^{-\psi} a_{k,l}(i,t)| > \bar{a}_\epsilon) < \epsilon, \forall k, l, i$  y  $t > T_\epsilon$ . Finalmente  $A = O_p(N^\phi T^\psi)$  indica que para todo  $\epsilon > 0$  existirá una constante finita  $\bar{a}_\epsilon > 0$  y un entero positivo  $N_\epsilon$  y  $T_\epsilon$  tal que  $\text{Prob}(|N^{-\phi} T^{-\psi} a_{k,l}(i,t)| > \bar{a}_\epsilon) < \epsilon, \forall k, l e i > N_\epsilon, t > T_\epsilon$ .  $A = O_p(N^\phi T^\psi)$  Indica que los elementos de A convergen al menos a una tasa de  $N^\phi T^\psi$ .

La terminología anterior sobre tasas de convergencia y magnitudes de orden de doble índice determinístico y secuencia estocástica de vectores o matrices será empleada a continuación para estimar el modelo de panel especialmente para LSDV. Kiviet (1995, 1999) lo muestra de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E(\hat{\delta}_{LSDV} - \delta) &= E(W'AW)^{-1} W'A_\epsilon \\ &= c_1(T^{-1}) + c_2(N^{-1}T^{-1}) + c_3(N^{-1}T^{-2}) + O(N^{-2}T^{-2}) \end{aligned} \quad (16.9)$$

Dónde:

$$c_1(T^{-1}) = QE(W'A_\epsilon) = O(T^{-1})$$

$$c_2(N^{-1}T^{-1}) = -QE(W'AW - Q^{-1})Q[W'A_\epsilon - E(W'A_\epsilon)] = O(N^{-1}T^{-1})$$

$$c_3(N^{-1}T^{-2}) = -QE([(W'AW - Q^{-1})Q]^2)E[W'A_\epsilon] = O(N^{-1}T^{-2})$$

Con

$$Q = [E(W'AW)]^{-1} = [\bar{W}'A\bar{W} + \sigma_\epsilon^2 \text{tr}(\Pi'\Pi)e_1 e_1']^{-1}$$

$$\bar{W} = E(W) = [E(y_{-1}) : X]$$

$$E(y_{i,0}) = y_{i,0}, \quad E(y_{i,t}) = \gamma E(y_{i,t-1}) + \beta^{t-1} x_{i,t} \quad (i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T) \quad (16.10)$$

$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)'$  tiene  $K + 1$  elementos

$$\Pi = AL\Gamma, \Gamma = I_N \otimes \Gamma_T, \quad \Gamma_T = (I_T - \gamma L_T)^{-1}, \quad L = I_N \otimes L_T$$

Donde  $L_T$  es una matriz de  $T \times T$  que tiene unos en su primera sub-diagonal inferior y en todos los elementos iguales a cero. Utilizando la notación abreviada:

$$q_1 = Qe_1 \quad y \quad q_{11} = e_1' q_1 \quad (16.11)$$

Y siguiendo la derivación presentada previamente, se obtiene:

$$\begin{aligned}
c_1(T^{-1}) &= \sigma_\epsilon^2 \text{tr}(\Pi) q_1 \\
c_2(N^{-1}T^{-1}) &= -QE(W'AWQW'A_\epsilon) + QE(W'A_\epsilon) \quad (16.12) \\
&= -\sigma_\epsilon^2 [Q\bar{W}'\Pi A\bar{W} + \text{tr}(Q\bar{W}'\Pi A\bar{W})I_{K+1} + 2\sigma_\epsilon^2 q_{11} \text{tr}(\Pi'\Pi\Pi)I_{K+1}] q_1 \\
c_3(N^{-1}T^{-2}) &= QE(W'AWQW'AW)QE(W'A_\epsilon) - QE(W'A_\epsilon) \\
&= \sigma_\epsilon^4 \text{tr}(\Pi) \{ 2q_{11} Q\bar{W}'\Pi\Pi'\bar{W} q_1 \\
&\quad + [(q'_1 \bar{W}'\Pi\Pi'\bar{W} q_1) + q_{11} \text{tr}(Q\bar{W}'\Pi\Pi'\bar{W}) + 2\text{tr}(\Pi'\Pi\Pi)\Pi] q_1^2 \} q_1
\end{aligned}$$

### Estimadores AHI Y AH (d).

Metodología AHI Y AH (d) conocidos como Estimadores de variable instrumental (IV).

Los dos estimadores IV propuestos por Anderson y Hsiao (1981, 1982) estos inician diferenciando la ecuación (16.5) para eliminar el término de efecto individual  $\mu_i$ :

$$y_{i,t} - y_{i,t-1} = \alpha(y_{i,t-1} -) + \beta(x_{i,t-1} - x_{i,t-2}) + (v_{i,t} - v_{i,t-1}) \quad (16.13)$$

Debido a la correlación entre  $y_{i,t-1}$  y  $v_{i,t-1}$ , se van a tener que utilizar otros instrumentos necesarios. Los valores de  $v_{i,t}$  no estas correlacionados serialemente, además de que los valores rezagados de  $y_{i,t}$ ; pueden actuar como los instrumentos necesarios.

### AHI.

Estos estimadores usan como instrumento a  $y_{i,t-2}$ . Señalamos  $y_{i,t} - y_{i,t-1} = \tilde{y}_{i,t}$ ,  $(y_{i,t-1} -) = \tilde{y}_{i,t-1}$ , y  $(x_{i,t-1} - x_{i,t-2}) = \tilde{x}_{i,t-1}$ . Además se tiene que:

$$\begin{aligned}
\text{vec}(\tilde{y}_{it})_l &= [\tilde{y}_{12}, \Lambda, \tilde{y}_{N2}, \Lambda, \tilde{y}_{1T}, \Lambda, \tilde{y}_{NT}]' \\
\text{vec}(\tilde{x}_{it})_l &= [\tilde{x}_{11}, \Lambda, \tilde{x}_{N1}, \Lambda, \tilde{x}_{1,T-1}, \Lambda, \tilde{x}_{N,T-1}]' \quad (16.14) \\
\text{vec}(\tilde{y}_{i,t-1})_l &= [\tilde{y}_{11}, \Lambda, \tilde{y}_{N1}, \Lambda, \tilde{y}_{1,T-1}, \Lambda, \tilde{y}_{N,T-1}]'
\end{aligned}$$

$$vec(y_{-2})_l = [\tilde{y}_{10}, \Lambda, \tilde{y}_{N0}, \Lambda, \tilde{y}_{1,T-2}, \Lambda, \tilde{y}_{N,T-2}]'$$

Definimos  $W_l = [vec(\tilde{y}_{i,t-1})_l \quad vec(\tilde{x}_{i,t-1})_l]$  y  $Z_l = [vec(y_{-2}) \quad vec(\tilde{x}_{i,t-1})_l]$

Entonces dado la anterior podemos estimar los AHÍ de  $\gamma$  que estarán dados por:

$$\gamma = (Z_l' W_l)^{-1} Z_l' vec(\tilde{y}_{it})_l \quad (16.15)$$

Los errores estándar bajo el supuesto que estos son homosedásticos son obtenidos a través de la siguiente fórmula:

$$var(\gamma) = s_l^2 (Z_l' W_l)^{-1} Z_l' Z_l (W_l' Z_l)^{-1} \quad (16.16)$$

Dónde:  $s_l^2 = \frac{e_l' e_l}{[N(T-1)-2]}$  (16.17) y

$$e_l = vec(\tilde{y}_{it})_l - W_l \gamma \quad (16.18)$$

Los errores estándar que son consistentes con heterocedasticidad son obtenidos a través de:

$$(Z_l' W_l)^{-1} Z_l' diag(e_l' e_l) Z_l (W_l' Z_l)^{-1} \quad (16.19)$$

#### AH (d).

Para obtener los estimadores AH (d) se propone que ahora los instrumentos a utilizar son  $y_{i,t-2} - y_{i,t-3}$  en lugar de  $y_{i,t-2}$ . Continuando con la notación previamente, tenemos que:

$$\begin{aligned} vec(\tilde{y}_{it})_d &= [\tilde{y}_{13}, \Lambda, \tilde{y}_{N3}, \Lambda, \tilde{y}_{1T}, \Lambda, \tilde{y}_{NT}]' \\ vec(\tilde{x}_{i,t-1})_d &= [\tilde{x}_{12}, \Lambda, \tilde{x}_{N2}, \Lambda, \tilde{x}_{1,T-1}, \Lambda, \tilde{x}_{N,T-1}]' \\ vec(\tilde{y}_{i,t-1})_d &= [\tilde{y}_{12}, \Lambda, \tilde{y}_{N2}, \Lambda, \tilde{y}_{1,T-1}, \Lambda, \tilde{y}_{N,T-1}]' \\ vec(y_{i,t-2})_d &= [\tilde{y}_{11}, \Lambda, \tilde{y}_{N1}, \Lambda, \tilde{y}_{1,T-2}, \Lambda, \tilde{y}_{N,T-2}]' \end{aligned} \quad (16.20)$$

$$vec(y_{i,t-3})_d = [\tilde{y}_{10}, \Lambda, \tilde{y}_{N0}, \Lambda, \tilde{y}_{1,T-3}, \Lambda, \tilde{y}_{N,T-3}]'$$

Definimos que:  $W_d = [vec(\tilde{y}_{i,t-1})_d \quad vec(\tilde{x}_{i,t-1})_d]$ , y  $Z_d = [(vec(\tilde{y}_{i,t-2})_d - vec(\tilde{y}_{i,t-3})_d) \quad vec(\tilde{x}_{i,t-1})_d]$ .

Entonces los estimadores AH (d) de  $\gamma$  son obtenidos por:

$$\gamma = (Z_d' W_d)^{-1} Z_d' vec(\tilde{y}_{it})_d \quad (16.21)$$

Para obtener los errores estándar bajo el supuesto de homocedasticidad serán obtenidos por medio de:

$$var(\gamma) = s_d^2 (Z_d' W_d)^{-1} Z_d' Z_d (W_d' Z_d)^{-1} \quad (16.22)$$

Dónde:

$$s_d^2 = \frac{e_d' e_d}{[N(T-2) - 2]} \quad (16.23)$$

$$e_d = vec(\tilde{y}_{it})_d - W_d \gamma \quad (16.24)$$

Los errores estándar consistentes con heterocedasticidad será obtenidos por medio de la siguiente formula:

$$(Z_d' W_d)^{-1} Z_d' diag(e_d' e_d) Z_d (W_d' Z_d)^{-1} \quad (16.25)$$

Se observa en la notación anterior que si el total de observaciones disponibles en el corte transversal es T, y los valores iniciales de la variable dependiente son conocidos o se pueden estimar, entonces el número de observaciones que realmente ser utilizaran en el método de AHÍ y el AH(d) será (T-2) y (T-3). Por lo cual se pierde una observación cuando se elige AH (d) en lugar de AHÍ. Cuando el número de observaciones del corte transversal son pequeñas, esto puede ser un problema importante.



Anderson y Hsiao muestran que ambos estimadores IV (AHÍ y AH (d)) presentan propiedades deseables asintóticas en dirección tanto de  $N \rightarrow \infty$  y cuando  $T \rightarrow \infty$ . Si los errores son distribuidos de manera normal, entonces estos estimadores son equivalentes a los de máxima verosimilitud. Además estas propiedades asintóticas de los estimadores IV no depende de los supuestos que se hagan respecto a los valores iniciales de  $y_{it}$ .

### Estimadores 3SLS Y G3SLS.

El modelo de datos de panel dinámico puede ser visto como un sistema de simultáneo de T ecuaciones, estas ecuaciones son distinguidas por t. Así los estimadores de las ecuaciones simultáneas se pueden aplicar en un modelo, Chamberlain (1982, 1983) sugiere usar la versión generalizada de 3SLS. Como en los estimadores de Anderson y Hsiao, los estimadores de las ecuaciones simultáneas inician por obtener las primeras diferencias del modelo para eliminar los efectos individuales  $\mu_i$ . Por lo tanto el sistema de ecuaciones que se obtiene será el siguiente:

$$y_{1T} - y_{i,T-1} = \alpha(y_{iT} - y_{i,T-2}) + \beta(x_{i,T-1} - x_{i,T-2}) + (v_{i,T} - v_{i,T-1})$$

$$y_{i2} - y_{i1} = \alpha(y_{i1} - y_{i0}) + \beta(x_{i1} - x_{i0}) + (v_{i2} - v_{i1}) \quad (16.26)$$

A diferencia de los estimadores obtenidos por Anderson y Hsiao, y Arellano, los estimadores de las ecuaciones simultaneas solo usan como instrumento a  $x_{it}$ . Si no hay observaciones disponibles de  $y_{i0}$ , entonces el sistema puede ser completado adiriendo una especificación de  $y_{i0}$  en términos de  $x_{it}$  como sigue:

$$y_{i0} = \phi_0 + \phi_1 x_{i0} + \Lambda + \phi_T x_{i,T-1} + v_i \quad (16.27)$$

La estimación de 3SLS puede proceder de la forma habitual con la matriz de varianza-covarianza, la cual es estimada inicialmente a partir de los residuos obtenidos por el método 2SLS. Para generalizar los estimadores de 3SLS se requiere una ponderación de una matriz, la cual está dada por:

$$E(v_i^0 v_i^{0'} \otimes x_i x_i') \quad (16.28)$$

Donde los residuales  $v_i^0$  son obtenidos utilizando los valores de los parámetros reales. En la implementación actual, esta se aproxima a su muestra análoga:

$$N^{-1} \sum_{i=1}^N vv' \otimes x_i x_i' \quad (16.29)$$

Donde los residuales son obtenidos de las estimaciones iniciales de 2SLS o de 3SLS. Los estimadores G3SLS hacen una corrección de la heterocedasticidad que se obtienen del método 3SLS.

### **Estimador de Distancia mínima (MD).**

La mayoría de los enfoques de panel dinámico inician eliminando  $\mu_i$  a través de obtener las primeras diferencias del modelo. En este sentido, el método de distancia mínima (MD) se distingue por en lugar de eliminar o ignorar, este trata de especificar  $\mu_i$ . Esto permite que los estimadores de MD utilicen el modelo en forma nivelada.

Una simple especificación de  $\mu_i$  es sugerida por Mundlak (1978), donde  $\mu_i$  es tomada como una función lineal de  $\bar{x}_i$ . La especificación propuesta por Mundlak fue sin embargo para mostrar que bajo la descripción de  $\mu_i$ , los estimadores GLS suponiendo que tuvieran efectos aleatorios llegarían a ser equivalentes que los estimadores LSDV bajo el supuesto de efectos fijos.

Al señalar que la propuesta de Mundlak es demasiado restrictiva, Chamberlain una especificación más general donde  $\mu_i$  depende linealmente de  $x_{it}$  para todos los periodos de tiempo individuales  $i$  con coeficientes variantes. De acuerdo a esta especificación:

$$\mu_i = \lambda_0 + \lambda_1 x_{i0} + \lambda_2 x_{i1} + K + \lambda_T x_{i,T-1} + \omega_i \quad (16.30)$$

Con  $\omega_t$  siendo el término de error no correlacionado. Si los valores iniciales de  $y_{i0}$  no están disponibles, una especificación similar puede ser usada como la siguiente:

$$y_{i0} = \phi_0 + \phi_1 x_{i0} + \phi_2 x_{i1} + \Lambda + \phi_T x_{i,T-1} + v_i \quad (16.31)$$

El proceso se inicia por sustitución recursiva para la variable dependiente rezagada  $y_{i,t-1}$ .  
Suponiendo que T=5 el resultado del sistema de ecuación queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \beta x_0 + \alpha y_0 + \mu + v_1 \\
 y_2 &= \alpha\beta x_0 + \alpha\beta x_1 + \alpha^2 y_0 + (\mu + \alpha\mu) + (v_2 + \alpha v_1) \\
 y_3 &= \alpha^2\beta x_0 + \alpha\beta x_1 + \beta x_2 + \alpha^3 y_0 + (\mu + \alpha\mu + \alpha^2\mu) + (v_3 + \alpha v_2 + \alpha^2 v_1) \\
 y_4 &= \alpha^3\beta x_0 + \alpha^2\beta x_1 + \alpha\beta x_2 + \beta x_3 + \alpha^4 y_0 \\
 &\quad + (\mu + \alpha\mu + \alpha^2\mu + \alpha^3\mu) + (v_5 + \alpha v_4 + \alpha^2 v_3 + \alpha^3 v_2) \\
 y_5 &= \alpha^4\beta x_0 + \alpha^3\beta x_1 + \alpha^2\beta x_2 + \alpha\beta x_3 + \beta x_4 + \alpha^5 y_0 \\
 &\quad + (\mu + \alpha\mu + \alpha^2\mu + \alpha^3\mu + \alpha^4\mu) + (v_5 + \alpha v_4 + \alpha^2 v_3 + \alpha^3 v_2 + \alpha^4 v_1)
 \end{aligned} \tag{16.32}$$

En forma matricial el sistema de ecuaciones se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^2\beta & \alpha\beta & \beta & 0 & 0 \\ \alpha^3\beta & \alpha^2\beta & \alpha\beta & \beta & 0 \\ \alpha^4\beta & \alpha^3\beta & \alpha^2\beta & \alpha\beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \end{pmatrix} y_0 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \alpha \\ 1 + \alpha + \alpha^2 \\ 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 \\ 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 \end{pmatrix} \mu + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} \tag{16.33}$$

Los  $v_t$  son los componentes del termino de error los cuales son consistentes con  $v_t$ . Ahora es posible la sustitución para  $y_0$  y  $\mu$ , usando sus respectivas especificaciones previamente. Esto nos permite obtener la matriz de coeficientes:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^2\beta & \alpha\beta & \beta & 0 & 0 \\ \alpha^3\beta & \alpha^2\beta & \alpha\beta & \beta & 0 \\ \alpha^4\beta & \alpha^3\beta & \alpha^2\beta & \alpha\beta & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \end{pmatrix} \phi' + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \alpha \\ 1 + \alpha + \alpha^2 \\ 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 \\ 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 \end{pmatrix} \lambda' \quad (16.34)$$

Dónde:

$$\phi' = (\phi_0\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi_5) \quad (16.35)$$

$$\lambda' = (\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5) \quad (16.36)$$

Si  $x_t$  son estrictamente exógenas, entonces estas no estarán correlacionadas con  $v_t$ , y las ecuaciones en su forma reducida pueden ser estimadas aplicando el método de Mínimos Cuadrados Ordinales.

Ignorando el término del intercepto la matriz previamente  $\Pi$  contiene 25 elementos que son funciones no lineales de doce coeficientes subyacentes, llamados  $(\alpha\beta\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi_5)$  que pueden ser expresados por el vector  $\theta'$ . La última etapa del método MD consiste en excluir las estimaciones obtenidas  $\theta$  de  $\hat{\Pi}$  mediante la siguiente minimización:

$$\theta = \arg(\text{vec}\Pi - g(\theta))' A_N (\text{vec}\Pi - g(\theta)) \quad (16.37)$$

$g(\theta)$  Es una función de los valores del vector que muestran los elementos de  $\theta$  en  $\text{vec}(\Pi)$ .

Chamberlain muestra que las elecciones óptimas de la matriz ponderada  $A_N^{-1}$  es la inversa de:

$$\Omega = E[(y_i - \Pi^0 x_i)(y_i - \Pi^0 x_i)' \otimes \Phi_x^{-1}(x_i x_i') \Phi_x^{-1}] \quad (16.38)$$

Donde  $\Pi^0$  es la matriz de los coeficientes, y  $\Phi_x = E(x_i x_i')$ . Se puede notar que la matriz  $\Omega$  es consistente con la heterocedasticidad. Esto se puede remplazar pues una muestra consistente análoga:

$$\Omega = N^{-1} \sum_i^N [(y_i - \Pi x_i)(y_i - \Pi x_i)' \otimes S_x^{-1}(x_i x_i') S_x^{-1}] \quad (16.39)$$

Dónde:

$$S_x = \sum_{i=1}^N x_i x_i' / N \quad (16.40)$$

### Estimador GMM.

Se parte de la siguiente ecuación:

$$y_{it} = \gamma y_{i,t-1} + \sum_{j=1}^2 \beta_j x_{it}^j + \eta_t + \mu_i + v_{it} \quad (16.5)$$

Reescribiendo la ecuación (16.5), se eliminara el término  $\mu_i$  y con las primeras diferencias que se obtiene se elimann los efectos individuales, la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\Delta y_{i,t} = \Delta X_{i,t} \theta + \Delta v_{i,t} \quad (16.41)$$

Dónde:

$\theta' = (\beta \ \delta')$  Y  $X_{i,t}$  es un vector  $1 \times K$  definido como  $(y_{i,t-T} \ W_{i,t-T})$ ,  $\Delta$  es el operador de primeras diferencias,  $W_{i,t}$  es un vector renglón de los determinantes del crecimiento económico. Se tiene información del periodo 0 al periodo  $T_{0T}$  para la variable dependiente, y se tiene información del periodo 0 al periodo  $T_T$  para las variables explicativas ( $T = T_0 - 1$ ). Por lo tanto se tendrá T ecuaciones en diferencias de aquí en adelante supondremos que  $T=4$  (como en el artículo original de Caselli, Esquivel, y Lefort (1996)).

La ecuación anterior permite obtener los parámetros de interés sin tener que hacer algún supuesto de probabilidad respecto a los efectos de un país. Sin embargo esta estimación no se puede entender directamente con el procedimiento de mínimos cuadrados, por dos razones; la primera, no se ha tratado todavía la endogeneidad de las variables explicativas  $W_{i,t-T}$ , y  $W_{i,t-2T}$ ; el segundo el rezago de la variable dependiente estará ahora correlacionada contemporáneamente con el componente de error en el periodo  $t - T$ . La solución para el problema es usar todos los valores pasados de las variables explicativas como instrumentos en la regresión.

Se identificarán los siguientes supuestos: no hay correlación serial de orden  $t$   $E(u_{i,t}u_{i,t-T}) = 0$ ; el vector de variables de “stock”  $W_{i,t-T}$  están predeterminadas; el tercer supuesto consiste en que las variables de “flujo” en el vector  $W_{i,t-T}$  no están predeterminadas por  $u_{i,t}$  pero estarán predeterminadas por  $u_{i,t+T}$ .

Considerando la posibilidad de partición del vector  $W_{i,t-T}$ , en variables que están predeterminadas por  $u_{i,t+T}$ ,  $W_{i,t}^1$ , y variables que están predeterminadas por  $u_{i,t+2T}$ ,  $W_{i,t}^2$ : entonces se tiene que  $W_{i,t} = (W_{i,t}^1 \ W_{i,t}^2)$ . Se considera la matriz de instrumentos:

$$Z_i = \begin{pmatrix} y_{i,0} & W_{i,0}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{i,0} & W_{i,0} & y_{i,T} & W_{i,0}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{i,0} & W_{i,0} & y_{i,T} & W_{i,T} & y_{i,2T} & W_{i,2}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_{i,0} & W_{i,0} & y_{i,T} & W_{i,T} & y_{i,2T} & W_{i,2T} & y_{i,3T} & W_{i,3T}^{-1} \end{pmatrix}$$

Llamamos  $M$  al número de columnas de  $Z_i$ . Ahora se define el vector de errores diferenciados:

$$v_i = (u_{i,2T} - u_{i,T}, \dots, u_{i,5T} - u_{i,4T})' \quad (16.42)$$

Los supuestos previamente señalados, junto con el supuesto de no correlación serial de orden  $t$ , implica que  $E(Z_i'' v_i) = 0$ , donde  $0$  es un vector nulo de  $M \times 1$ . Así  $Z_i'' v_i(\theta)$  es un conjunto de  $M$  funciones que satisfacen la condición de ortogonalidad  $E[Z_i'' v_i(\theta)] = 0$ .

Por lo tanto, los resultados de Hansen (1982) implican qué se obtenga una estimación consistente de  $\theta$  pueda obtenerse de la siguiente manera:

$$\theta_j = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i' v_i \right)' A_j \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_i' v_i \right) \quad (16.43)$$

Donde N es el número de piases de la muestra, y  $A_j$  es una matriz simétrica postvia semi-definida de dimensión (M X M). Se introducirá la notación siguiente:

$$X_i = [X'_{i,0}, \dots, X'_{i,T\tau}]' \quad (16.44)$$

$$y_i = [y_{i,0}, \dots, y_{i,T\tau}]' \quad (16.45)$$

$$Z = (Z'_1 \dots Z'_i \dots Z'_N)' \quad (16.46)$$

$$X = (\Delta X'_1 \dots \Delta X'_i \dots \Delta X'_N)' \quad (16.47)$$

$$y = (\Delta y_1 \dots \Delta y_i \dots \Delta y_N)' \quad (16.48)$$

Z, X, e y, tienen respectivamente dimensiones de NT X M, NT X K, y NT X 1. La solución al problema de la ecuación (16.43) puede expresarse como:

$$\theta_j = (X' Z A_j Z' X)^{-1} X' Z A_j Z' y \quad (16.49)$$

La matriz de covarianza de  $\theta_j$  es:

$$\Lambda = (E[Z_i' X_i] A_j^* E[Z_i X_i])^{-1} E[Z_i' X_i] A_j^* E[Z_i v_i v_i' Z_i] A_j^* E[Z_i X_i] (E[Z_i' X_i] A_j^* E[Z_i X_i])^{-1} \quad (16.50)$$

Donde  $A_j^*$  es el limite de probabilidad de  $A_j$ . Un estimador consistente de  $\Lambda$  es:

$$\Lambda_j = N (X' Z A_j Z' X)^{-1} X' Z A_j \left( \sum_{i=1}^N Z_i' \hat{v}_i \hat{v}_i' Z_i \right) A_j Z' X (X' Z A_j Z' X)^{-1} \quad (16.51)$$

Donde  $\hat{v}_i \equiv \Delta y_i - \Delta X_i \theta_j$  es un estimador de los errores  $v_i$  en diferencias.

Se logra la optimalidad si  $A_j^* = E[Z_i'v_iv_i'Z_i']$  entonces la matriz de varianza-covarianza esta siendo explotada para la condición del momento. Arellano y Bond (1991) sugieren un procedimiento en dos pasos. El primero consiste en asumir que los errores  $\epsilon_{i,t}$  son independientes y tienen una distribución normal, con una varianza constante  $\sigma_\epsilon^2$ , esto implica que:

$$E[v_iv_i'] = \sigma_\epsilon^2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix} \equiv \sigma_\epsilon^2 H \quad (16.52)$$

En el primer paso se estiman  $\theta, \theta_1$ , será obtenido usando  $A_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Z_i'HZ_i)^{-1}$  en la ecuación ( $\theta_j$ ).  $\theta_1$  son consistentes y asintóticamente eficientes si se asume correctamente el supuesto de homocedasticidad. En el segundo paso se relaja el supuesto de homocedasticidad. Los errores estimados en el primer paso serán utilizados para construir una estimación consistente de la matriz de varianza-covarianza del momento de condición. Entonces en el segundo paso se utiliza una matriz ponderada  $A_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Z_i' \widehat{v}_i \widehat{v}_i' Z_i)^{-1}$

### Estimador System GMM.

A continuación se considerara unos estimadores que pueden tener propiedades superiores para muestras finitas que el GMM. A los supuestos señalados en el método GMM se agrega el siguiente supuesto que Blundell y Bond (1998) señalan:

$$E(\eta_i \Delta y_{i2}) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, N \quad (16.53)$$

Este supuesto requiere una restricción de estacionaridad en las condiciones iniciales de  $y_{i,1}$ . La condición que señala Blundell y Bond se mientie, si la medida de las series de  $y_{i,1}$ , difeire entre los individuos y son constantes entre los periodos 1, 2,..., T para cada individuo. Combinando el modelo AR (1) con el conjunto de ecuaciones:  $E(\eta_i) = 0; E(v_i) = 0; E(v_i \eta_i) = 0; E(v_{it} v_{is}) = 0 \quad s \neq t; E(y_{i1} v_{it}) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, N \text{ y } t = 2, \dots, T$ . Se asume que los momentos lienales de concidion será T - 2.



$$E(v_{it}\Delta y_{i,t-1}) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, N \text{ y } t = 3, 4, \dots, T \quad (16.55)$$

Esto nos permite utilizar las primeras diferencias rezagadas como para la ecuación en niveles, tal como lo sugiere Arellano y Bover (1995).

Entonces se pueden construir los estimadores GMM que exploten ambos momentos de condición  $E(y_{i,t-s}\Delta v_{it}) = 0$  para  $t = 3, \dots, T$  y  $s \geq 2$ ; y  $E(v_{it}\Delta y_{i,t-1}) = 0$ . Este sistema utiliza  $(T - 2)$  ecuaciones en primera diferencias, y  $(T - 2)$  ecuaciones en niveles, correspondientes a los periodos  $3, \dots, T$  para poder observar los instrumentos utilizados. La matriz de instrumentos utilizados en el sistema puede ser escrita como:

$$Z_i^+ = \begin{bmatrix} Z_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta y_{i2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \Delta y_{i3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Delta y_{i,T-1} \end{bmatrix} \quad (16.56)$$

El conjunto completo de los momentos de condición de segundo orden dispone dado el supuesto hecho en la ecuación (16.53) que puede ser expresado como:

$$E(Z_i^+ v_i^+) = 0 \quad (16.57)$$

Dónde:

$$v_i^+ = (\Delta v_{i3}, \dots, \Delta v_{iT}, v_{i3}, \dots, v_{iT})' \quad (16.58)$$

Los estimadores del sistema GMM combina el conjunto de ecuaciones en primera diferencias con los rezagos de los instrumentos apropiadamente utilizados, con un conjunto adicional de ecuaciones en niveles con instrumentos apropiadamente rezagados en primeras diferencias. Aunque los niveles de la variable  $y_{it}$  están correlacionados necesariamente con los efectos específicos individuales  $\eta_i$ . Suponiendo (16.53) se requiere que las primeras diferencias de  $\Delta y_{it}$  no estén correlacionadas con  $\eta_i$  permitiendo rezagar las primeras diferencias para ser usadas como instrumentos en la ecuación.

**Bibliografía:**

- Abramowitz, M. (1956). Resource and output trend in the United States since 1870. American Economic Review.

- Abreu, M., de Groot, H. L. F. R. and Florax, R. G. M. (2005). A meta-analysis of beta convergence.
- Amemiya, T. (1967). A note on the estimation of Balestra-Nerlove models. Technical Report No. 4. Institute for Mathematical Studies in Social Sciences, Stanford University.
- Anderson, T. W., & Hsiao, C. (1981). Estimation of dynamic models with error components. *Journal of the American statistical Association*.
- Anderson, T. W., & Hsiao, C. (1982). Formulation and estimation of dynamic models using panel data. *Journal of econometrics*.
- Arellano, M., & Bond, S. (1991). Some tests of specification for panel data: Monte Carlo evidence and an application to employment equations. *The Review of Economic Studies*.
- Arellano, M., & Bond, S. (1991). Some tests of specification for panel data: Monte Carlo evidence and an application to employment equations. *The Review of Economic Studies*.
- Arellano, M., & Bover, O. (1995). Another look at the instrumental variable estimation of error-components models. *Journal of econometrics*
- Arnold, V; Bardhan, I; Cooper, W; and Gallegos, A (1998), Primal and dual optimality in computer codes using Two – Stage solution procedures in DEA.
- Badunenko, O., Henderson, D., and Russell, R. (2008) Bias-Corrected Production Frontiers: Application to Productivity Growth and Convergence. University of California Riverside, unpublished.
- Ball, V. E., San Juan, C., and Ulloa, C. (2012). State Productivity Growth: Catching Up and the Business Cycle. In 2012 Annual Meeting, August 12-14, 2012, Seattle, Washington (No. 123334). Agricultural and Applied Economics Association.
- Banker, Cooper, W; Seiford, L; Thrall, M; and Zhu Joe (2004), Returns to scale in different DEA models. *European Journal of Operational Research* 154.
- Banker, R.; Charnes, A; and Cooper, W (1984), Some models for estimating technical and scale efficiencies in DEA. *Management Science* 30.

- Barger, H. (1969). Growth in developed nations. *The Review of Economics and Statistics*.
- Barro, Robert J. and Sala-i-Martin, X. (1992) Convergence. *Journal of Political Economy*.
- Barro, Robert. (2012) Convergence and Modernization Revisited. Nobel Symposium, Stockholm, September.
- Baumol, W. (1986) Productivity Growth, Convergence and Welfare: What the Long Run Data Show? *American Economic Review*.
- Baumol, W., Nelson, R. and Wolff, E. (1994) Introduction: The Convergence of Productivity, Its Significance, and Its Varied Connotations., in William J. Baumol, Richard R. Nelson, and Edward N. Wolff, eds., *Convergence of Productivity: Cross National Studies and Historical Evidence*. New York, Oxford University Press.
- Bergson, A. (1975) Index numbers and the computation of factor productivity. *Review of Income and Wealth*.
- Blundell, R., & Bond, S. (1998). Initial conditions and moment restrictions in dynamic panel data models. *Journal of econometrics*.
- Bond, S. R., Hoeffler, A., & Temple, J. (2001). GMM Estimation of Empirical Growth Models.
- Bournakis, Ioannis (2012) Sources of TFP Growth in a Framework of Convergence-Evidence from Greece. *International Review of Applied Economics*.
- Boussemart, Jean-Philippe., Briec, W. and Tavera, C. (2009) More Evidence on Technological Catching-up in the Manufacturing Sector. *Applied Economics*.
- Buddelmeyer, H., Jensen, P., Oguzoglu, U., & Webster, E. (2008). Fixed effects bias in panel data estimators. Available at SSRN 1136288.
- Bun, M. J., & Carree, M. A. (2005). Bias-corrected estimation in dynamic panel data models. *Journal of Business & Economic Statistics*.
- Bun, M. J., & Kiviet, J. F. (2001). The accuracy of inference in small samples of dynamic panel data models.

- Bun, M. J., & Kiviet, J. F. (2001). The accuracy of inference in small samples of dynamic panel data models.
- Caselli, F., Esquivel, G., and Lefort, F. (1996). Reopening the convergence debate: a new look at cross-country growth empirics. *Journal of Economic Growth*.
- Cass, David (1965) Optimal Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. *The Review of Economic Studies*.
- Caves, D. W., Christensen, L. R., and Diewert W. (1982) Multilateral Comparison of Output, Input, and Productivity Using Superlative Index Numbers. *Economic Journal*.
- Caves, D. W., Christensen, L. R., and Diewert W. (1982) The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output, and Productivity. *Econometrica*.
- Chamberlain, G. (1982). Multivariate regression models for panel data. *Journal of Econometrics*.
- Chamberlain, G. (1983), "Panel Data," in Z. Griliches and M. Intriligator (editors),
- Charnes, A., & Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval Research logistics quarterly*.
- Charnes, A; Cooper, W; and Rhodes E (1978), Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research* 2.
- Christensen, L. R., & Jorgenson, D. W. (1970). US real product and real factor input, 1929–1967. *Review of Income and Wealth*.
- Christensen, L. R., Cummings, D., & Jorgenson, D. (1980). Economic growth, 1947-73; an international comparison. In *New developments in productivity measurement* (pp. 595-698). University of Chicago Press.
- Christensen, L. R., Cummings, D., & Jorgenson, D. W. (1981). Relative productivity levels, 1947–1973: An international comparison. *European Economic Review*.
- Coelli, T. J., and Rao, D. S. (2005). Total factor productivity growth in agriculture: a Malmquist index analysis of 93 countries, 1980–2000. *Agricultural Economics*.

- Cooper, W; Seiford, L; and Zhu, J (2004), Handbook on data envelopment analysis, Boston: Kluwer Academic.
- CREMed. Sumario del Anuario IEMed del Mediterráneo (2009). Convergencias y divergencias económicas de los países del sur del Mediterráneo con la Unión Europea. Center for Research on the Economies of the Mediterranean, Barcelona.
- Denison, E. F., & Poulhier, J. P. (1967). Why growth rates differ. Postwar experience in western countries. ([By] Edward F. Denison. Assisted by Jean-Pierre Poulhier.).
- Di Liberto, A., & Usai, S. (2013). TFP convergence across European regions: a comparative spatial dynamics analysis. In Geography, Institutions and Regional Economic Performance (pp. 39-58). Springer Berlin Heidelberg.
- Di Liberto, A., Pigliaru, F., & Chelucci, P. (2011). International TFP dynamics and human capital stocks: a panel data analysis, 1960–2003. Review of Income and Wealth.
- Di Liberto, A., Pigliaru, F., & Mura, R. (2008). How to measure the unobservable: a panel technique for the analysis of TFP convergence. Oxford Economic Papers.
- Di, L., Adriana, Pigliaru, F. and Chelucci, P. (2008) International TFP Dynamics and Human Capital Stocks: A Panel Data Analysis, 1960 – 2003. Review of Income and Wealth (forthcoming).
- Diewert, E., & Lawrence, D. (1999). Measuring New Zealand's Productivity (No. 99/05). New Zealand Treasury.
- Diewert, W. E. (1976). Exact and superlative index numbers. Journal of econometrics.
- Diewert, W. E., & Nakamura, A. O. (2003). Index number concepts, measures and decompositions of productivity growth. Journal of Productivity Analysis.
- Dollar, D., and Wolff, E. N. (1994). Capital intensity and TFP convergence by industry in manufacturing, 1963-1985. Convergence of Productivity: Cross-National Studies and Historical Evidence. Oxford University Press, Oxford, 197-224.
- Dougherty, C., and Jorgenson, D. W. (1996). International comparisons of the sources of economic growth. The American Economic Review.

- Escribano, Á., and Stucchi, R. (2008). Catching up in total factor productivity through the business cycle: evidence from Spanish manufacturing surveys.
- Färe, R., Grosskopf, S., Norris, M., and Zhang, Z. (1994) Productivity Growth, Technical Progress, and Efficiency Change in Industrialized Countries. *American Economic Review*.
- Farrell, M. (1957) The Measurement of Productive Efficiency. *Journal of the Royal Statistics Society*.
- Gallup, Luke, J. (2012) The Global Convergence of Income Distribution. Unpublished.
- George, D. A., Oxley, L., & Carlaw, K. (2003). Economic growth in transition. *Journal of Economic Surveys*.
- Handbook of Econometrics.
- Hansen, L. P. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*.
- Holtz-Eakin, D., Newey, W., & Rosen, H. S. (1988). Estimating vector autoregressions with panel data. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*.
- Hsiao, C., Hashem Pesaran, M., & Kamil Tahmiscioglu, A. (2002). Maximum likelihood estimation of fixed effects dynamic panel data models covering short time periods. *Journal of econometrics*.
- Hulten, C. R. (2000). Total factor productivity. A short biography. In *New developments in productivity analysis* (pp. 1-54). University of Chicago Press.
- Islam, N. (2003). Productivity dynamics in a large sample of countries: a panel study. *Review of Income and Wealth*.
- Islam, Nazrul (1995) Growth Empirics: A Panel Data Approach. *Quarterly Journal of Economics*.
- Islam, Nazrul (2000) Small Sample Performance of Dynamic Panel Data Estimators in Estimating the Growth-Convergence Equation: A Monte Carlo Study. *Advances in Econometrics*.

- Islam, Nazrul (2001) Different Approaches to International Comparison of Total Factor Productivity. New developments in productivity analysis.
- Islam, Nazrul (2003) What Have We Learn from the Convergence Debate. Journal of Economics.
- Jorgenson, D. W., & Griliches, Z. (1967). The explanation of productivity change. The Review of Economic Studies.
- Jorgenson, D. W., and Griliches, Z. (1967). The explanation of productivity change. The Review of Economic Studies.
- Jorgenson, D. W., and Nishimizu, M. (1978). US and Japanese economic growth, 1952-1974: an international comparison. The Economic Journal.
- Judson, R. A., & Owen, A. L. (1999). Estimating dynamic panel data models: a guide for macroeconomists. Economics letters.
- Kiviet, J. F. (1995). On bias, inconsistency, and efficiency of various estimators in dynamic panel data models. Journal of econometrics.
- Kiviet, J. F. (1999). Expectations of expansions for estimators in a dynamic panel data model; some results for weakly-exogenous regressors (No. 98-027/4). Tinbergen Institute.
- Koopmans, T. C. (1965) On the Concept of Optimal Economic Growth. The Economic Approach to development Planning.
- Kravis, I. B. (1976). A survey of international comparisons of productivity. The Economic Journal.
- Kutan, A. M., and Yigit, T. M. (2007). European integration, productivity growth and real convergence. European Economic Review.
- Laos, E. H. (2007). La productividad multifactorial: concepto, medición y significado. Economía: Teoría y práctica.
- Lau C. K. M. (2009) New Evidences about Convergence across States., International Research Journal of Finance and Economics.
- Li, K. W., and Zhou, X. (2011). Cross-country Convergence and Growth: Evidence from Nonparametric and Semiparametric Analysis.



- Lipsey, R. G., & Carlaw, K. I. (2004). Total factor productivity and the measurement of technological change. *Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'économique*.
- Madsen, J. B. (2008). Economic growth, TFP convergence and the world export of ideas: A century of evidence. *The Scandinavian Journal of Economics*.
- Madsen, J. B., and Timol, I. (2011). Long-run convergence in manufacturing and innovation-based models. *Review of Economics and Statistics*.
- Mahmood, A., and Afza, T. (2008). Total Factor Productivity Growth in East Asia: A Two Pronged Approach. *European Journal of Economics, Finance and Administrative Sciences*.
- Malmquist, S. (1953) Index Numbers and Indifference Surfaces. *Trabajos de Estadística y de Investigación Cooperativa*.
- Mankiw, N. Gregory, Romer, D., and Weil, D. (1992) A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*.
- Maudos, J., Pastor, M., Jose and Serrano, L. (2000) Convergence in OECD Countries: Technical Change, Efficiency and Productivity. *Applied Economics*.
- Mawson, P., Carlaw, I., Kenneth and Mclellan, N., (2003) Productivity Measurement Alternative Approaches and Estimates. *Treasury.govt.nz*.
- Mundlak, Y. (1978). On the pooling of time series and cross section data. *Econometrica: journal of the Econometric Society*.
- Nickell, S. (1981). Biases in dynamic models with fixed effects. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*.
- Nickell, S. (1981). Biases in dynamic models with fixed effects. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*.
- Ozgen, C., Nijkamp, P., and Poot, J. (2010). The effect of migration on income growth and convergence: Meta-analytic evidence. *Papers in Regional Science*, 89(3), 537-561.

- Quindós, M. del pilar, Rubiera, F. and Vicente, M. Rosalía (2003) Análisis Envolvente de Datos: Una Aplicación al Sector de los Servicios Avanzados a las Empresas del Principado de Asturias. DIALNET OAI Articles.
- Quindós, P; Rubiera, F; and Vicente Cuervo, M (2003), Analisis envolvente de datos: Una aplicación al sector de los servicios avanzados a las empresas del principado de Asturias.
- Rabanal, P., Rubio-Ramirez, J. F., and Tuesta, V. (2011). Cointegrated TFP processes and international business cycles. *Journal of Monetary Economics*.
- Ramsey, F. P (1928) A Mathematical Theory of Saving. *The Economic Journal*.
- Sala-i-Martin, Xavier (1990) On Growth and States. PH. D. Dissertation, Harvard University.
- Sala-i-Martin, Xavier (1996) The Classical Approach to Convergence Analysis. *Economic Journal*.
- Shephard, R. W. (1953) Cost and Production Functions. Princeton: Princeton University Press.
- Solow, R. M. (1957). Technical change and the aggregate production function. *The review of Economics and Statistics*.
- Solow, Robert M. (1956) A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*.
- Statistics Canada (1998) Catalogue No. 13–568
- Tinbergen, J. (1959). On the theory of trend movements. In Jan Tinbergen, selected papers, trans. H. Wilke, 182–221. Amsterdam: North-Holland. (Originally published as Tinbergen, J. 1942. Zur theorie der langfristigen wirtschaftsentwicklung. *Weltwirtschaftliches Archiv* 55 [1]: 511–49.).
- Triki, D., Chaffai, M., and Plane, P. (2005). Total Factor Productivity within the Tunisian manufacturing sectors and international convergence with OECD countries (No. 200502).
- Varblane, U. and Vather, P. (2005) An Analysis of the Economic Convergence Process in the Transition countries. University of Tartu Economics and Business.

- Whelan, K., and McQuinn, K. (2006). Conditional convergence revisited: taking Solow very seriously. Central Bank of Ireland.
- Young, A., Higgins, M., and Levy, D. (2007). Heterogeneous convergence. Emory Law and Economics Research Paper.