UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Dos Juegos Topológicos Clásicos

Tesis que presenta
David Guerrero Sánchez
para la obtención del título de
Maestro en Ciencias
(Matemáticas)
Dirigida por:
Dr. Vladimir Tkachuk

Unidad Iztapalapa
Departamento de Matemáticas

México
1 de Noviembre de 2007

Índice general

Ha menester

Puesto que sin las condiciones necesarias es imposible alcanzar las conclusiones. Gracias a *Guru Ram Das*

A mis padres,

A mis hermanos

A Siri Chand Kaur

A mis amigos

Al Dr. Vladimir Tkachuk

Al Dr. Ángel Tamariz

Al Dr. Richard Wilson

A la Universidad Autónoma Metropolitana

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

A vos

Introducción

Uno de los objetivos principales de Topología General es la clasificación y caracterización de los espacios topológicos. Para conseguirlo se han empleado técnicas, conocimientos y herramientas tanto de Topología General como de otras áreas de las Matemáticas. La Teoría de Juegos es un buen ejemplo de la incorporación de métodos de otras áreas en Topología. Con base en la idea de que el resultado de un partido de algún juego no depende de la habilidad de los participantes ni de la dinámica del juego sino del terreno, lugar o más específicamente del espacio en el que se realiza, es que se lleva a cabo la exploración de los espacios topológicos por medio de las herramientas de la Teoría de Juegos. El uso de conceptos básicos de la Teoría de Juegos, como estrategias, victorias o neutralidad (entre otros), permite establecer características topológicas de ciertos espacios. Para subrayar que las aplicaciones de la Teoría de Juegos que aqui se estudian, se realizan en el área de Topología General, se aplica el término "Juegos Topológicos"

En este trabajo se presentan algunas técnicas y resultados derivados del estudio de dos juegos topológicos. El primero se llama "Cubiertas Forzadas", y fue descubierto e investigado independientemente por F. Galvin y R. Telgarsky, y presentado por este último en su artículo [29]. Se trata de una competencia, sobre algún espacio, entre dos jugadores I y II en la que alternadamente I elige puntos y II elige abiertos que contienen tales puntos y I gana si obliga a II a cubrir el espacio. En los artículos [29] y [30] de R. Telgarsky, se muestra que la existencia de una estrategia ganadora para el primero de los jugadores permite caracterizar espacios compactos dispersos, identificar espacios σ-dispersos y asegurar la existencia de una estrategia ganadora para el mismo jugador sobre la ω-modificación del espacio además de aportar información acerca de algunas funciones cardinales topológicas del espacio tales como el pseudocarácter, la cardinalidad y el número de Lindelöf. R. Telgarsky también investiga cómo es la topología de los espacios donde el jugador II tiene una estrategia ganadora y concluye que hay fuertes restricciones sobre la propiedad de ser espacio P y la de Lindelöf para un espacio con estas características.

Como sucede con cualquier juego (sea topológico o no), una de las finalidades de sus practicantes es encontrar un espacio neutral. Esto es, uno en el que ningún jugador tenga ventaja alguna (estrategia ganadora). Un planteamiento similar de esta situación es el siguiente: dado un espacio arbitrario, cómo saber si alguno de los jugadores tiene una estrategia ganadora para el juego de Cubiertas Forzadas. F. Galvin muestra, en su artículo [13], que existen modelos compatibles con ZFC en los cuales el jugador II tiene una estrategia ganadora para cualquier conjunto no numerable contenido en la recta real. En ese trabajo también se prueba que, bajo la negación de la Hipótesis del Continuo aunada al Axioma de Martin (combinación que sigue siendo compatible con ZFC), existen subconjuntos no numerables de la recta real para los cuales el jugador II no tiene estrategia ganadora, lo que los hace neutrales para el juego de Galvin-Telgarsky. En la sección final del primer capítulo de esta tesis se presenta una construcción dentro de ZFC de un espacio neutral para el juego en cuestión, como la reporta Telgarsky en [30].

El segundo capítulo está dedicado al estudio del juego que se llama "Selecciones Densas", presentado e investigado por A.J. Berner e I. Juhász en el artículo [21]. La dinámica de este juego consiste en que dos jugadores I y II alternan turnos. En cada ronda el primer jugador elige un subconjunto abierto U de un espacio X y el jugador II responde escogiendo un punto $x \in U$. El competidor I gana si el conjunto de puntos tomados por el segundo resulta denso en el espacio X al final del partido. Los espacios en los que el primer jugador tiene una estrategia ganadora se caracterizan por su π-peso numerable. Cuando el segundo jugador es quien tiene tal estrategia sobre un espacio X, es posible acotar la densidad de X. Al intentar resolver el problema de establecer si el juego de Berner y Juhász está determinado o no sobre un espacio arbitrario se consideran modelos compatibles con ZFC. En el caso de asumir CH se muestra que este juego está determinado en la clase de los espacios compactos. Al considerar la negación de CH junto con MA, Juhász en [22] muestra que cualquier subespacio denso numerable del cubo de Cantor es neutral para el juego de selecciones densas.

En suma, se puede decir que las técnicas de la Teoría de Juegos brindan herramientas muy poderosas en Topología, que aportan nuevos métodos de estudio hasta en el caso de los subconjuntos de la recta real. Así, es posible visualizar, de manera geométrica y transparente, cómo se llega a la frontera del conocimiento topológico por medio de las técnicas aquí expuestas. Se espera que lo mencionado hasta ahora ilustre la relevancia del estudio de las aplicaciones de Teoría de Juegos en Topología General. Fomentar el interés por la investigación en esta área del conocimiento se debe, entre otros motivos, a que existen aún problemas abiertos, naturales y atractivos dentro de la misma.

En los preliminares se presentan los resultados propios de la Topología General que se utilizan en las demostraciones de los enunciados de los demás capítulos de la tesis. En la mayoría de los casos se incluyen las demostraciones de las afirmaciones en los preliminares. Sin embargo, en algunos casos se omiten las pruebas y se ofrece al lector alguna referencia.

En la bibliografía aparecen tanto los libros y artículos citados en el texto principal de la tesis, como aquellos que contienen temas relacionados con los que aquí se desarrollan. De manera que el lector no sólo puede consultar las fuentes originales donde se publicaron por primera vez los resultados que se prueban en la tesis, sino que además puede ampliar su visión del estudio de las aplicaciones de la Teoría de Juegos en Topología General consultando los demás libros y artículos referidos.

Salvo que se indique otra cosa, todos los espacios que aparecen en el texto pertenecen a la clase de los espacios de *Tychonoff*. La notación empleada es la usual. Las letras X, Y, Z denotan, en general, espacios topológicos, mientras que x, y, z, p se usan para hacer referencia a puntos de algún espacio. Los ordinales son representados por las letras griegas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \xi$. Para designar la topología de un espacio X se escribe $\tau(X)$. La familia de todos los abiertos de X que contienen al punto x se designa $\tau(x, X)$; y si $F \subset X$, la familia de abiertos de X que contienen al conjunto F se denota $\tau(F, X)$. Las definiciones de las funciones cardinales topológicas que aquí se utilizan están tomadas de [19].

La letra $\mathbb{R}$ simboliza la recta real con la topología usual, mientras que ω representa el primer cardinal infinito y ω_1 se refiere al primer cardinal no numerable. Dado un espacio X y $A \subset X$, la cerradura de A en X se designa por $\overline{A}$ y si $A \subset D \subset X$, para denotar la cerradura de A en D se escribe $\overline{A}^D$ y el interior relativo de A en D se denota por $int_D(A)$.

Preliminares

P.1. Definición. Dado un espacio X sea $\psi(x, X) = \text{mín}\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subset \tau(X)$ y $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}\}$. El cardinal $\psi(X) = \sup\{\psi(x, X)\colon x \in X\}$ se llama pseudocarácter de X.

P.2. Definición. Sea X un espacio topológico; si cada conjunto no vacío $Y \subseteq X$ tiene un punto aislado entonces decimos que el espacio X es disperso.

P.3. Proposición. *Un espacio X es disperso si y sólo si cada subespacio cerrado no vacío de X tiene un punto aislado.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad es evidente así que basta probar la suficiencia. Si A es un subespacio no vacío de X, entonces $\overline{A}$ tiene un punto aislado a. Probaremos que $a \in A$.

Puesto que a es punto aislado de $\overline{A}$, el conjunto $\{a\}$ es abierto en $\overline{A}$, por lo que existe $U \in \tau(X)$ tal que $\{a\} = U \cap \overline{A}$. Pero $a \in U$ y $a \in \overline{A}$ implica $U \cap A \neq \varnothing$, es decir existe $b \in U \cap A \subset U \cap \overline{A} = \{a\}$; entonces $b = a \in A$.

P.4. Teorema. *Si X, Y son espacios topológicos, X es compacto y la función $f\colon X \to Y$ es continua de X sobre Y entonces f es un mapeo perfecto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $C \subset X$ un conjunto cerrado. Puesto que X es compacto, C también lo es, y como f es continua, $f(C)$ es compacto y por lo tanto cerrado en Y.

Para cada $y \in Y$ el conjunto $\{y\} \subset Y$ es cerrado, de modo que $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$ es cerrado en X, que es compacto, por lo que $f^{-1}(y)$ también lo es.

P.5. Proposición. *Supongamos que $f\colon X \to Y$ es una función perfecta. Entonces la restricción $f_A\colon f^{-1}(A) \to A$ de f al conjunto $f^{-1}(A)$ también es perfecta.*

Demostración. Para todo $y \in A$, el conjunto $f^{-1}(y) = f_A^{-1}(y)$ es compacto porque f es perfecta.

Sea F un conjunto cerrado en $f^{-1}(A)$. Existe $C \subset X$ cerrado tal que $F = C \cap f^{-1}(A)$, de donde $f_A(F) = f\left(C \cap f^{-1}(A)\right) = f(C) \cap A$; como $f(C)$ es cerrado en Y, el conjunto $f_A(F)$ es cerrado en A.

P.6. Definición. Sean X, Y espacios topológicos. Dada una función continua sobreyectiva $f\colon X \to Y$ decimos que f es irreducible si para cada cerrado $C \subset X$, si $C \neq X$, entonces $f(C) \neq Y$.

P.7. Teorema. *Supongamos que X es un espacio compacto, f es una función de X en Y perfecta y sobre. Entonces existe un cerrado $C \subset X$ tal que $f(C) = Y$ y la restricción de f a C es irreducible.*

Demostración. Supongamos que no se cumple el teorema, esto es que para cada cerrado $C \subset X$ tal que $f(C) = Y$ la función $f|_C$ es reducible. Con base en esta suposición, vamos a construir una familia bien ordenada por inclusión $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha < |X|^+\}$ de subconjuntos cerrados de X distintos no vacíos, lo cual no puede suceder. Comenzamos tomando $F_0 = X$. Por hipótesis existe un cerrado $F_1 \subset X$ tal que $f(F_1) = Y$ y $F_1 \neq F_0$. Análogamente existe un cerrado $F_2 \subset F_1$ tal que $f(F_2) = Y$ y $F_2 \neq F_1$. Si $\alpha < |X|^+$ es un ordinal límite y F_β está definido para cada $\beta < \alpha$, tomamos $F_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta$. El conjunto F_α es no vacío y $f(F_\alpha) = Y$ ya que para cada punto $y \in Y$, sucede que $f^{-1}(y) \cap F_\alpha = f^{-1}(y) \cap \left(\bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta\right) = \bigcap_{\alpha<\beta} \left(F_\beta \cap f^{-1}(y)\right) \neq \varnothing$, ya que $\{F_\beta \cap f^{-1}(y)\colon \beta < \alpha\}$ es una familia centrada de cerrados no vacíos en el compacto X. De esta manera se construyó la familia $\mathcal{F}$ y llegamos a una contradicción, así que se cumple el teorema.

P.8. Teorema. *Si X es un espacio compacto y disperso, $f\colon X \to Y$ una función continua de X sobre Y entonces Y es compacto y disperso.*

Demostración. El espacio Y es compacto por ser imagen continua del espacio X que es compacto. Para probar que Y es disperso tomemos un conjunto cerrado no vacío $A \subset Y$. Existe $C \subset f^{-1}(A)$ cerrado en $f^{-1}(A)$ tal que $f(C) = A$ y $f|_C$ es irreducible. Puesto que X es disperso, existe un punto aislado $x \in C$, por lo que $f\left(C \backslash \{x\}\right)$ es cerrado en A y distinto de A porque

$f|_C$ es irreducible. De aquí $\{f(x)\} = A \backslash f\left(C \backslash \{x\}\right)$ es abierto en A, o bien, $f(x)$ es punto aislado de A.

P.9. Teorema. *Sea X un espacio compacto. Si X no es disperso, entonces existe una función continua de X sobre el intervalo cerrado $[0, 1]$.*
Demostración. Vea el Teorema 3.16 de [20]

P.10. Teorema de Alexandroff-Hausdorff. *Para todo compacto metrizable K existe una función continua del conjunto de Cantor $\{0, 1\}^\omega$ sobre K.*
Demostración. Vea el problema 299 del capítulo III de [6]

P.11. Definición. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un espacio P si cada intersección numerable de abiertos de X es abierta en X.

P.12. Teorema de descomposición de espacios compactos dispersos. *Si X es un espacio compacto disperso no vacío entonces existe un único ordinal μ (llamado el índice de dispersión de X) y una familia $\{X_\alpha : \alpha \leq \mu\}$ de subconjuntos no vacíos de X (llamada la descomposición canónica de X) con las siguientes propiedades:*

1. *$X_0 = X$ y $X_{\alpha+1}$ es el conjunto de los puntos no aislados de X_α para todo $\alpha < \mu$;*
2. *Si $\alpha \leq \mu$ es un ordinal límite entonces $X_\alpha = \bigcap\{X_\beta : \beta < \alpha\}$;*
3. *El conjunto X_μ es finito. A este subespacio se le llama el núcleo de X.*

Demostración. La condición (1) nos obliga a hacer $X_0 = X$; procediendo de manera inductiva supongamos que se construyó el conjunto cerrado no vacío X_α de X. Si X_α es finito entonces hacemos $\mu = \alpha$. Si X_α es infinito entonces la condición (1) nos dice que $X_{\alpha+1}$ es el conjunto de los puntos no aislados de X_α. De la compacidad de X se sigue que $X_{\alpha+1} \neq \varnothing$. Si β es un ordinal límite y se definió el conjunto X_α para cada ordinal $\alpha < \beta$ entonces la familia $\{X_\alpha : \alpha < \beta\}$ es decreciente y consiste de subconjuntos compactos de X; por lo tanto, $X_\beta = \bigcap\{X_\alpha : \alpha < \beta\} \neq \varnothing$. Obsérvese que si un conjunto X_α es infinito entonces tiene puntos aislados por lo cual $X_{\alpha+1}$ es un subconjunto propio de X_α. De modo que si $\kappa = |X|^+$ entonces es imposible que tengamos construidos los conjuntos $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Consecuentemente, existe el primer ordinal μ tal que X_μ es finito.

Cabe mencionar que esta descomposición es factible en espacios dispersos arbitrarios, no necesariamente compactos, pero para nuestros propósitos ulteriores es conveniente asegurar que el núcleo del espacio sea finito. Algunos autores consideran al ordinal $\mu + 1$ como el índice de dispersión del espacio.

P.13. Proposición. *Dado un espacio compacto y disperso X con índice de dispersión μ, si $Y \subset X$ es cerrado y $Y \cap X_\mu = \varnothing$ entonces el índice ν de dispersión de Y es estrictamente menor que μ.*

Demostración. Sean $\{X_\alpha : \alpha \leq \mu\}$ y $\{Y_\alpha : \alpha \leq \nu\}$ las descomposiciones canónicas de X y Y. Para cada ordinal $\alpha < \mu$ sucede que si y no es punto aislado de Y_α entonces tampoco lo es de X_α, esto asegura que $Y_{\alpha+1} \subset X_{\alpha+1}$. De lo anterior se desprende que $Y_\mu \subset X_\mu$, así que la hipóteis $Y \cap X_\mu = \varnothing$ implica que $Y_\mu = \varnothing$. De la definición del índice de dispersión de Y se sigue que éste es estrictamente menor que μ.

P.14. Definición. Una familia ajena ρ de subconjuntos cerrados de un espacio X se llama dispersa si para cada subconjunto no vacío H de $\bigcup \rho$ existe un $S \in \rho$ tal que $S \cap H$ es un conjunto no vacío abierto del subespacio H.

P.15. Definición. Dado un espacio X y un cardinal infinito κ considérese la topología τ' en X generada por los conjuntos de tipo G_κ (intersección de una falmilia de abiertos cardinalidad κ) de X. El espacio (X, τ') se llama κ–modificación de X y se denota por $(X)_\kappa$.

P.16. Teorema (Uspensky). *Si X es un espacio disperso y $l(X) \leq \kappa$, entonces tampoco el número de Lindelöf de $(X)_\kappa$ excede a κ.*

Demostración. Tomemos una cubierta abierta $\mathcal{C}$ del espacio $(X)_\kappa$. Puesto que los conjuntos de tipo G_κ en X son una base para $(X)_\kappa$, podemos suponer que los elementos de $\mathcal{C}$ son de tipo G_κ en X. Considérese el conjunto $P = \{x \in X :$ existe $\mathcal{C}'_x \subset \mathcal{C}$ y $O_x \in \tau(x, X)$ tales que $|\mathcal{C}'_x| \leq \kappa$ y $x \in O_x \subset \bigcup \mathcal{C}'_x\}$. Basta probar que $P = X$ dado que en tal caso, para cada $x \in X$ existe O_x

en $\tau(x,X)$ con $O_x \subset \bigcup \mathcal{C}'_x$ y $|\mathcal{C}'_x| \leq \kappa$. Así que la cubierta $\{O_x : x \in X\}$ tiene una subcubierta de cardinalidad a lo más κ digamos $\{O_{x_\alpha} : \alpha < \kappa\}$ la cual induce que una familia $\bigcup\{\mathcal{C}_{x_\alpha} : \alpha < \kappa\}$ de cardinalidad menor o igual que $\kappa^2 = \kappa$, cubra todo X y es subfamilia de $\mathcal{C}$.

Para probar que $P = X$ supongamos lo contrario. El hecho de que X es disperso asegura que existe un punto aislado $x \in X \backslash P$. Esto significa que hay un $W \in \tau(x,X)$ tal que $W \cap (X \backslash P) = \{x\}$. Por la regularidad de X podemos encontrar un $V \in \tau(x,X)$ tal que $\overline{V} \subset W$. Es posible tomar un $C \in \mathcal{C}$ que contiene al punto x. Hemos supuesto que $C = \bigcap\limits_{\alpha \in \kappa} U_\alpha$ con $U_\alpha \in \tau(X)$ para cada $\alpha < \kappa$. Definimos $F_\alpha = \overline{V} \backslash U_\alpha$, de manera que $F_\alpha \subset P$ es cerrado en X por lo que $l(F_\alpha) \leq \kappa$ para cada $\alpha < \kappa$. De lo anterior se sigue que existe una familia $\mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{C}$ tal que $|\mathcal{H}_\alpha| \leq \kappa$ y $F_\alpha \subset \bigcup \mathcal{H}_\alpha$. Si $\mathcal{H} = \bigcup\limits_{\alpha < \kappa} \mathcal{H}_\alpha$ entonces $\overline{V} \backslash C \subset \bigcup \mathcal{H}$, por lo que $\overline{V} \subset (\bigcup \mathcal{H}) \cup \{C\}$. Esto implica que V es una vecindad de x que está contenida en la unión de la familia $(\bigcup \mathcal{H}) \cup \{C\}$, misma que tiene cardinaliad menor o igual que κ, y está formada por elementos de $\mathcal{C}$. De modo que $x \in P$, es decir obtuvimos una contradicción que muestra que $X = P$ y por lo tanto el número de Lindelöf de $(X)_\kappa$ no excede a κ.

P.17. Teorema. *Supongamos que X es un espacio P de Lindelöf y $f : X \to Y$ es una función continua de X sobre un espacio segundo numerable. Entonces Y es numerable.*

Demostración. Para cada $y \in Y$ el conjunto $\{y\}$ es de tipo G_δ en Y. Se sigue que $f^{-1}(y)$ es G_δ en X así que la cubierta $\{f^{-1}(y) : y \in Y\}$ es abierta y tiene una subcubierta numerable $\{f^{-1}(y_i) : i \in \omega\}$. Del hecho de que $\bigcup\{f^{-1}(y_i) : i \in \omega\} = X$ se deduce que $Y = \{y_i : i \in \omega\}$.

P.18. Lema. *Para todo espacio X se tiene que $w(X) \leq 2^{d(X)}$.*

Demostración. Por la regularidad del espacio X existe una base $\mathcal{B}$ de cardinalidad $w(X)$ tal que para cada $B \in \mathcal{B}$ tenemos que $B = int(\overline{B})$. Tomemos un comjunto $S \subset X$ tal que S es denso en X y $|S| = d(X)$. Definimos $\varphi : B \to \exp(S)$ por $\varphi(B) = \overline{B} \cap S$. De la igualdad $\overline{B \cap S} = \overline{B}$ para toda $B \in \mathcal{B}$ se sigue que la función φ es inyectiva, así que $w(X) \leq 2^{d(X)}$.

P.19. Lema (Shura-Bura). *Para cualquier espacio X, si $U \in \tau(X)$ y $\mathcal{F}$ es una familia de compactos de X tal que $\bigcap \mathcal{F} \subset U$, entonces existe una subfamilia finita $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ para la cual $\bigcap \mathcal{F}' \subset U$.*

Demostración. Supongamos que si $\mathcal{F}'$ es cualquier subfamilia finita de $\mathcal{F}$ entonces $(\bigcap \mathcal{F}')\backslash U \neq \varnothing$. Esta condición implica que la familia de compactos $\{F\backslash U : F \in \mathcal{F}\}$ es centrada porque para $F_1, \ldots, F_n$ en $\mathcal{F}$ sucede que $\Big(F_1\backslash U\Big) \cap \ldots \cap \Big(F_n\backslash U\Big) = (F_1 \cap \ldots \cap F_n)\backslash U \neq \varnothing$ según hemos supuesto. De la compacidad de los elementos de $\mathcal{F}$ se sigue que $\bigcap\{F\backslash U : F \in \mathcal{F}\} \neq \varnothing$ lo que contradice que $\bigcap \mathcal{F} \subset U$. Dicha contradicción muestra que existe una subfamilia finita $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ tal que $\bigcap \mathcal{F}' \subset U$.

P.20. Lema. *Sea X un espacio compacto y F un subconjunto cerrado de X, entonces $\psi(F, X) = \chi(F, X)$.*

Demostración. Es evidente que $\psi(F, X) \leq \chi(F, X)$, probaremos solamente que $\psi(F, X) \geq \chi(F, X)$. Sea κ un cardinal infinito y supongamos que $\mathcal{U} \subset \tau(X)$ y $F = \bigcap \mathcal{U}$ con $|\mathcal{U}| \leq \kappa$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, la condición $F \subset U$ y la normalidad del espacio X implican que existe $W_U \in \tau(X)$ tal que $F \subset W_U \subset \overline{W}_U \subset U$. Hagamos $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup \{W_U : U \in \mathcal{U}\}$. Es inmediato que $|\mathcal{U}'| \leq \kappa$. Sea $\mathcal{V}$ la familia de todas las intersecciones finitas de los elementos de $\mathcal{U}'$ Sucede que $|\mathcal{V}| \leq \kappa$ y $\mathcal{V}$ es base externa de F. En efecto, si $F \subset O \in \tau(X)$, la igualdad $F = \bigcap \mathcal{U}'$, la contención $F \subset W_U$ para todo $U \in \mathcal{U}'$ y el hecho de que $\overline{W}_U \subset U$ implican que $F = \bigcap\{\overline{W}_U : U \in \mathcal{U}\} \subset O$. Por el Lema de Shura–Bura existen $\overline{W}_{U_1}, \ldots, \overline{W}_{U_n}$ tales que $\overline{W}_{U_1} \cap \ldots \cap \overline{W}_{U_n} \subset O$ así que $F \subset W_{U_1} \cap \ldots \cap W_{U_n} \subset O$ con $W_{U_1} \cap \ldots \cap W_{U_n} \in \mathcal{V}$. Esto muestra que $\mathcal{V}$ es una base externa de F en X y se concluye que $\psi(F, X) = \chi(F, X)$.

P.21. Lema. *Consideremos una π-base $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$, formada por conjuntos tipo F_σ de un espacio compacto X de π-peso igual a ω_1, así como a la familia $\mathcal{F} = \{F \subset X : F \neq \varnothing,\ F$ es G_δ y cerrado en $X\}$. Si $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ y $|\mathcal{F}'| \leq \omega$, entonces existe un ordinal $\alpha < \omega_1$ tal que para cada $F \in \mathcal{F}'$ se cumple que $F\backslash B_\alpha \neq \varnothing$.*

Demostración. Para cada $F \in \mathcal{F}'$ existe una familia $\mathcal{C}_F$ que es base externa numerable de F puesto que X es compacto y F es cerrado y de tipo G_δ en X. Tomemos $\mathcal{A} = \bigcup\{\mathcal{C}_F : F \in \mathcal{F}'\}$; la familia $\mathcal{A}$ es numerable y está formada de abiertos no vacíos. Supongamos que no se cumple el lema, esto es que para cada ordinal $\alpha < \omega_1$ existe un $F \in \mathcal{F}'$ tal que $F \subset B_\alpha$, entonces existe también un $U \in \mathcal{C}_F \subset \mathcal{A}$ tal que $U \subset B_\alpha$, por lo que para cada $B_\alpha \in \mathcal{B}$ existe un elemento $U \in \mathcal{A}$ tal que $U \subset B_\alpha$, lo que implica que $\mathcal{A}$ es una π–base numerable del espacio X. De esta contradicción podemos concluir que existe algún ordinal $\alpha < \omega_1$ para el cual se cumple que $F \backslash B_\alpha \neq \varnothing$ para cada $F \in \mathcal{F}'$.

P.22. Lema. *Bajo las hipótesis del lema anterior se cumple que para cada ordinal $\alpha < \omega_1$ existe un elemento $C_\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $C_\alpha \subset B_\alpha$.*

Demostración. Sea α cualquier ordinal en ω_1. Puesto que $B_\alpha \in \mathcal{B}$ sucede que $B_\alpha \neq \varnothing$, así que existe $x \in B_\alpha$; por la regularidad del espacio X hay un abierto $U_0 \in \tau(X)$ tal que $x \in U_0 \subset \overline{U}_0 \subset B_\alpha$. Supongamos que para un natural n se han definido los conjuntos abiertos no vacíos $U_0, \ldots, U_n$ de manera que $x \in U_n \subset \overline{U}_n \subset U_{n-1} \subset \overline{U}_{n-1} \subset \ldots \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset B_\alpha$, aplicamos nuevamente la regularidad del espacio X para encontrar un conjunto abierto no vacío U_{n+1} tal que $x \in U_{n+1} \subset \overline{U}_{n+1} \subset U_n \subset \overline{U}_n \subset \ldots \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset B_\alpha$. Sea $C_\alpha = \bigcap_{n\in\omega} \overline{U}_n \subset B_\alpha$. Las igualdades $\bigcap_{n\in\omega} \overline{U}_n = \bigcap_{n\in\omega} U_n = C_\alpha$ implican que el conjunto C_α es cerrado de tipo G_δ, en X por lo que $C_\alpha \in \mathcal{F}$.

P.23. Lema. *Los conjuntos cocero forman una base de cualquier espacio (recordemos que sólo trabajamos con espacios de Tychonoff).*

Demostración. Es un hecho conocido que si $U \in \tau(\mathbb{R})$ y $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces $f^{-1}(U)$ es conjunto cocero. Supongamos que $x \in V \in \tau(X)$. Existe una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = 1$ y $\varphi(X \backslash V) = \{0\}$. El conjunto $W = (\frac{1}{2}, +\infty)$ es cocero y $x \in f^{-1}(W) \subset V$; con esto queda demostrado el lema.

P.24. Lema. *Para cualquier espacio X existe una π-base $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \pi w(X)\}$ tal que cada $B_\alpha \in \mathcal{B}$ es de tipo F_σ en X.*

Demostración. Observemos que todo conjunto cocero es de tipo F_σ. Tomemos cualquier π-base $\mathcal{B}' = \{B'_\alpha : \alpha < \pi w(X)\}$ de X. Para cada B'_α existe un conjunto cocero B_α, tal que $B_\alpha \subset B'_\alpha$. La colección $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \pi w(X)\}$ resulta ser una π-base de X formada por conjuntos F_σ.

P.25. Teorema (Hewitt, Marcsewski, Pondiczery). *Si* $X = \prod_{t \in T} X_t$*, donde* $|T| \leq 2^\kappa$ *y* $d(X_t) \leq \kappa$ *para toda* $t \in T$*, entonces* $d(X) \leq \kappa$*. En particular, el producto de no más de* 2^ω *espacios separables es separable.*
DEMOSTRACIÓN. Vea el teorema 2.3.15 de [12].

P.26. Teorema. *Sea* $X \subset \{0,1\}^{\omega_1}$ *un conjunto denso. Entonces* $\pi w(X) = \omega_1$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que los conjuntos $V_A = (U_{\alpha_1} \times \ldots \times U_{\alpha_n} \times \{0,1\}^{\omega_1 \setminus \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}}) \cap X$ con $A = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \omega_1$ y $U_{\alpha_i} \in \tau(\{0,1\})$ para $i = 1, ..., n$ forman una base de X. Al conjunto A se le llama el soporte o conjunto de coordenadas restringidas de V_A. Esta base tiene cardinalidad ω_1 puesto que sus elementos están indexados por los subconjuntos finitos de ω_1. Esto nos dice que $\pi w(X) \leq \omega_1$. Supongamos que $\pi w(X) < \omega_1$; esto implica que existe una π–base de X digamos $\mathcal{B}$ que podemos suponer de abiertos de la forma V_A tal que $|\mathcal{B}| \leq \omega$. Como $|\bigcup\{A : V_A \in \mathcal{B}\}| < \omega_1$ existe un $\alpha < \omega_1$ tal que $\alpha \notin A$ para toda $V_A \in \mathcal{B}$,. Resulta evidente que $\pi_\alpha^{-1}\Big(\{1\}\Big) \cap X$ es un abierto no vacío de X que no contiene a ningún elemento de la π-base $\mathcal{B}$. Dicha contradicción muestra que $|\mathcal{B}| \geq \omega_1$ y finalmente $\pi w(X) = \omega_1$.

Capítulo 1

El Juego "Cubiertas Forzadas"de Galvin−Telgarsky

En este capítulo presentamos, aunque de manera informal, la idea general de juego topológico y algunas de sus características tales como estrategias ganadoras y jugadas. Posteriormente introducimos el primer ejemplo que vamos a estudiar con detalle: el juego $\mathcal{G}$ de Galvin−Telgarsky al que llamaremos "Cubiertas Forzadas", y el juego $\mathcal{G}'$ "Cubiertas y sus Elementos"que resulta ser equivalente al anterior. Definiremos el sentido de tal equivalencia y utilizaremos este juego equivalente para deducir propiedades del Juego de Galvin−Telgarsky.

Estudiaremos la relación del juego de Galvin−Telgarsky y más especificamente, de la existencia de estrategias ganadoras para alguno de los jugadores, con las propiedades topológicas de los espacios sobre los que se juega, tales como la compacidad, la dispersión y la propiedad de Lindelöf. Finalmente se presenta una construcción de un espacio P de Lindelöf que es neutral para este juego.

1.1. Partido ganado, victorias y estrategias

Vamos a definir lo que es un juego en un espacio topológico X sin dar, sin embargo, una definición ciento por ciento rigurosa. Aunque es posible hacer una formalización completa de los conceptos que se van a dar es fácil ver que una presentación informal le conviene al lector; además, esta definición general se vuelve completamente rigurosa para cada juego concreto que describimos a continuación.

Así, decimos que en un espacio X tenemos un juego $\mathcal{G}$ si:

1. Está indicado un ordinal κ que depende, en general, del espacio X; dicho ordinal se entiende informalmente como el supremo del número de jugadas que pueden hacerse en dicho juego en X.

2. Hay una referencia a dos jugadores que se van a denotar por los símbolos I y II, mismos que están jugando en X con información completa. Por “información completa”se entiende que cada uno de los jugadores conoce todas las jugadas anteriores, las suyas y las de su adversario, y también todas las respuestas posibles de su adversario a cualquiera de sus jugadas.

3. Para cada ordinal $\alpha < \kappa$, se indica bajo qué condiciones es posible la jugada con el número α. Además, la jugada número α, la hace primero el jugador número uno, es decir I, y luego sigue el jugador II.

4. La α-ésima jugada del primer jugador consiste en la elección de algún objeto x_α; el segundo jugador elige y_α, además x_α y y_α tienen una relación con X. En la mayoría de los casos son puntos o subconjuntos de X con ciertas propiedades.

5. Se dan condiciones para el ordinal β de acuerdo a las cuales el juego se termina en la jugada número β, es decir, se hicieron las jugadas que tenían números menores que β pero la jugada número β ya no se hace.

6. Hay una manera de evaluar el resultado del juego de acuerdo a las familias $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ y $\{y_\alpha : \alpha < \beta\}$, es decir, para cualquier par de familias, $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ y $\{y_\alpha : \alpha < \beta\}$, se indica cuál de los dos jugadores ganó, o dado el caso, si es empate.

7. Si en X tenemos un juego $\mathcal{G}$ decimos que s es estrategia del primer jugador en el juego $\mathcal{G}$ sobre el espacio X si s es una función definida en todas las familias $\{(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha < \beta\}$, tales que:
   - x_α es la α-ésima jugada del primer jugador para todo $\alpha < \beta$;
   - y_α es la α-ésima jugada del segundo jugador para todo $\alpha < \beta$;
   - $x_\alpha = s(\{(x_\delta, y_\delta) : \delta < \alpha\})$ para todo $\alpha < \beta$;

- de acuerdo con las condiciones de juego es posible realizar la jugada número β; además si s está definida en la familia $\{(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha < \beta\}$, entonces el conjunto $s\{(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha < \beta\})$ es una de las jugadas posibles del primer jugador.

De modo que una estrategia s es una manera de indicarle al primer jugador cómo hacer la jugada número β. La estrategia del segundo jugador se define de manera análoga. Además, si el jugador realiza sus jugadas utilizando la estrategia s se dice que está jugando de acuerdo a la estrategia s, o que está aplicando la estrategia s. El partido es un juego realizado hasta el final en el espacio dado; de hecho, vamos a identificar con el partido a la familia $\{(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha < \beta\}$ tal que x_α es la α-ésima jugada de I y y_α es la α-ésima jugada del jugador II y la jugada número β ya no se puede hacer.

La estrategia s se llama estrategia ganadora (estrategia de empate) para el i-ésimo jugador si cualquier partido en el que el jugador i aplica s termina con su victoria (empate). Si ningún jugador tiene una estrategia ganadora para algún juego sobre un cierto espacio X se dice que X es un espacio neutral para este juego. Un aspecto importante del análisis de los juegos es la caracterización de propiedades topológicas de espacios en términos de existencia de estrategias ganadoras o de empate para uno de los dos jugadores. Para evitar ciertas situaciones patológicas que tienen que ver con la evaluación del resultado del partido, vamos a dar ciertas precisiones para el inciso 6.

Decimos que la evaluación del resultado del juego se realiza de manera coherente si la fórmula que se usa -que depende del partido jugado- para saber quién gana, contiene como variables libres sólo variables que pueden sustituirse por medio de los conjuntos $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$, $\{y_\alpha : \alpha < \beta\}$ y ordinales; dicho de manera informal esto significa que los jugadores tienen la posibilidad de "ver por sí mismos" quién ganó y, además, que toda la información para tomar una decisión está en el partido jugado. El espacio X sobre el cual están jugando puede ser "demasiado grande" para que puedan ver sus propiedades totales, pero estamos considerando que pueden verificar de manera experimental si se cumplen las propiedades dadas para los conjuntos $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ y $\{y_\alpha : \alpha < \beta\}$ y determinar al ganador de acuerdo al análisis de éstos.

Para dar un ejemplo de una evaluación incoherente del resultado del juego, supongamos que el juego sólo dura una jugada y que cada jugador tiene que elegir el conjunto vacío. Después de que el juego termina, el jugador I se declara ganador si y sólo si X es compacto. Es evidente que el espacio X es compacto si y sólo si el primer jugador tiene estrategia ganadora en este juego. Además, es totalmente claro que muy pocos, si es que acaso, van a considerar esta caracterización de la compacidad satisfactoria. La razón es la manera incoherente de evaluar el resultado del juego.

1.2. Equivalencias y estrategias

En esta sección presentamos el juego de Galvin−Telgarsky tal como aparece en el artículo de F. Galvin [13] en el cual se lo llama *“point-open game”*; este nombre refleja la dinámica de cada jugada, pero no describe el objetivo del juego, además de que su traducción al español es desafortunada por lo cual hemos optado por la denominación: “Cubiertas Forzadas”. En el citado artículo se presentan dos versiones del juego en cuestión; demostraremos que se trata esencialmente del mismo juego, para lo cual acotaremos la definición de estrategia ganadora.

1.2.1. Definición (El juego $\mathcal{CF}$ “Cubiertas Forzadas”de Galvin-Telgarsky). Dado un espacio X, se juega en X de la siguiente manera: en la jugada J_n número n J_n el jugador I elige un punto $x_n \in X$ y el jugador II responde eligiendo un abierto O_n tal que $x_n \in O_n$. El juego termina cuando se han hecho las jugadas J_n para cada $n \in \omega$. El partido $\{(x_n, O_n) : n \in \omega\}$ muestra que gana el jugador I si $X = \bigcup\{O_n : n \in \omega\}$; en caso contrario el ganador es el jugador II.

1.2.2. Definición (El juego $\mathcal{CE}$“Cubiertas y sus Elementos”). Sobre un espacio X se juega de la siguiente manera: en la jugada número n $J_n$el jugador I elige una cubierta abierta $\mathcal{C}_n$ de X y II responde eligiendo un elemento $O_n \in \mathcal{C}_n$. El juego termina cuando se han hecho las jugadas J_n para cada $n \in \omega$. En el partido $\{(\mathcal{C}_n, O_n) : n \in \omega\}$ el jugador II gana si $X = \bigcup\{O_n : n \in \omega\}$, en caso contrario el ganador es el jugador I.

1.2.3. Definición. Una estrategia s para el primer jugador del juego $\mathcal{CF}$ de cubiertas forzadas en un espacio X se define inductivamente de la siguiente manera. Se elige el punto $s(\varnothing) = x_0$. Un conjunto $U_0 \in \tau(X)$ es adecuado si $x_0 \in U_0$. Para cada conjunto adecuado U_0 tiene que estar definido el punto $s(U_0) = x_1$. Supongamos que se definieron sucesiones adecuadas $(U_0, ..., U_i)$ y puntos $s(U_0, ...U_i)$ para cada $i \leq n$. La sucesión $(U_0, ...U_{n+1})$ es adecuada si $(U_0, ..., U_i)$ lo es para cada $i \leq n$ y $x_{n+1} = s(U_0, ...U_n) \in U_{n+1}$. Llamamos a

s estrategia ganadora para I en el juego $\mathcal{CF}$ sobre el espacio X si el jugador I gana en cualquier partido en el que aplica la estrategia s.

1.2.4. Proposición. *Supongamos que existe una estrategia ganadora para el primer jugador en el juego $\mathcal{CF}$ de cubiertas forzadas sobre un espacio X. Entonces existe una estrategia ganadora s para el jugador I en X tal que $s(U_0, ...U_n) \notin \bigcup\limits_0^n U_j$ para cualquier sucesión adecuada $(U_0, ...U_n)$ con $\bigcup\limits_0^n U_j \neq X$.*

Demostración. Sea s' cualquier estrategia ganadora para el jugador I. Definimos la estrategia s como sigue: primero hacemos $x_0 = s'(\emptyset) = s(\emptyset)$. Para cualquier sucesión adecuada $(U_0, ..., U_n)$ de abiertos de X, si el punto $s'(U_0, ...U_n)$ pertenece al conjuto $X \setminus \bigcup\limits_0^n U_j$ entonces hacemos $x_{n+1} = s'(U_0, ...U_n) = s(U_0, ...U_n)$. En caso contrario, si $s'(U_0, ...U_n) \in \bigcup\limits_0^n U_j$ entonces consideremos el partido $\{(x_i, U_i) : i \in \omega\}$ que se juega según la estrategia s' y en el que el segundo jugador escoje el conjunto $U_{n+1} = \bigcup\limits_0^n U_j$. Puesto que s' es ganadora, existe un punto y que es el primero elegido por el jugador I en el partido $\{(x_i, U_i) : i \in \omega\}$ que se juega según la estrategia s', tal que $y \in X \setminus \bigcup\limits_0^n U_j$. Hacemos $x_{n+1} = y = s(U_0, ...U_n)$. Por construcción $s(U_0, ...U_n) \notin \bigcup\limits_0^n U_j$ para cualquier sucesión adecuada $(U_0, ...U_n)$ con $\bigcup\limits_0^n U_j \neq X$. Resta verificar que la estrategia s es ganadora. Consideremos un partido $\{(x_i, U_i) : i \in \omega\}$ en el que el jugador I aplica la estrategia s. Vamos a construir otro partido $\{(y_j, V_j) : j \in \omega\}$ en el cual el jugador I aplica s' y los abiertos V_j se eligen de la manera siguiente: $V_0 = U_0$, si $y_{m+1} \in \bigcup\limits_0^m V_j$

entonces $V_{m+1} = \bigcup\limits_{0}^{m} V_j$; en caso contrario, de la definición de s se sigue que $y_{m+1} = x_{n+1}$ para algún $n \in \omega$ tal que $n \leq m$, así que podemos tomar $V_{m+1} = U_{n+1}$. Finalmente tenemos que $X = \bigcup\limits_{j\in\omega} V_j = \bigcup\limits_{i\in\omega} U_i$ lo que demuestra que s es estrategia ganadora.

1.2.5. Teorema. *El juego $\mathcal{CF}$ de cubiertas forzadas es equivalente al juego $\mathcal{CE}$ de cubiertas y sus elementos en el sentido de que para cualquier espacio X, el jugador I tiene estrategia ganadora en $\mathcal{CF}$ sobre el espacio X si y sólo si el jugador II la tiene en $\mathcal{CE}$ sobre el mismo espacio X y el jugador II tiene estrategia ganadora en $\mathcal{CF}$ sobre el espacio X si y sólo si el jugador I la tiene en $\mathcal{CE}$ sobre el mismo espacio X.*

Demostración. Supongamos que s es una estrategia ganadora para el jugador I en $\mathcal{CF}$ sobre el espacio X. Vamos a definir una estrategia s' para el jugador II en $\mathcal{CE}$ sobre X como sigue:

Para cada cubierta abierta $\mathcal{U}_0$ de X elegimos un conjunto $U_0 \in \mathcal{U}_0$ tal que $s(\varnothing) \in U_0$; definimos $s'(\mathcal{U}_0) = U_0$. Procediendo inductivamente, supongamos que $n \in \omega$ y se eligieron puntos $x_0, ..., x_n \in X$, conjuntos abiertos $U_0, ..., U_n$ y cubiertas abiertas $\mathcal{U}_0, ..., \mathcal{U}_n$ del espacio X de tal forma que $U_i \in \mathcal{U}_i$ y $x_i = s(U_0, ..., U_{n-1})$ para todo $i \leq n$. Si el jugador I nos presenta una cubierta abierta $\mathcal{U}_{n+1}$, entonces podemos encontrar un conjunto $U_{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1}$ para el cual $x_{n+1} = s(U_0, ..., U_n) \in U_{n+1}$; hagamos $s'(\mathcal{U}_0, ..., \mathcal{U}_{n+1}) = U_{n+1}$. De esta manera nuestro procedimiento inductivo nos brinda una estrategia s' para el jugador II en el juego de cubiertas y sus elementos.

Probemos ahora que s' es una estrategia ganadora para II; para hacerlo tomemos un partido $\{(\mathcal{U}_i, U_i) : i \in \omega\}$ del juego $\mathcal{CE}$ en el que el jugador II aplica la estrategia s'. Con base en este partido ahora construimos otro partido del juego $\mathcal{CF}$ en el cual el jugador I aplica la estrategia s de la siguiente manera: tomamos $s(\varnothing) = x_0$, $s(U_1) = x_1, \ldots$, $s(U_1, \ldots U_{i-1}) = x_i$, y obtenemos el partido $\{(x_i, U_i) : i \in \omega\}$ en el que el jugador I gana, puesto que s es estrategia ganadora, esto es $X = \bigcup_{i\in\omega} U_i$. Se concluye que el jugador II gana su partido y que la estrategia s' es ganadora.

Ahora sea s' una estrategia ganadora para el jugador II en el juego $\mathcal{CE}$. Un punto x en X se llamará 0-adecuado si cada $U \in \tau(x, X)$ coincide con $s'(\mathcal{U})$ para alguna cubierta abierta $\mathcal{U}$ del espacio X. Si el espacio no tiene puntos 0-adecuados entonces para cada $x \in X$ existe un conjunto $U_x \in$

$\tau(x, X)$ tal que $U_x \neq s'(\mathcal{U})$ para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X. Sin embargo, $\{U_x : x \in X\}$ es cubierta abierta de X y s' evaluada en esta cubierta elige uno de sus elementos digamos U_{x_0} para algún $x_0 \in X$ lo cual es una contradicción que muestra que existe el punto 0-adecuado x_0; hagamos $s(\varnothing) = x_0$. El jugador II en el juego $\mathcal{CF}$ responderá eligiendo un conjunto abierto $U_0 \ni x_0$. Como el punto x_0 es 0-adecuado, existe una cubierta abierta $\mathcal{U}_0$ tal que $U_0 = s'(\mathcal{U}_0)$. Procediendo inductivamente supongamos que $n \in \omega$ y se eligieron los puntos $x_0, ..., x_n$ junto con sus respectivas vecindades abiertas $U_0, ..., U_n$ y cubiertas abiertas $\mathcal{U}_0, ..., \mathcal{U}_n$ de tal manera que $\{(\mathcal{U}_i, U_i) : i \leq n\}$ es un segmento inicial de un partido del juego $\mathcal{CE}$ en el que II aplica la estrategia s'. A un punto $x \in X$ lo llamaremos $(n+1)$-adecuado si cada $U \in \tau(x, X)$ coincide con $s'(\mathcal{U}_0, ..., \mathcal{U}_n, \mathcal{U})$ para alguna cubierta abierta $\mathcal{U}$ del espacio X. Un razonamiento idéntico al que usamos para probar la existencia de puntos 0-adecuados muestra que existen los puntos $(n+1)$-adecuados en X, sea x_{n+1} uno de ellos; hagamos $s(U_0, ...U_n) = x_{n+1}$.

Ahora vamos a probar que la estrategia s es ganadora. Si $\{(x_n, U_n) : n \in \omega\}$ es un partido en el que el jugador I aplica la estrategia s, entonces existe una sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de cubiertas abiertas de X tal que $U_n = s'(\mathcal{U}_0, ..., \mathcal{U}_{n-1})$ para cualquier $n \in \omega$. Esto significa que $\{(\mathcal{U}_n, U_n) : n \in \omega\}$ es un partido del juego $\mathcal{CE}$ que se juega según la estrategia s' y por tanto lo gana el jugador II, esto es $X = \bigcup\{U_n : n \in \omega\}$ por lo cual s es estrategia ganadora para I en $\mathcal{CF}$.

A continuación supongamos que β es una estrategia ganadora para II en $\mathcal{CF}$ sobre X. Sea β' la estrategia para I en $\mathcal{CE}$ sobre X definida como sigue: $\beta'(\varnothing) = \mathcal{U}_0$ donde $\mathcal{U}_0$ es la cubierta $\{\beta(x) : x \in X\}$. En el juego $\mathcal{CE}$ el jugador II debe elegir algún elemento $U_0 \in \mathcal{U}_0$. De la definición de $\mathcal{U}_0$ se sigue que $U_0 = \beta(x_0)$ para algún $x_0 \in X$.

Procediendo inductivamente supongamos que $n \in \omega$ y tenemos cubiertas abiertas $\mathcal{U}_0, ..., \mathcal{U}_n$ del espacio X junto con puntos $x_0, ..., x_n$ y los conjuntos $U_0, ..., U_n \in \tau(X)$ tales que $U_i \in \mathcal{U}_i$ para cada $i \leq n$ y además, $U_0 = \beta(x_0)$ mientras que para cada $k < n$ se tiene la igualdad $U_{k+1} = \beta(x_0, ..., x_{k+1})$. Para todo punto $x \in X$ está definido el conjunto $U_x = \beta(x_0, ..., x_n, x) \in \tau(x, X)$ de modo que la familia $\mathcal{U}_{n+1} = \{U_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X por lo cual podemos hacer $\{\beta'(U_0, \ldots, U_n) = \mathcal{U}_{n+1}$. En el juego $\mathcal{CE}$ el jugador II debe elegir algún elemento $U_{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1}$. De la definición de $\mathcal{U}_{n+1}$ se sigue que $U_{n+1} = \beta(x_{n+1})$ para algún $x_{n+1} \in X$. Con esto queda definida la estrategia β'.

Para verificar que β' es una estrategia ganadora, consideremos cualquier partido $\{(\mathcal{U}_n, U_n) : n \in \omega\}$ en $\mathcal{CE}$ en el que I' aplica β'. Por la construcción de β' se tiene que para cada $n \in \omega$ existe un $x_n \in X$ tal que el partido $\{(x_n, U_n) : n \in \omega\}$ se juega según la estrategia β. Lo anterior implica que $\bigcup_{n\in\omega} U_n \neq X$ y, por lo tanto, que β' es estrategia ganadora para el jugador I en el juego $\mathcal{CE}$.

Finalmente sea β' una estrategia ganadora para I en el juego $\mathcal{CE}$ sobre X. Definamos la estrategia β para el jugador II del juego $\mathcal{CF}$ como sigue: si el jugador I elige $x_0 \in X$, hacemos $\beta(x_0) = U_0$ donde U_0 es cualquier elemento de la familia $\beta'(\varnothing) \bigcap \tau(x_0, X)$. Denotemos la cubierta $\beta'(\varnothing)$ por $\mathcal{U}_0$. Supongamos que se tienen definidos $x_0, U_0, \mathcal{U}_0, \ldots, x_n, U_n, \mathcal{U}_n$ tales que la cubierta $\mathcal{U}_{k+1} = \beta'(U_0, \ldots, U_k)$ para todo $k < n$. Si el jugador I elige x_{k+1} en X, definimos $\beta(x_0, \ldots, x_{k+1}) = U_{k+1}$ donde U_{k+1} es cualquier elemento de la familia $\beta'(U_0, \ldots, U_n) \bigcap \tau(x_{n+1}, X)$. Denotemos la familia $\beta'(U_0, \ldots, U_n)$ por $\mathcal{U}_{n+1}$. Así, queda definida la estrategia β. Resta probar que β es una estrategia ganadora. Sea $\{(x_n, U_n) : n \in \omega\}$ un partido en $\mathcal{CF}$ en el que el jugador II aplica la estrategia β. Es posible encontrar una sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de cubiertas abiertas de X de manera que el partido $\{(\mathcal{U}_n, U_n) : n \in \omega\}$ se juega con la estrategia β'. Por lo tanto $\bigcup_{n\in\omega} U_n \neq X$, es decir que β es una estrategia ganadora para el jugador II del juego $\mathcal{CF}$ y con esto concluye la demostración.

1.3. Estrategias ganadoras y sus implicaciones topológicas.

En la presente sección nos ocuparemos de las características de los espacios sobre los cuales alguno de los participantes del juego de Galvin−Telgarsky tiene una estrategia ganadora. En caso de que la tenga el primer jugador demostraremos que en la ω-modificación del espacio este jugador también tiene estrategia ganadora y que en el espacio hay fuertes restricciones sobre el pseudocarácter y cardinalidad así como dependencias entre propiedades topológicas tales como la compacidad y la dispersión, y si el espacio no es compacto mostraremos que aún es σ-disperso. Si se caracteriza la existencia de una estrategia ganadora para el segundo jugador entonces el único caso no trivial surge al considerar los espacios de Lindelöf. Se demostrará una caracterización de la existencia de dicha estrategia por medio de mapeos continuos sobre espacios segundo numerables.

1.3.1. Definición. Sea X un espacio topológico. Si $i \in \{I, II\}$ entonces decimos que X es i-favorable para el juego de Galvin$-$Telgarsky si el jugador i tiene estrategia ganadora para este juego en X.

1.3.2. Teorema.
(1) *Todo espacio numerable es I-favorable.*
(2) *Todo espacio que no es II-favorable (en particular si es I-favorable) es de Lindelöf.*

Demostración. Supongamos que X es numerable, así que lo podemos escribir como $\{x_i : i \in \omega\}$. Sea s la estrategia para I definida por $s(\varnothing) = x_0$, $s(U_0, \ldots, U_{i-1}) = x_i$ para todo $i \geq 1$. Entonces si $\mathcal{P}$ es cualquier partido en el que I aplica s se tiene que $\mathcal{P} = \{(x_i, U_i) : i \in \omega\}$ y $x_i \in U_i$ implica que $\bigcup\limits_{i\in\omega} U_i = \bigcup\limits_{i\in\omega}\{x_i\} = X$ y X es I-favorable.

Supongamos ahora que el espacio X no es II-favorable. Tomemos cualquier cubierta abierta $\mathcal{C}$ de X y supongamos que $\mathcal{C}$ no tiene subcubierta numerable. Dado cualquier $n \in \omega$, si el primer jugador elige un punto x_n en su n-ésimo turno hagamos $\mu(x_n) = U_n$ donde U_n es cualquier elemento de $\mathcal{C}$ con $x_n \in U_n$. Si $\{(x_n, U_n) : n \in \omega\}$ es un partido en el que el segundo jugador aplica la estrategia μ, entonces $\mathcal{C}' = \{U_n : n \in \omega\}$ es una subfamilia numerable de $\mathcal{C}$. Por la elección de $\mathcal{C}$ tenemos que $\bigcup \mathcal{C}' \neq X$ lo cual muestra que μ es una estrategia ganadora del jugador II; tal contradiccón concluye la demostración de (2).

El siguiente es un resultado menos evidente que se refiere a la conservación de la propiedad de ser I-favorable bajo la ω-modificación.

1.3.3. Teorema.. *Un espacio topológico es I-favorable si y sólo si su ω-modificación también lo es.*

Demostración. Probaremos sólo la implicación no trivial. Supongamos que X es un espacio I-favorable. Sea s una estrategia ganadora para el primer jugador. Para construir la estrategia ganadora s' del mismo jugador I sobre $(X)_\omega$ consideremos los siguientes conjuntos de sucesiones finitas de naturales: $A_0 = \{\varnothing\}$, $A_1 = \{(1)\}$, $A_2 = \{(1,1), (2)\}$, $A_3 = \{(1,1,1), (1,2), (2,1), (3)\}, \ldots$

En general, si $(a_1,\dots,a_m)$ es el n-ésimo elemento de A_k, entonces el elemento $2n-1$ de A_{k+1} es $(a_1,\dots,a_m,1)$ y el elemento $2n$ de A_{k+1} es $(a_1,\dots,a_m+1)$. Notemos que los elementos de cada A_k son todas las sucesiones finitas de naturales cuyos elementos suman k. Es inmediato que $|\bigcup_{k\in\omega} A_k| = \omega$. Podemos ordenar esta unión respetando el orden de construcción, es decir, si $\varphi \in A_k$ y $\varphi' \in A_{k'}$ con $k < k'$ entonces $\varphi < \varphi'$. De esta manera podemos escribir la unión de las A_k como $\{\varphi_i : i \in \omega\}$. Ahora comenzamos a definir la estrategia s' tomando $s'(\varnothing) = s(\varnothing) = x_0$. Supongamos que que el jugador II elige $V_0 \in \tau(x_0,(X)_\omega)$, que podemos suponer de tipo G_δ en X, puesto que estos conjuntos forman una base de $(X)_\omega$ y para definir cualquier estrategia ganadora para el primer jugador del juego de cubiertas forzadas basta definirla en una base. Existe una familia numerable $\{U_n^0 : n \in \mathbb{N}\} \subset \tau(x_0, X)$ tal que $\bigcap\{U_n^0 : n \in \mathbb{N}\} = V_0$. Aplicando la estrategia s a los elementos de esta familia construimos el conjunto $\{s(U_n^0) = x(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Hagamos $s'(V_0)$ igual a $x(1) = x(\varphi_1)$. Supongamos ahora, que el jugador II elige $V_1 \in \tau(x(1),(X)_\omega)$. Existe una familia numerable $\{U_n^1 : n \in \mathbb{N}\} \subset \tau(x(1), X)$ con la propiedad de que $\bigcap\{U_n^1 : n \in \mathbb{N}\} = V_1$. Nos fijamos ahora en el conjunto $\{s(U_n^1) = x(1,n) : n \in \mathbb{N}\}$. Definimos $s'(V_0,V_1) = x(1,1) = x(\varphi_2)$. puesto que hasta este momento ya están definidos los puntos $x(\varphi)$ para cada φ en A_1 y en A_2, podemos definir $s'(V_0,V_1,V_2) = x(2) = x(\varphi_3)$. En general hacemos $s'(V_0,\dots,V_k) = x(\varphi_{k+1})$. Probemos que s' es efectivamente una estrategia ganadora. Supongamos lo contrario. Esto es, que existe $x \in (X)_\omega \setminus \bigcup_{k\in\omega} V_k$, esto implica, en particular, que $x \neq x_0$ y además, $x \notin V_0$ por lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin U_{n_0}^0$; Hagamos $U_0 = U_{n_0}^0$. Sea $x_1 = s(U_0) = s(U_{n_0}^0) = x(n_0)$. Puesto que $(n_0) \in A_{n_0}$, sucede que $(n_0) = \varphi_{m_1}$ para algún $m_1 \in \omega$. Por lo tanto $x_1 = x(\varphi_{m_1}) \in V_{m_1}$, lo cual implica que $x \neq x(\varphi_{m_1}) = x(n_0) = x_1$ y además $x \notin V_{m_1}$. Así que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin U_{n_1}^{m_1}$. Hacemos ahora $U_1 = U_{n_1}^{m_1}$. Sea $x_2 = s(U_1) = s(U_{n_1}^{m_1}) = x(n_0,n_1)$. Como $(n_0,n_1) \in A_{n_0+n_1}$, existe $m_2 \in \omega$ tal que $(n_0,n_1) = \varphi_{m_2}$ lo cual hace que $x_2 = x(\varphi_{m_2}) \in V_{m_2}$. Esto implica que $x \neq x_2$ y por lo tanto, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin U_{n_2}^{m_2}$. Hagamos $U_2 = U_{n_2}^{m_2}$. Supongamos que hemos encontrado números naturales $n_0,\dots,n_k$ y $m_0,\dots,m_k$ tales que $x \neq x(n_0,\dots,n_j)$ y $x \notin U_{n_j}^{m_j} = U_j$. para cada $j \leq k$. Como $(n_0,\dots,n_j) \in A_{n0+\dots+n_j}$ existe $m_{k+1} \in \omega$ tal que $(n_0,\dots,n_j) = \varphi_{m_{k+1}}$. Si $x_{k+1} = x(n_0,\dots,n_j)$ entonces $x_{k+1} = x(\varphi_{m_{k+1}}) \in V_{m_{k+1}}$ lo cual implica que $x \neq x_{k+1}$ y $x \notin V_{m_{k+1}}$, por lo tanto existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin U_{n_{k+1}}^{m_{k+1}}$. Tomemos $U_{k+1} = U_{n_{k+1}}^{m_{k+1}}$. Así hemos construido un partido $\{(x_n,U_n) : n \in \omega\}$

sobre el espacio X en el que el primer jugador aplica s y pierde puesto que $x \notin U_n$ para cada n. Esta contradicción muestra que $(X)_\omega = \bigcup_{k\in\omega} V_k$ y s' es una estrategia ganadora para el primer jugador del juego de Galvin−Telgarsky en la ω-modificación del espacio X.

1.3.4. Ejemplo. La recta real $\mathbb{R}$ con la topología usual es un espacio II-favorable en el juego de cubiertas forzadas $\mathcal{CF}$.

Demostración. Vamos a definir una estrategia ganadora β para el segundo jugador de la siguiente manera $\beta(x_0, \ldots, x_n) = \left(x_n - \frac{1}{2^{n+1}}, x_n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$. En efecto, esta estrategia es ganadora puesto que los intervalos elegidos por el segundo jugador no pueden cubrir la recta cuya medida de Lebesgue es infinita, mientras que la medida de la unión de los intervalos elegidos por el jugador II es igual a $\sum_{n\in\omega} \frac{1}{2^n} = 2$.

Más aún, para cualquier conjunto $C \subset \mathbb{R}$ de medida de Lebesgue igual a $b > 0$, podemos hacer $\beta(x_0, \ldots, x_n) = (x_n - b \cdot 2^{-n-3}, x_n + b \cdot 2^{-n-3})$ para cualesquiera $x_0, ..., x_n \in C$ y $n \in \omega$. Siguiendo los mismos pasos se concluye que β es una estrategia ganadora y por lo tanto C es II-favorable en el juego $\mathcal{CF}$.

Sin embargo, no todos los espacios II-favorables en el juego $\mathcal{CF}$ contenidos en la recta real tienen medida positiva como veremos a continuación:

1.3.5. Ejemplo. El conjunto de Cantor $K = \{0, 1\}^\omega$ es II-favorable en el juego de Galvin−Telgarsky.

Demostración. Para cada sucesión finita de puntos $(x_0, ..., x_n)$ del espacio K hacemos $\beta(x_0, \ldots, x_n) = \{x \in \{0, 1\}^\omega : x(n) = x_n(n)\} = U_n \in \tau(x, \{0, 1\}^\omega)$. Para verificar que β es una estrategia ganadora para el jugador II tomemos cualquier partido $\mathcal{P} = \{(x_n, U_n) : n \in \omega\}$ en el que el segundo jugador aplica β. Hagamos $x(n) = 1 - x_n(n)$ para toda $n \in \omega$; de esta manera $x(n) \neq x_n(n)$ por lo que $x \notin U_n$ para todo $n \in \omega$, así que $\bigcup_{n\in\omega} U_n$ no cubre a $\{0, 1\}^\omega$ y por lo tanto β es estrategia ganadora para el jugador II. De modo que el conjunto de Cantor es II-favorable y de medida cero .

Los ejemplos anteriores son sólo casos particulares de resultados más generales que serán expuestos más adelante. Para obtener estos resultados es conveniente analizar qué sucede con las imágenes y preimágenes continuas de espacios sobre los que uno de los jugadores tiene una estrategia ganadora. Esto se muestra en la siguiente proposición.

1.3.6. Proposición. Dada una función continua sobreyectiva $f : X \to Y$ si X es un espacio I-favorable en el juego $\mathcal{CF}$ de cubiertas forzadas, entonces Y también lo es; y si Y es II-favorable para $\mathcal{CF}$ entonces X también es II-favorable.

Demostración. Vamos a suponer primero que el espacio X es I-favorable. Sea s_X una estrategia ganadora para el primer jugador en X. Para construir una estrategia ganadora s_Y para el mismo jugador sobre el espacio Y hagamos primero $y_0 = s_Y(\varnothing) = f(s_X(\varnothing))$ y $x_0 = x(y_0) = s_X(\varnothing)$. Procediendo inductivamente suponemos que $k < \omega$ y se definió la estrategia para cualquier jugada J_n con $n < k$ de tal manera que para cada punto $y \in Y$ elegido por el jugador I se fijó $x(y) \in f^{-1}(y)$, y si un segmento inicial $\{(y_i, U_i) : i < j \leq k\}$ de un partido en Y se obtuvo por medio de la aplicación de s_Y, entonces $\{(x(y_i), f^{-1}(U_i)) : i < j\}$ es un segmento inicial de nuestro partido en X donde el jugador I aplica la estrategia s_X. Ahora, si se dieron las jugadas $\{(y_i, U_i) : i < k\}$ en el espacio Y en las que el jugador I aplicó s_Y entonces $\{(x(y_i), f^{-1}(U_i)) : i < k\}$ es un segmento inicial de un partido en X en el que el jugador I aplica la estrategia s_X. De modo que s_X nos brinda el punto $x_k = s_X(f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_{k-1}))$, así que podemos tomar $s_Y(U_1, \ldots, U_{k-1}) = y_k = f(x_k)$ y $x(y_k) = x_k$ mismo que completa la definición de la estrategia s_Y. Si un partido $\{(y_i, U_i) : i \in \omega\}$ se juega en Y según la estrategia s_Y, entonces $\{(x(y_i), f^{-1}(U_i)) : i \in \omega\}$ es un partido en X en el que se aplica la estrategia s_X. La estrategia s_X es ganadora por lo que $\bigcup_{i\in\omega} f^{-1}(U_i) = X$; esto implica que $\bigcup_{i\in\omega} U_i = Y$ de modo que s_Y es una estrategia ganadora para el primer jugador en Y.

Supongamos ahora que t_Y es una estrategia ganadora del segundo jugador en Y y el jugador I elige un punto $x_0 \in X$. El conjunto $U_0 = f^{-1}(t_Y(f(x_0)))$ es una vecindad abierta de x_0; hagamos $V_0 = t_Y(f(x_0))$ y $t_X(x_0) = U_0$. Procedemos inductivamente y suponemos que $k \in \omega$ y se definió la estrategia t_X para el segundo jugador sobre el espacio X para cualquier jugada J_n tal que $n < k$ de manera que si las jugadas $\{(x_i, U_i) : i < j\}$ se hicieron con la estrategia t_X, entonces la familia $\{(f(x_i), f(U_i)) : i < j\}$ constituye un segmento inicial de algún partido sobre el espacio Y (y en particular, cada $V_i = f(U_i)$ es una vecindad abierta de $f(x_i)$ en Y) en el cual el jugador II aplica la estrategia t_Y. Ahora, si se realizaron las jugadas $\{(x_i, U_i) : i < k\}$ y el jugador I eligió un punto x_k en su k-ésimo turno entonces $\{(f(x_i), f(U_i)) : i < k\} \cup \{f(x_k)\}$ es un segmento inicial del juego en Y donde II aplica la estrategia t_Y; de modo que está bien definido el conjunto abierto $V_k = t_Y(f(x_0), \ldots, f(x_k))$. Tomando $U_k = f^{-1}(V_k)$ y $t_X(x_o, \ldots, x_k) = U_k$ terminamos la definición inductiva de la estrategia t_X.

Para verificar que la estrategia t_X es ganadora en el espacio X tomemos un partido $\{(x_i, U_i) : i \in \omega\}$ del juego de Galvin$-$Telgarsky en el que el jugador II la aplica. Si $y_i = f(x_i)$ y $V_i = f(U_i)$ para cada $i \in \omega$ entonces $\nu = \{(y_i, V_i) : i \in \omega\}$ es un partido en Y en el cual II aplica la estrategia t_Y. Por consiguiente, el jugador II es el vencedor del partido ν y por lo tanto $V = \bigcup\{V_i : i \in \omega\} \neq Y$. Esto implica que $\bigcup\{U_i : i \in \omega\} \neq X$, es decir t_X es una estrategia ganadora para el segundo jugador sobre el espacio X.

De la Proposición 1.3.6. se deduce inmediatamente que si un factor de un producto es $II-$favorable, entonces el producto lo es, y si un producto es $I-$favorable, entonces cada factor lo es. Sin embargo, el Ejemplo 1.3.5. y la Proposición 1.3.6. implican que el espacio $\{0,1\}^\kappa$ es $II-$favorable para todo $\kappa \geq \omega$ pero $\{0,1\}^n$ es $I-$favorable, puesto que es finito, para cada $n < \omega$.

1.3.7. Teorema. *Si X es un espacio I-favorable en el juego de Galvin$-$Telgarsky entonces su cardinalidad coincide con su pseudocarácter:*

Demostración. Supogamos que el espacio X es I-favorable y que tiene pseudocarácter $\psi(X) = \kappa$. Sea s una estrategia ganadora para el jugador I en el juego $\mathcal{CF}$ sobre X. La condición $\psi(X) = \kappa$ implica que para cada $x \in X$ existe $\mathcal{U}_x = \{U^x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset \tau(x, X)$ tal que $\bigcap \mathcal{U}_x = \{x\}$. Para el punto $x_0 = s(\varnothing)$ hagamos $A_0 = \{x_0\}$ y para todo $n > 0$, $A_n = \{s(U^{x_0}_{\alpha_0}, \ldots, U^{x_{n-1}}_{\alpha_{n-1}}) : \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} < \kappa$, y existen $x_1 \ldots x_{n-1} \in A_i$ tales que la sucesión finita $((x_0, U^{x_0}_{\alpha_0}), ..., (x_{n-1}, U^{x_{n-1}}_{\alpha_{n-1}}))$ es un segmento inicial de un partido en $\mathcal{CF}\}$

Observemos que $|A_n| \leq \kappa$ para cada $n \in \omega$. Efectivamente, $|A_0| = 1 \leq \kappa$. Ahora, si suponemos que $|A_n| \leq \kappa$ entonces ocurre que $|A_{n+1}| \leq |A_n| \cdot |\mathcal{U}_{x_n}| \leq \kappa^2 \leq \kappa$. Por tanto $|\bigcup\{A_n : n \in \omega\}| \leq \kappa$. Probaremos que $X = A = \bigcup A_n$. Supongamos que existe $y \in X \diagdown A$; esto implica que $y \neq x_0$ por lo que existe $U_0 \in \mathcal{U}_{x_0}$ tal que $y \notin U_0$. Sea $x_1 = s(U_0)$, así que $x_1 \in A_1$ por lo que $y \neq x_1$ y existe $U_1 \in \mathcal{U}_{x_1}$ tal que $y \notin U_1$. Sea $x_2 = s(U_1, U_2)$. Supongamos que x_k, U_{k-1} están definidos con este procedimiento de manera que $y \notin U_j$ con $j = 1, \ldots, k-1$, entonces existe $U_k \in \mathcal{U}_{x_k}$ tal que $y \notin U_k$. Por construcción de la familia $\{U_n : n \in \omega\}$ se tiene que $\mathcal{P} = \{(x_i, U_i) : i \in \omega\}$ es un partido en el que I aplica s, pero $y \notin U_i$ para todo $i \in \omega$ por lo que $y \in X \diagdown \bigcup\{U_i : i \in \omega\}$

e I pierde el partido $\mathcal{P}$, lo que contradice que s es estrategia ganadora. Por lo tanto la unión de la familia $\{A_n : n \in \omega\}$ coincide con el espacio X de modo que la cardinalidad del espacio no excede a $\kappa = \psi(X)$. Como siempre $\psi(X) \leq |X|$, tenemos que $|X| = \psi(X)$.

1.3.8. Corolario. *Sea X un espacio topológico con pseudocarácter numerable. Entonces X es numerable si y sólo si X es I-favorable en el juego de Galvin− Telgarsky.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad se sigue del Teorema 1.3.7 y la suficiencia del Teorema 1.3.2.

1.3.9. Teorema. *En el juego Cubiertas Forzadas de Galvin-Telgarsky, para cualquier espacio compacto X las siguientes condiciones son equivalentes:*
(1) *El espacio X es I-favorable*
(2) *El espacio X no es II-favorable*
(3) *El espacio X es disperso.*

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que un espacio I-favorable no es II-favorable por lo que la primera condición implica la segunda. Si el compacto X no es disperso entonces por el Teorema P.9 se mapea continuamente sobre el intervalo compacto metrizable $[0, 1]$ que es II-favorable según 1.3.4. Así que de la proposición 1.3.6 se sigue que el espacio X es II-favorable. Esto prueba que (2) implica (3).

Supongamos ahora que el compacto X es disperso. Demostraremos por inducción sobre el índice de dispersión de X que es I-favorable. Si el índice de dispersión de X es cero, entonces X es finito y en tal caso el espacio es trivialmente I-favorable.

Supongamos ahora que $\mu > 0$ es un ordinal y todo espacio compacto X cuyo índice de dispersión es menor que μ es I-favorable. Sea X tal que su índice de dispersión es μ; sea Y el núcleo de X. Entonces Y es finito porque es compacto. Podemos escribir a Y como $\{x_0, \ldots, x_n\}$, y definimos la estrategia s como sigue: $s(\varnothing) = x_0, s(U_1, \ldots, U_{j-1}) = x_j; j \leq n$.

Entonces $X \setminus \bigcup_{j \leq n} U_j$ es compacto y su índice de dispersión es estrictamente menor que μ por la Proposición P.13, y por lo tanto I tiene estrategia ganadora s' sobre $X\setminus\bigcup_{j\le n} U_j$. Finalmente definimos $s(U_1,\ldots,U_n) = s'(\varnothing)$ y para una sucesión adecuada de abiertos en general $(U_1,\ldots,U_{n+k})$, tomamos $s(U_1,\ldots,U_{n+k})$ como $s'(U_{n+1},\ldots,U_{n+k+1})$. Si $\{(x_n,U_n) : n\in\omega\}$ es un partido en el cual el primer jugador aplica la estrategia s entonces: $X = Y\bigcup(X\setminus Y) \subset \left(\bigcup_{j\le n} U_j\right)\bigcup\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_{n+k}\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ por lo que s es ganadora y X es I-favorable es decir acabamos de demostrar que (3) implica (1).

No todos los espacios I-favorables son dispersos. Un ejemplo muy sencillo es el conjunto de los números racionales como subespacio de la recta real. El siguiente teorema muestra que los espacios I-favorables están fuertemente relacionados con los espacios dispersos aun cuando no sean compactos. Antes del teorema necesitamos el siguiente lema.

1.3.10. Lema. *Sean Y y Z subconjuntos cerrados de un espacio X tales que $Z\subset Y$. Entonces hay una sucesión $\{\mathcal{F}_n(Y,Z) : n\in\omega\}$ de familias dispersas de subconjuntos de X tales que $Y\setminus Z = \bigcup\{\bigcup\mathcal{F}_n(Y,Z) : n\in\omega\}$.*

Demostración. Definimos $\mathcal{G}_0 = \varnothing$ y $E_0 = Y$. Sea α un ordinal sucesor tal que $\mathcal{G}_\xi$ y E_ξ están definidos para cada $\xi\le\alpha$. Escogemos $\mathcal{G}_{\alpha+1}$ como una familia disjunta de subconjuntos de $E_\alpha\setminus Z$ tal que cada $G\in\mathcal{G}_{\alpha+1}$ es un abierto de tipo F_σ en E_α y $\bigcup\mathcal{G}_{\alpha+1}$ sea densa en $E_\alpha\setminus Z$. Definimos $E_{\alpha+1} = E_\alpha\setminus\bigcup\mathcal{G}_{\alpha+1}$. Si λ es un ordinal límite tal que $\mathcal{G}_\xi$ y E_ξ están definidos para cada $\xi<\lambda$ entonces definimos $\mathcal{G}_\lambda = \varnothing$ y $E_\lambda = \bigcap\{E_\xi : \xi<\lambda\}$. Es fácil ver que cada E_ξ es cerrado en X y cada $G\in\mathcal{G}_\xi$ es de tipo F_σ en X.

Claramente, existe un ordinal digamos β tal que $E_\beta = Z$; sea γ el menor ordinal con esta propiedad. Definimos $\mathcal{G} = \bigcup\{\mathcal{G}_\xi : \xi<\gamma\}$. Para cada $G\in\mathcal{G}$ escogemos una sucesión $(F_n(G))_{n\in\omega}$ de subconjuntos cerrados de X tal que $G = \bigcup\{F_n(G) : n\in\omega\}$. Finalmente hacemos $\mathcal{F}_n(Y,Z) = \{F_n(G) : G\in\mathcal{G}\}$ para cada $n\in\omega$. Por construcción $Y\setminus Z = \bigcup\{\bigcup\mathcal{F}_n(Y,Z) : n\in\omega\}$. Tomemos un $n\in\omega$ y un subconjunto no vacío H de $\bigcup\mathcal{F}_n(Y,Z)$. Existe por lo menos un ordinal $\xi<\gamma$ tal que $H\cap F_n(G)\ne\varnothing$ para algún $G\in\mathcal{G}_\xi$. Como $G\cap E_{\xi+1} = \varnothing$ y $F_n(G)\subset G$, el conjunto $F_n(G)$ es abierto en $E_\xi\cap\bigcup\mathcal{F}_n(Y,Z)$. Así que $F_n(G)\cap H$ es un abierto no vacío de H y la familia $\bigcup\mathcal{F}_n(Y,Z)$ es dispersa.

1.3.11. Teorema. *Si X es un espacio I-favorable en el juego Cubiertas Forzadas de Galvin-Telgarsky, entonces es σ-disperso.*

Demostración. Sea X un espacio sobre el que el jugador I tiene una estrategia ganadora. Recordemos que por la proposición 1.2.4 podemos tomar una estrategia ganadora s de manera que $s(U_0, \ldots, U_n) \in X \backslash (U_0 \cup \ldots \cup U_n)$ para cada sucesión adecuada $(U_0, \ldots, U_n)$. Por el Lema 1.3.10 para cada cerrado $G \subset X$ y cada punto $x \in G$ hay ω familias dispersas cuyas uniones cubren a $G \setminus \{x\}$; denotemos a la k-ésima de estas familias por $\mathcal{F}_k(G, x)$. Tratándose de la familia $\mathcal{F}_k(G, x)$ si $U \in \tau(X)$ definimos $C_U = G \setminus U$. Para cada sucesión finita de naturales φ, consideramos los siguientes conjuntos: $\mathcal{I}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, $A(\varnothing) = \{s(\varnothing)\} = \{x_0\}, B(\varnothing) = X$.

Para cada $i_0 \in \omega$ hacemos:
$\mathcal{I}(i_0) = \{(x_0, U_0) : C_{U_0} \in \mathcal{F}_{i_0}(X, x_0)\}$
$A(i_0) = \{s(U_0) : C_{U_0} \in \mathcal{F}_{i_0}(X, x_0)\}$,
$B(i_0) = \bigcup \mathcal{F}_{i_0}(X, x_0)\}$.

Procediendo inductivamente, supongamos que se definieron $\mathcal{I}(i_0, \ldots, i_n)$, $A(i_0, \ldots, i_n)$ y $B(i_0, \ldots, i_n)$, tomemos:
$\mathcal{I}(i_0, \ldots, i_{n+1}) = \{(x_0, U_0), \ldots, (x_{n+1}, U_{n+1}) : (x_0, U_0), \ldots, (x_n, U_n) \in$
$\mathcal{I}(i_0, \ldots, i_n),\ s(U_0, \ldots, U_n) = x_{n+1},\ C_{U_{n+1}} \in \mathcal{F}_{i_{n+1}}(C_{U_n}, x_{n+1})\}$
$A(i_0, \ldots, i_{n+1}) = \{s(U_0, \ldots, U_{n+1}) : ((x_0, U_0), \ldots, (x_{n+1}, U_{n+1})) \in$
$\mathcal{I}(i_0, \ldots, i_{n+1})\}$
$B(i_0, \ldots, i_{n+1}) = \bigcup \mathcal{F}_{i_{n+1}}(C_{U_n}, x_{n+1})\}$

Notemos que, por construcción:

$$A(i_0, \ldots, i_{n+1}) \subset B(i_0, \ldots, i_{n+1}) \subset B(i_0, \ldots, i_n).$$

Se afirma que $X = \bigcup A(\varphi)$ y que cada $A(\varphi)$ es disperso.

Probemos primero la dispersión de cada $A(\varphi)$. Es claro que $A(\varnothing) = \{x_0\}$ es disperso. Ahora tenemos $i_0 \in \mathbb{N}$ y H un subconjunto de $A(i_0)$. Dado que $H \subset A(i_0) \subset B(i_0) = \bigcup \mathcal{F}_{i_0}(X, x_0)$, donde $\mathcal{F}_{i_0}(X, x_0)$ es una familia dispersa, existe un $F \in \mathcal{F}_{i_0}(X, x_0)$ tal que $F \cap H$ es un conjunto no vacío abierto y cerrado en H. Además $|F \cap H| = 1$ puesto que si x y x' son puntos de $F \cap H$ lo son también de $A(i_0) \cap F$ así que por definición de $A(i_0)$ existe U_0 y U_0' en $\tau(x_0, X)$ tales que $x = s(U_0)$, $x' = s(U_0')$ y tanto $X \backslash U_0$ como $X \backslash U_0'$ pertenecen a $\mathcal{F}_{i_0}(X, x_0)$. Sin embargo, $\mathcal{F}_{i_0}(X, x_0)$ es una familia disjunta por lo que $X \backslash U_0 = F$ o $X \backslash U_0' = F$.

La condición de que x y x' están en F implica que $X \backslash U_0 = X \backslash U_0'$ es decir $U_0 = U_0'$ asi que $x = x'$ es un punto aislado de H.

Supongamos ahora que los conjuntos $A(i_0, \ldots, i_m)$ son dispersos si $m \leq n$ y tomemos cualquier conjunto $A(i_0, \ldots, i_{n+1})$ y H, un subconjunto suyo. Puesto que se cumplen las contenciones:

$$H \subset A(i_0, \ldots, i_{n+1}) \subset B(i_0, \ldots, i_{n+1}) \subset B(i_0, \ldots, i_n) \subset \ldots \subset B(i_0) =$$

$$\bigcup \mathcal{F}_{i_0}(X, x_0),$$

existe un conjunto $G_0 \in \mathcal{F}_{i_0}(X, x_0)$ tal que $G_0 \cap H$ es un conjunto abierto y cerrado no vacío de H como subespacio de $B(i_0)$. Hagamos U_0 igual al $X \backslash F_0$ y $x_1 = s(U_0)$. Como $H \subset B(i_0, i_1)$ existe $G_1 \in \mathcal{F}_{i_1}(C_{U_0}, x_0)$ tal que $H \cap G_1$ es abierto y cerrado en H como subespacio de $B(i_0, i_1)$.

Repetimos el procedimiento anterior n veces para encontrar un conjunto $G_{n+1} \in \mathcal{F}_{i_{n+1}}(G_n, x_n)$ donde $x_n = s(U_0, \ldots, U_n)$, $G_n = C_{U_n}$ tal que $H \bigcap G_{n+1}$ es un conjunto no vacío abierto y cerrado de H como subespacio de $B(i_0, \ldots, i_{n+1})$. Dado que $\{s(U_0, \ldots, U_n)\} = G_{n+1} \cap A(i_0, \ldots, i_{n+1}) = G_{n+1} \bigcap H$ se sigue que $x_{n+1} = s(U_0, \ldots, U_n)$ es un punto aislado de H. Así $A(\varphi)$ es disperso para cada φ.

Probemos ahora que las $A(\varphi)$ cubren el espacio X.

Supongamos lo contrario, esto es que existe un punto $x \in X \backslash \bigcup A(\varphi)$. Por la construcción de $A(\varnothing)$ tenemos que $x \neq x_0$ así que existe $i_0 \in \omega$ tal que $x \in C_{U_0}$ para algún U_0 tal que $C_{U_0} \in \mathcal{F}_{i_0}(X, x_0)$. Como $x \notin A(i_0)$ el punto $x \neq s(U_0) = x_1$ por lo cual existe $i_1 \in \omega$ tal que $x \in C_{U_1}$ para algún U_0 tal que $C_{U_1} \in \mathcal{F}_{i_1}(C_{U_0}, x_1)$. Suponemos que hemos encontrado índices $i_0, \ldots, i_n$ y abiertos $U_0, \ldots, U_n$ tales que $x \neq s(U_0 \ldots U_m) = x_m + 1$, y $x \in C_{U_m} \in \mathcal{F}_{i_m}(C_{U_{m-1}}, x_m)$ si $m \leq n$. La suposición de que $x \notin A(i_0, \ldots, i_n)$ implica que $x \neq s(U_0, \ldots, U_n) = x_{n+1}$ por lo que existe i_{n+1} tal que $x \in C_{U_{n+1}} \in \mathcal{F}_{i_{n+1}}(C_{U_n}, x_{n+1})$.

Finalmente hemos construido un partido $\{(x_n, U_n) : n \in \omega\}$ en el que el jugador I aplica la estrategia s pero $x \notin \bigcup_{n \in \omega} U_n$.

Esto contradice que s es estrategia ganadora. Así que las $A(\varphi)$ cubren el espacio X y queda demostrado el teorema.

Ahora comenzamos nuestro estudio de las características topológicas de los espacios donde el segundo jugador tiene estrategia ganadora para el juego de cubiertas forzadas.

1.3.12. Teorema. *Un espacio de Lindelöf X es II-favorable en el juego Cubiertas Forzadas de Galvin-Telgarsky si y sólo si existe una familia* $\{U(n_0,\ldots,n_k) : k \in \omega,\ n_i \in \omega\}$ *de conjuntos cocero de X tal que:*
(1) $\{U(k) : k \in \omega\}$ *es cubierta de X.*
(2) $\{U(n_0,\ldots,n_k,n) : n \in \omega\}$ *es cubierta de X para todos $n_1,\ldots,n_k \in \omega$.*
(3) *Para toda sucesión $(n_i)_{i\in\omega} \subset \omega$ se tiene que $X \neq U(n_0) \cup U(n_0,n_1) \cup \ldots \cup U(n_0,\ldots,n_k) \cup \ldots$.*

Demostración. Basta probar que X es I-favorable en el juego $\mathcal{CE}$ de cubiertas y sus elementos. Supongamos primero que existe una familia $\{U(n_0,\ldots,n_k) : k \in \omega, n_i \in \omega\}$ de subconjuntos cocero de X que cumple (1), (2) y (3), con $U(n_0,\ldots,n_k)$ conjunto cocero para toda $k \in \omega, n_i \in \omega$.

Definimos la estrategia s' para I como sigue:
$s'(\varnothing) = \{U(k) : k \in \omega\}$,
$s'(U_{(n_0)}) = \{U_{(n_0,n)}, n \in \omega\}$,
$\vdots$
$s'(U(n_0),\ldots,U(n_0,\ldots,n_k)) = \{U(n_0,\ldots,n_k,n) : n \in \omega\}$.

En virtud de (1) y (2) s' efectivamente es una estrategia para I y por (3) es ganadora.

Ahora, si suponemos que X es II-favorable para el juego de Galvin−Telgarsky entonces es I-favorable para el juego $\mathcal{CE}$ de cubiertas y sus elementos. Sea s' una estrategia ganadora para I en $\mathcal{CE}$ sobre X; vamos a construir la familia $\{U(n_0,\ldots,n_k) : k \in \omega, n_i \in \omega\} \subset \tau(X)$ que cumple (1), (2) y (3) con $U(n_0,\ldots,n_k)$ conjunto cocero como sigue: podemos suponer que la imagen de s' está formada por cubiertas cuyos elementos son conjuntos coceros puesto que estos son base de X que es $T_{3\frac{1}{2}}$ (Ver P.24).

Así, tomamos $\{U(k) : k \in \omega\}$ como una subcubierta numerable de $s'(\varnothing)$ y para cada sucesión finita $(n_0,\ldots,n_k)$ hacemos $\{U(n_0,\ldots,n_k,n) : n \in \omega\}$ como una subcubierta numerable de $s'(U(n_0),\ldots,U(n_1,\ldots,n_k))$. De esta manera la familia $\{U(n_0,\ldots,n_k) : k \in \omega, n_i \in \omega\}$ cumple (1) y (2) por construcción y cumple (3) porque s' es ganadora.

1.3.13. Teorema *Si X es un espacio de Lindelöf II-favorable para el juego de Galvin− Telgarsky entonces X se mapea continuamente sobre un espacio II-favorable en el juego Cubiertas Forzadas de Galvin-Telgarsky y segundo numerable.*

Demostración. Puesto que X es II-favorable, según el Teorema 1.3.12 existe una familia $\{U(n_0, \ldots, n_k) : n_i \in \omega, k \in \omega\} \subset \tau(X)$ con $U(n_0, \ldots, n_k) = f^{-1}_{n_0,\ldots,n_k}((0, 1])$ que cumple las condiciones (1), (2), (3) del Teorema 1.3.12 Si $f : X \to [0, 1]^\omega$ es el producto diagonal $\Delta\{f_{n_0,\ldots,n_k} : n_0, \ldots, n_k \in \omega, k \in \omega\}$, entonces $f(X)$ es segundo numerable y sólo resta verificar que es II-favorable. En efecto, $U(n_0, \ldots, n_k) = f^{-1}(V(n_0, \ldots, n_k))$ donde tomamos al conjunto $V(n_0, \ldots, n_k)$ igual al producto $W_{n_0} \times \ldots \times W_{n_k} \times [0, 1]^{\omega\setminus\{n_0,\ldots,n_k\}}$ con $W_{n_i} = (0, 1]$. De esta manera tenemos que la familia $\{V(n_0, \ldots, n_k) : n_i \in \omega, k \in \omega\}$ cumple las condiciones (1), (2) y (3) del Teorema 1.3.12.

1.3.14. Teorema. *Ningún espacio P Lindelöf es II-favorable en el juego de Galvin– Telgarsky.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio P de Lindelöf que es II-favorable. Entonces por el Teorema 1.3.13 X se mapea continuamente sobre un espacio II-favorable y segundo numerable, digamos Y. Pero la imagen continua y segundo numerable de un espacio P de Lindelöf es numerable por el Teorema P.17, por lo que Y sería II-favorable y numerable lo cual no ocurre por el Teorema 1.3.2 y por tanto, X no es II-favorable.

1.4. Un espacio neutral.

Una vez estudiada la topología de los espacios favorables a alguno de los jugadores del juego de cubiertas forzadas, terminamos este capítulo con la presentación de un espacio neutral. Este es un espacio P de Lindelöf en cuya construcción se involucran conceptos como el σ producto y su ω-modificación.

1.4.1. Teorema. *Existe un espacio Lindelöf P que es neutral para el juego $\mathcal{CF}$ de Galvin– Telgarsky, es decir, ninguno de los jugadores tiene estrategia ganadora en dicho espacio.*

Demostración. El espacio X que buscamos es subconjunto de la ω-modificación Z del cubo de Cantor $\{0, 1\}^{\omega_1}$.

Dado $f \in Z$ y $\alpha < \omega_1$ hagamos $V_\alpha(f) = \{g \in Z : g(\zeta) = f(\zeta)\}$ para todo $\zeta < \alpha\}$. Es fácil ver que la familia $\{V_\alpha(f) : \alpha < \omega_1\}$ es una base local de f en Z.

Sea Λ el conjunto de los ordinales límite menores que ω_1. Para cada $\lambda \in \Lambda$ tomamos una sucesión creciente $S_\lambda = \{\xi_n(\lambda) : n \in \omega\} \subset \lambda \setminus \Lambda$ que converge a λ. Para cada $\lambda \in \Lambda$ definamos un punto $f_\lambda \in Z$ mediante la igualdad

$f_\lambda^{-1}(1) = S_\lambda$, es decir, f_λ es la función característica del conjunto S_λ. Ahora consideremos los conjuntos $X_0 = \{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, $X_1 = \{f \in Z : |f^{-1}(1)| < \omega\}$ y $X = X_0 \bigcup X_1$. Veamos que X es efectivamente el espacio que buscamos. Es evidente que X es un espacio P por ser subespacio de la ω-modificación de $\{0,1\}^{\omega_1}$. Además $|X| = \omega_1$ puesto que la cardinalidad del σ-producto X_1 y del espacio X_0 es ω_1. Probemos ahora que X es un espacio de Lindelöf; para esto veamos primero que el espacio X_1 es de Lindelöf. Obsérvese que $X_1 = \bigcup\limits_{n\in\omega} \sigma_n$ donde $\sigma_n = \{f \in Z : |f^{-1}(1)| \leq n\}$. Tomemos un $n \in \omega$; si $f \in \{0,1\}^{\omega_1} \backslash \sigma_n$ entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} < \omega_1$ tales que $f(\alpha_i) = 1$, por lo que $f \in V = \{g \in X_1 : g(\alpha_i) = f(\alpha_i), i = 1, \ldots, n+1\}$ donde $V \subset \{0,1\}^{\omega_1} \backslash \sigma_n$, y $V \in \tau\left(\{0,1\}^{\omega_1}\right)$. Así que $\{0,1\}^{\omega_1} \backslash \sigma_n$ es abierto y por lo tanto σ_n es compacto.

Consideremos la función $\varphi : \sigma_1^n \to \{0,1\}^{\omega_1}$ definida por $\varphi(f_1, \ldots, f_n) = \sum\limits_1^n f_i$, $f_i \in \sigma_1$. Esta función es continua, para verificarlo consideremos $\pi_\alpha : \{0,1\}^{\omega_1} \to \{0,1\}$ la proyección sobre el α-ésimo factor del producto $\{0,1\}^{\omega_1}$ y tomemos cualquier conjunto abierto U de este factor. En efecto, el conjunto $(\pi_\alpha \circ \varphi)^{-1}(U)$ es abierto en σ_1^n puesto que si $(f_1, \ldots, f_n) \in (\pi_\alpha \circ \varphi)^{-1}(U)$, entonces el abierto $\{(g_1, \ldots, g_n) : g_i(\alpha) = f_i(\alpha)\} \in \tau(\sigma_1^n)\}$ tiene a $(f_1, \ldots, f_n)$ como elemento y está totalmente contenido en $(\pi_\alpha \circ \varphi)^{-1}(U)$. Esto muestra que $\pi_\alpha \circ \varphi$ es continua para cada $\alpha \leq \omega_1$ y φ es continua. Observemos que σ_1^n es compacto disperso y que $\sigma_n = \varphi(\sigma_1^n)$; de aquí, el espacio σ_n es disperso.

Finalmente, puesto que σ_n es compacto y disperso como subespacio de $\{0,1\}^{\omega_1}$ ese espacio es I-favorable en el juego de cubiertas forzadas $\mathcal{CF}$ según el Teorema 1.3.9 y por los Teoremas 1.3.3 y 1.3.2(2), su ω-modificación, que es el espacio X_1, es un espacio de Lindelöf.

Para verificar que el espacio X es de Lindelöf bastará probar que para cada $U \in \tau(X_1, X)$ el conjunto $X \backslash U$ es numerable; o bien que para cada $U \in \tau(X_1, (\{0,1\}^{\omega_1})_\omega)$ existe un ordinal $\beta < \omega_1$ tal que $f_\lambda \in U$ para cada $\lambda \geq \beta$, ya que en tal caso $X \backslash U \subset \{f_\lambda : \lambda < \beta\}$.

Para cada $f \in X_1$ existe un ordinal $\alpha_f < \omega$ tal que $f \in V_{\alpha_f}(f) \subset U$.

Como X_1 es Lindelöf podemos extraer una subcubierta numerable de la cubierta $\mathcal{U} = \{V_{\alpha_f} : f \in X_1\}$ así que existe un conjunto $A \subset X_1$ tal que $|A| \leq \omega$, y $X_1 \subset \left(\bigcup \{V_{\alpha_f} : f \in A\}\right) \subset \mathcal{U}$. Como A es numerable, hay un ordinal $\beta < \omega_1$ tal que $f^{-1}(1) \subset \beta$ para cada $f \in A$. Veamos que $f_\lambda \in \mathcal{U}$ siempre que $\lambda \geq \beta + 1$ y $\lambda \in \Lambda$. Efectivamente, para cada $\lambda \in \Lambda, \lambda > \beta$

existe $n \in \omega$ tal que $\beta < \xi_n(\lambda)$. Llamemos Q al conjunto $f_\lambda^{-1}(1) \bigcap \beta$; es inmediato que $|Q| < \omega$ por lo que $\chi_Q \in X_1$ así que existe $f \in A$ tal que $\chi_Q \in V_{\alpha_f}(f)$ lo que implica que $\chi_Q|_{\alpha_f} = f|_{\alpha_f}$. Pero $f_\lambda|_\beta = \chi_Q|_\beta$ implica que $f_\lambda|_{\alpha_f} = \chi_Q|_{\alpha_f} = f|_{\alpha_f}$ por lo que $f_\lambda \in V_{\alpha_f} \subset O \subset U$ para cada $\lambda > \beta$, así que $X \backslash U$ es numerable siempre que $U \in \tau(X_1, X)$. De aquí se sigue trivialmente que X es de Lindelöf.

Resta verificar que el espacio X es neutral en el juego $\mathcal{CF}$. Por construcción X es un espacio P de Lindelöf por lo que no puede ser II-favorable según el Teorema 1.3.14, así que sólo falta probar que no es I-favorable en el juego $\mathcal{CF}$. Sea s alguna estrategia del jugador I. Existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $g_0^{-1}(1) \subset \lambda_0$, donde $g_0 = s(\varnothing)$. Para cada $f \in X$ y $\alpha < \omega_1$ sea $U_\alpha(f) = V_\alpha(f) \bigcap X$; es evidente que la familia $\{U_\alpha(f) : \alpha < \omega_1\}$ es una base local de X en el punto f. Dada cualquier sucesión finita $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ podemos construir inductivamente la función $g_{i+1} = s(U_{\alpha_0}(g_0), \ldots, U_{\alpha_i}(g_i))$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$; definimos $u(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) = g_{n+1}$. Supongamos que $n \in \omega$ y se tienen construidos los ordinales $\lambda_0 < \ldots < \lambda_n < \omega_1$ tales que $g_i^{-1}(1) \subset \lambda_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$. Observemos que el subconjunto H_n de X definido por $H_n = \{h \in X : \text{ existen ordinales } \alpha_0, \ldots, \alpha_n < \lambda_n \text{ tales que } h = g_{n+1}\}$, es numerable para cada n y por lo tanto existe $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ para el cual $h^{-1}(1) \subset \lambda_{n+1}$ para todo $h \in H_n$. Este procedimiento inductivo nos proporciona una sucesión creciente $\{\lambda_n : n \in \omega\}$; tomemos $\lambda = \sup\{\lambda_n : n \in \omega\}$.

De la construcción del ordinal λ se desprende que:

$(*)$ Dados $n \in \omega$ y ordinales $\alpha_0, \ldots, \alpha_n < \lambda$ si $f = u(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ entonces existe $m \in \omega$ tal que $f^{-1}(1) \subset \lambda_m$.

En efecto, existe $m \in \omega$ tal que $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\} \subset \lambda_{m-1}$ por lo que $f \in H_{m-1}$; de la definición de λ_m se sigue que $f^{-1}(1) \subset \lambda_m$.

Juguemos un partido en $\mathcal{CF}$ aplicando la estrategia s en el que el punto f_λ no sea cubierto por los conjuntos seleccionados por el jugador II. En su primera jugada I elige necesariamente el punto $g_0 = s(\varnothing)$. Como la sucesión $\{\xi_n(\lambda) : n \in \omega\}$ es creciente y converge a λ, existe un $n_0 \in \omega$ tal que $\lambda_0 < \xi_{n_0}(\lambda)$ y $g_0^{-1}(1) \subset \xi_{n_0}(\lambda)$. Tomemos un ordinal α_0 tal que $\xi_{n_0}(\lambda) < \alpha_0 < \lambda$ y consideremos la respuesta U_{α_0} del jugador II. Como consecuencia de que $g_0(\xi_{n_0}(\lambda)) = 0 \neq f_\lambda(\xi_{n_0}(\lambda))$ sucede que f_λ no pertenece a $U_{\alpha_0}(g_0)$.

Procediendo inductivamente supongamos que $k \in \omega$ y se definieron los puntos $g_0, \ldots, g_k \in X$, los números $n_0, \ldots, n_k \in \omega$ y los correspondientes ordinales $\alpha_0, \ldots, \alpha_k < \lambda$ tales que $g_{m+1} = u(\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$ para todo m en $\{0, \ldots, k\}$ mientras que $g_m^{-1}(1) \subset \xi_{n_m}(\lambda)$ y $\alpha_m \in (\xi_{n_m}(\lambda), \lambda)$ para todo $m \leq k$. Esto garantiza que $f_\lambda(\xi_{n_m}(\lambda)) = 1 \neq g_m(\xi_{n_m}(\lambda)) = 0$, por lo que el punto f_λ

no pertenece al conjunto $U_{\alpha_m}(g_m)$ para cada $m \leq k$. Notemos que el punto $g_{k+1} = u(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$ coincide con $s(U_{\alpha_0}(g_0), \ldots, U_{\alpha_k}(g_k))$. De la propiedad enunciada en $(*)$ se sigue que $g_i^{-1}(1) \subset \lambda_i$ para algún $i \in \omega$.

Puesto que la sucesión $\{\xi_n(\lambda) : n \in \omega\}$ es creciente y converge a λ, existe $n_{k+1} \in \omega$ tal que $\lambda_i < \xi_{n_{k+1}}(\lambda)$ y $g_{k+1}^{-1}(1) \subset \xi_{n_{k+1}}(\lambda)$. Fijemos cualquier ordinal $\alpha_{k+1} \in (\xi_{n_{k+1}}(\lambda), \lambda)$; de las igualdades $g_{k+1}(\xi_{n_{k+1}}(\lambda)) = 0$ y $f_\lambda(\xi_{n_{k+1}}(\lambda)) = 1$ se deduce que si el jugador II responde eligiendo el conjunto $U_{\alpha_{k+1}}(g_{k+1})$ entonces f_λ no pertenece a $U_{\alpha_{k+1}}(g_{k+1})$. Esta construcción inductiva nos proporciona un partido $\{(g_i, U_{\alpha_i}(g_i)) : i \in \omega\}$ mismo que se juega aplicando la estrategia s. Además, f_λ no pertenece a $\bigcup\{U_{\alpha_i}(g_i) : i \in \omega\}$, lo que significa que gana el jugador II. Así queda demostrado que el jugador I no tiene estrategia ganadora en el juego $\mathcal{CF}$ sobre el espacio X y por lo tanto, éste resulta ser un espacio neutral para el juego de cubiertas forzadas.

Capítulo 2

El Juego “Selecciones Densas”de Berner y Juhász.

En este capítulo introducimos el juego $\mathcal{J}$ “Selecciones Densas”presentado originalmente por A.J. Berner e I. Juhász. Estudiaremos la relación entre este juego y las propiedades topólogicas de los espacios sobre los que se realiza, tales como la separabilidad y el π-peso, entre otras. Así mismo, estudiaremos las características de esta relación no solamente en el modelo ZFC. Demostraremos que este juego está determinado en la clase de los espacios compactos bajo ZFC+CH, mientras que bajo ZFC+$\neg$CH+MA existe un espacio neutral numerable.

2.1. Definiciones y caracterizaciones.

Al igual que en el caso del juego de Galvin$-$Telgarsky, de las definiciones concernientes al juego de Juhász inmediatamente se siguen algunos resultados. Incluso arribamos pronto a una caracterización de espacios con π-peso numerable.

2.1.1. Definición (Juego “Selecciones Densas”). Partimos de un espacio topológico no vacio X sobre el cual en la jugada número n J_n el jugador I elige un conjunto $U_n \in \tau^*(X)$ a lo que el jugador II responde eligiendo un punto $x_n \in U_n$. El juego termina cuando se han realizado las jugadas J_n para cada $n \in \omega$. El conjunto $P = \{(U_n, x_n) : n \in \omega\}$ se llama partido en el cual el jugador I gana si $\{x_n : n \in \omega\}$ es denso en X; de otra manera el ganador es el jugador II.

2.1.2. Definición. Supongamos que tenemos una estrategia s para el primer jugador en el juego $\mathcal{J}$ de selecciones densas sobre un espacio X. Una sucesión $(x_0, \ldots, x_n)$ de puntos del espacio X se llama adecuada, si existen abiertos $U_0, \ldots, U_n$ tales que la sucesión $((U_0, x_0), \ldots, (U_n, x_n))$ es un segmento incial de un partido en el que el jugador I aplica la estrategia s.

2.1.3. Definición. Supongamos que $i \in \{I, II\}$ y X es un espacio sobre el cual existe una estrategia ganadora para el jugador i en el juego $\mathcal{J}$ de selecciones densas sobre el espacio X. Decimos entonces que el espacio X es i-favorable.

De las definiciones anteriores se desprende una primera observación sencilla y evidente: si un espacio X no es separable entonces es II-favorable. A continuación presentamos una caracterización de los espacios I-favorables a través de su π-peso.

2.1.4. Teorema. *Un espacio X es I-favorable en el juego $\mathcal{J}$ de selecciones densas si y sólo si su π-peso es numerable.*

Demostración. Supongamos primero que X es un espacio topológico con π-peso numerable, así que podemos elegir una π-base $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \omega\}$ del espacio X.

Una estrategia ganadora s para el jugador I en el juego $\mathcal{J}$ sobre este espacio X consiste simplemente en escoger en la jugada n el elemento B_n de $\mathcal{B}$, para cada $n \in \omega$. De esta manera si U es cualquier conjunto abierto no vacío de X entonces existe $n \in \omega$ tal que $B_n \subset U$ por lo que la jugada $J_n = (B_n, x_n)$ de cualquier partido en el que el jugador I aplique σ es tal que $x_n \in B_n \subset U$. Se sigue que el conjunto $\{x_n : n \in \omega\}$ de puntos elegidos por el segundo jugador es denso en el espacio X, de modo que s es ganadora y X es un espacio I-favorable para el juego $\mathcal{J}$.

Ahora vamos a suponer la existencia de una estrategia ganadora s para el primer jugador en el juego $\mathcal{J}$ sobre el espacio X y procedemos a construir una π-base numerable del espacio X. Observamos que la existencia de la estrategia ganadora s implica que el espacio X es separable, por lo que existe un subconjunto $A \subset X$ tal que $\mid A \mid \leq \omega$ y $\overline{A} = X$.

Vamos a considerar a continuación el conjunto T de todas las sucesiones finitas adecuadas formadas de elementos de A. El conjunto T es numerable

y para cada $\alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in T$ existe una familia $\mathcal{W}_\alpha = \{U_0, \ldots, U_n\}$ tal que $((U_0, a_0), \ldots, (U_n, a_n))$ es un segmento inicial de un partido en $\mathcal{J}$ donde I aplica la estrategia s. Consideremos la familia $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in T} \mathcal{W}_\alpha$; el hecho de que $\mathcal{B}$ es numerable es inmediato, además $\mathcal{B} \subset \tau^*(X)$.
Probemos que $\mathcal{B}$ es en efecto π-base del espacio. Supongamos que existe un conjunto $U' \in \tau^*(X)$ tal que no contiene a ningún $B \in \mathcal{B}$ o bien que para cada $B \in \mathcal{B}$ sucede que $B \backslash U' \neq \varnothing$. Dada la regularidad del espacio X, existe $U \in \tau^*(X)$ tal que $\overline{U} \subset U'$.

Ahora tomamos $V_0 = s(\varnothing)$, como $V_0 \in \mathcal{B}$, tenemos que $V_0 \backslash \overline{U} \neq \varnothing$ lo cual implica que existe un punto $a_0 \in A \bigcap (V_0 \backslash \overline{U})$ puesto que A es denso y $V_0 \backslash \overline{U}$ es un subconjunto abierto no vacío de X.

Supongamos que hemos definido las parejas $(V_0, a_0), \ldots (V_{n-1}, a_{n-1})$ de manera que $V_1 = s(a_0)$ con a_1 en $V_1 \backslash \overline{U}, \ldots, V_{n-1} = s(a_0, \ldots, a_{n-2})$ con $a_{n-1} \in (V_{n-1} \backslash \overline{U}) \cap A$. Sea $V_n = s(a_0, \ldots, a_{n-1})$; como $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in S$ sucede que $V_n \in \mathcal{B}$ así que $V_n \backslash \overline{U} \neq \varnothing$ por lo que existe $a_n \in A \bigcap (V_n \backslash \overline{U})$. Finalmente tenemos un partido del juego $\mathcal{J}$ formado por las parejas (V_n, a_n) el cual se juega según la estrategia s, mientras $\{a_n : n \in \omega\} \bigcap U = \varnothing$, es decir, el primer jugador pierde este partido, lo que contradice la suposición de que la estrategia s es ganadora para él. La contradicción viene de suponer que $\mathcal{B}$ no es π-base, y por lo tanto el π-peso del espacio X es numerable.

2.2. Determinación del juego de selecciones densas y la Hipótesis del Continuo.

A continuación iniciamos nuestro camino hacia la construcción de un espacio neutral para el juego $\mathcal{J}$ de selecciones densas. Este recorrido, empero, no es sencillo e involucra consideraciones sobre el sistema de axiomas con el que estemos trabajando. El problema de encontrar un espacio neutral para el juego de selecciones densas en ZFC fue planteado por I. Juhász en [22] y a la fecha sigue abierto. Diversos enfoques se han ensayado para atacar el problema. M. Scheepers da cuenta de los mismos en [28]. Así que, comenzamos asumiendo la hipótesis del continuo CH y en este caso veremos que es imposible encontrar un espacio neutral para el juego $\mathcal{J}$ en la clase de los espacios compactos. Para tal efecto, requerimos probar los siguientes lemas.

2.2.1. Lema. *Si X es un espacio que contiene un subconjunto denso no separable Y, entonces X es II-favorable para el juego $\mathcal{J}$ de selecciones densas.*

Demostración. Definimos la estrategia t para el segundo jugador como sigue: $t(U_0, \ldots, U_n) = y_n$ tomando $y_n \in U_n \cap Y$; este y_n siempre existe puesto que $\overline{Y} = X$. Si $P = \{(U_i, y_i) : i \in \omega\}$ es cualquer partido en el que II aplica t, el conjunto $\{y_i : i \in \omega\} \subset Y$ no es denso en Y y, por lo tanto, tampoco es denso en X, así que II gana este partido. De modo que t es estrategia ganadora y X es II-favorable.

2.2.2. Lema. *Supongamos que X es un espacio compacto con π-peso no numerable y $\mathcal{B}$ es una π-base de X. Si $\mathcal{D} = \{F \subset X : F \neq \varnothing, F$ es de tipo G_δ y cerrado en $X\}$ y $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ es numerable, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $F \backslash B \neq \varnothing$ para cada $F \in \mathcal{D}'$.*

Demostración. Como X es compacto, para cada $F \in \mathcal{D}'$ existe una familia $\mathcal{C}_F$ que es base externa numerable de F.

La familia $\mathcal{A} = \bigcup\{\mathcal{C}_F : F \in \mathcal{D}'\}$ es numerable y consta de abiertos no vacíos. Supongamos que para cada $B \in \mathcal{B}$ existe un $F_B \in \mathcal{D}'$ tal que $F_B \subset B$. Entonces existe también un $U \in \mathcal{C}_F \subset \mathcal{A}$ tal que $U \subset B$; esto es, para cada $B \in \mathcal{B}$ existe un elemento $U \in \mathcal{A}$ tal que $U \subset B$, lo que implica que $\mathcal{A}$ es una π-base numerable del espacio X.

Esta contradicción muestra que existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $F \backslash B \neq \varnothing$ para cada $F \in \mathcal{D}'$.

2.2.3. Lema. *Bajo las hipótesis del lema anterior para cada $B \in \mathcal{B}$ existe un $C \in \mathcal{D}$ tal que $C \subset B$.*

Demostración. Tomemos un punto $x \in B$; por la regularidad del espacio X hay un abierto $U_0 \in \tau(X)$ tal que $x \in U_0 \subset \overline{U_0} \subset B$. Supongamos que $n \in \omega$ y se han definido los conjuntos abiertos $U_0, \ldots, U_n$ de manera que $x \in U_n \subset \overline{U_n} \subset U_{n-1} \subset \overline{U_{n-1}} \subset \ldots \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset B$. Aplicamos nuevamente la regularidad del espacio X para encontrar un conjunto abierto U_{n+1} tal que $x \in U_{n+1} \subset \overline{U_{n+1}} \subset U_n$. Este procedimiento inductivo nos brinda una familia $\{U_n : n \in \omega\}$ de abiertos en X tal que $\overline{U_0} \subset U$ y $x \in U_{n+1} \subset \overline{U_{n+1}} \subset U_n$ para todo $n \in \omega$. Hagamos $C = \bigcap\limits_{n\in\omega} \overline{U_n} = \bigcap\limits_{n\in\omega} U_n$.

Es evidente que $C \subset B$; el conjunto C es cerrado por ser intersección de cerrados. Se sigue de la igualdad $C = \bigcap_{n \in \omega} U_n$ que C también es de tipo G_δ.

El siguiente resultado asume como premisa la hipótesis del continuo (CH) y tiene como consecuencia que el juego $\mathcal{J}$ de selecciones densas está determinado (esto es que alguno de los jugadores tiene estrategia ganadora) sobre cualquier espacio compacto.

2.2.4. Teorema. *Bajo CH, si X es un espacio compacto cuyo π-peso es no numerable entonces existe $Y \subset X$ tal que Y es denso en X y no separable.*

Demostración. Si la densidad del espacio X es no numerable, hacemos $Y = X$ y no hay otra cosa más que demostrar.
De modo que podemos suponer que X es separable. Esto implica que $\omega < \pi w(X) \leq w(X) \leq 2^{d(X)} \leq 2^\omega = \omega_1$ y por lo tanto $\pi w(X) = \omega_1$. Tomemos una π-base $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que cada B_α es de tipo F_σ en X, esto lo podemos hacer por el Lema P.23. Llamemos $\mathcal{S}$ al conjunto de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de tipo G_δ del espacio X. Por el Lema 2.2.3, existe $C_0 \in \mathcal{S}$ tal que $C_0 \subset B_0$.

Definimos $F_0^0 = C_0 \subset B_0$; el objetivo es construir una familia $\left\{F_\alpha^\beta : \beta \leq \alpha < \omega_1\right\} \subset \mathcal{S}$ tal que $F_{\alpha'}^\beta \subset F_\alpha^\beta$ si $\beta \leq \alpha < \alpha' < \omega_1$. Supongamos que tenemos definido el conjunto F_γ^β para toda $\gamma < \alpha$, $\beta \leq \gamma$; hemos de definir el elemento F_α^β para cada $\beta \leq \alpha$. Lo haremos primero para cada ordinal $\beta < \alpha$. Sea $H_\alpha^\beta = \bigcap_{\beta \leq \gamma < \alpha} F_\gamma^\beta$; por definición, $H_\alpha^\beta \in \mathcal{S}$ así que $\mathcal{H} = \left\{H_\alpha^\beta : \beta < \alpha\right\} \subset \mathcal{S}$ y $\mid \mathcal{H} \mid \leq \omega$. Por el Lema 2.2.3 el conjunto $A_\alpha = \left\{\mu < \omega_1 : H_\alpha^\beta \backslash B_\mu \neq \varnothing \text{ para toda } \beta < \alpha\right\}$ es distinto del vacío. Hagamos $\mu_\alpha = \text{mín} A_\alpha$ y $F_\alpha^\beta = H_\alpha^\beta \backslash B_{\mu_\alpha}$ para todo $\beta < \alpha$. Apliquemos el Lema 2.2.3 una vez más para obtener un conjunto $C \in \mathcal{S}$ tal que $C \subset B_{\mu_\alpha}$; hagamos $F_\alpha^\alpha = C$. De esta manera logramos que para cada $\beta \leq \omega_1$ la familia $\mathcal{F}_\beta = \left\{F_\alpha^\beta : \beta \leq \alpha < \omega_1\right\}$ sea centrada por lo que existe un punto $y_\beta \in \bigcap \mathcal{F}_\beta$; sea $Y = \{y_\beta : \beta < \omega_1\}$.

Observemos primero que Y es no numerable; en efecto si $\beta < \beta'$ entonces

$$\left(\bigcap \mathcal{F}_\beta\right) \bigcap \left(\bigcap \mathcal{F}_\beta'\right) = \varnothing, \text{ puesto que } \bigcap \mathcal{F}_\beta \subset H_{\beta'}^\beta \backslash B_{\mu_{\beta'}}$$

y $\bigcap \mathcal{F}_{\beta'} \subset C_{\mu_{\beta'}} \subset B_{\mu_{\beta'}}$, de donde $y_\beta \neq y_{\beta'}$; de modo que $\mid Y \mid = \omega_1$.

Ahora veamos que Y es denso en X. Consideremos el conjunto $P_\alpha = \left\{\mu < \omega_1 : H_\alpha^\beta \backslash B_\mu \neq \varnothing \text{ para cada } \beta < \alpha\right\}$; recordemos que para cada α se ha definido μ_α como el mínimo de P_α. Obsérvese que $\alpha < \alpha'$ implica que $P_{\alpha'} \subset P_\alpha$ debido a que $H_{\alpha'}^\beta \subset H_\alpha^\beta$ para toda $\beta < \alpha$, por lo tanto $\mu_\alpha \leq \mu_{\alpha'}$. Si $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$ entonces $H_{\alpha'}^\alpha \backslash B_{\mu_\alpha} \neq \varnothing$ pero $H_{\alpha'}^\alpha \subset F_{\alpha'}^\alpha \subset F_\alpha^\alpha \subset B_{\mu_\alpha}$ lo cual no ocurre, así que $\mu_\alpha < \mu_{\alpha'}$ en cuanto $\alpha < \alpha'$. Además, $\alpha \leq \mu_\alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$ puesto que de lo contrario podemos tomar al ordinal $\lambda = \text{mín}\{\alpha : \mu_\alpha < \alpha\}$ y hacer $\lambda' = \mu_\lambda < \lambda$; hemos visto que $\mu_{\lambda'} < \mu_\lambda = \lambda'$ lo que contradice la minimalidad de λ.

Procedemos ahora a probar la densidad del subespacio Y en el espacio X verificando que $Y \bigcap B_\alpha \neq \varnothing$ para cada $\alpha < \omega_1$. Si $\alpha = \mu_\alpha$ entonces $y_\alpha \in Y \bigcap F_\alpha^\alpha \subset Y \bigcap B_{\mu_\alpha} = Y \bigcap B_\alpha$. Si $\alpha < \mu_\alpha$ entonces existe un ordinal $\beta < \alpha$ tal que $H_\alpha^\beta \subset B_\alpha$ por lo que $y_\beta \in Y \bigcap H_\alpha^\beta \subset Y \bigcap B_\alpha$.

Resta únicamente verificar que el espacio Y no es separable, para lo cual veremos que $y_\alpha \notin \overline{\{y_\beta : \beta < \alpha\}}$ para cada $\alpha < \omega_1$. Recordemos que $y_\alpha \in F_\alpha^\alpha \subset B_{\mu_\alpha}$ y $H_\alpha^\beta \backslash B_{\mu_\alpha} = F_\alpha^\beta$ por lo cual, $y_\beta \in F_\alpha^\beta \subset X \backslash B_{\mu_\alpha}$ para cada $\beta < \alpha$ lo que implica que $\{y_\beta : \beta < \alpha\}$ es subconjunto de $X \backslash B_{\mu_\alpha}$ así que $\overline{\{y_\beta : \beta < \alpha\}} \subset X \backslash B_{\mu_\alpha}$ de lo cuál se desprende que $y_\alpha \notin \overline{\{y_\beta : \beta < \alpha\}}$.

Ahora, si $A \subset \omega_1$ es un subconjunto numerable de ω_1 entonces existe un ordinal $\beta < \omega_1$ tal que $\{y_\alpha : \alpha \in A\} \subset \{y_\alpha : \alpha < \beta\}$; hemos visto que $y_\beta \notin \overline{\{y_\alpha : \alpha \in A\}}$. Puesto que la elección del conjunto numerable de índices A es arbitraria, se sigue que ningún subconjunto numerable del conjunto Y es denso en Y, así que Y es no separable.

Con esto hemos demostrado que si asumimos la Hipótesis del Continuo entonces un espacio compacto o bien tiene π-peso numerable, o contiene un subespacio denso no separable. En el primer caso el espacio compacto resulta ser I-favorable en el juego $\mathcal{J}$, mientras que en el segundo caso el compacto es II-favorable por el Lema 2.2.1. Como consecuencia tenemos el siguiente corolario.

2.2.5. Corolario. *Bajo CH, el juego $\mathcal{J}$ de selecciones densas está determinado en la clase de los espacios compactos.*

2.3. Un espacio neutral bajo el Axioma de Martin.

En vista de que la Hipótesis del Continuo resulta inútil en la búsqueda de un espacio neutral para el juego de selecciones densas, al menos en la clase de los espacios compactos, vamos a considerar la negación de esta hipótesis junto con el Axioma de Martin y en este caso sí lograremos nuestro objetivo.

2.3.1. Teorema. *Supongamos que se cumple el Axioma de Martin y la negación de CH. Si X es un espacio topológico numerable, sin puntos aislados, tal que $\omega < \pi w(X) < 2^\omega$ entonces X es un espacio neutral para el juego $\mathcal{J}$ de selecciones densas.*

Demostración. Puesto que el π-peso del espacio X es no numerable, el primer jugador no puede tener estrategia ganadora en el juego $\mathcal{J}$. De modo que basta mostrar que el segundo jugador tampoco tiene estrategia ganadora.

Supongamos que s es una estrategia ganadora para el segundo jugador en el juego $\mathcal{J}$ sobre el espacio X. Usaremos la estrategia s para construir una sucesión de subconjuntos densos del espacio X de la siguiente manera: el primer conjunto es simplemente $\{s(U) : U \in \tau^*(X)\}$ con lo que se tienen definidos los conjuntos $\{(U_{n_1}, x_{n_1}) : n_1 \in \omega\}$ donde $x_{n_1} = s(U_{n_1})$ y el conjunto $\{x_{n_1} : n_1 \in \omega\}$ es denso en el espacio X.

En el siguiente paso, fijamos al elemento $n_1 \in \omega$ y tomamos el conjunto $\{s(U_{n_1}, U) : U \in \tau^*(X)\}$ que es denso en el espacio X, así que se definen los conjuntos $\{(U_{n_1,n_2}, x_{n_1,n_2}) : n_2 \in \omega\}$ donde $x_{n_1,n_2} = s(U_{n_1}, U_{n_1,n_2})$ y $\{x_{n_1,n_2} : n_2 \in \omega\}$ que es denso en X. En el paso $k+1$, suponemos que tenemos definidos los conjuntos $\{(U_{n_1,n_2,\ldots,n_k}, x_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) : n_k \in \omega\}$ donde $x_{n_1,n_2\ldots,n_k} = s(U_{n_1}, U_{n_1,n_2}, \ldots, U_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ y el conjunto $\{x_{n_1,n_2,\ldots,n_k} : n_k \in \omega\}$ es denso en X.

Para $n_1, \ldots, n_k$ fijos en ω tomamos el conjunto $\{s(U_{n_1}, \ldots, U_{n_1,n_2,\ldots,n_k}, U) : U \in \tau^*(X)\}$ que es denso en X así que existen los correspondientes conjuntos $\{(U_{n_1}, \ldots, U_{n_1,n_2,\ldots,n_{k+1}}, x_{n_1,\ldots,n_{k+1}}) : n_{k+1} \in \omega\}$ donde $x_{n_1,\ldots,n_{k+1}} = s(U_{n_1}, \ldots, U_{n_1,n_2,\ldots,n_{k+1}})$ y $\{x_{n_1,\ldots,n_{k+1}} : n_{k+1} \in \omega\}$ que es denso en el espacio X.

A continuación definimos $(Q, <)$ como el siguiente conjunto parcialmente ordenado: $Q = \{(n_1, \ldots, n_k) : k \in \mathbb{N}, n_i \in \omega\}$ y si q y q' son elementos de Q entonces $q < q'$ si $q' \mid_{\{1,\ldots,k\}} = q$ es decir $q = (n_1, \ldots, n_k)$ implica que $q' = (n_1, \ldots, n_k, n_{k+1}, \ldots, n_l)$. Observemos que Q es numerable, así que satisface la condición de cadena numerable. Para aplicar MA necesitamos además considerar una familia de menos que 2^ω conjuntos densos en el conjunto $(Q, \leq)$; para esto consideremos una π-base $\mathcal{B}$ del espacio X con $|\mathcal{B}| < 2^\omega$. Para cada abierto $U \in \mathcal{B}$ definimos el siguiente conjunto: $D_U = \{s = (n_1, \ldots, n_k) \in Q :\ \text{existe } i \leq k \text{ tal que } x_{n_1,\ldots,n_i} \in U\}$. Verifiquemos que D_U es denso en el conjunto $(Q, <)$ para cada $U \in \mathcal{B}$. En efecto, si $U \in \mathcal{B}$ y $q \in Q$, digamos que $q = (n_1, \ldots, n_k)$. Por construcción el conjunto $\{x_{n_1,\ldots,n_{k+1}} : n_{k+1} \in \omega\}$ es denso en el espacio X así que hay un $n_{k+1} \in \omega$ tal que $x_{n_1,\ldots,n_{k+1}} \in U$ por lo que $q' = (n_1, \ldots, n_{k+1}) \in D_U$ y $q < q'$ mientras D_U es denso en Q. La familia de los D_U con $U \in \mathcal{B}$ tiene cardinalidad menor o igual que la cardinalidad de $\mathcal{B}$ que es menor que 2^ω así que podemos aplicar el axioma de Martin y tomar un filtro $\mathcal{F}$ en $(Q, <)$ tal que para cada $U \in \mathcal{B}$, tenemos que $\mathcal{F} \bigcap D_U \neq \varnothing$. Ahora como $\mathcal{F}$ es filtro, si $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathcal{F}$ entonces $(n_1, \ldots, n_i) \in \mathcal{F}$ para cada $i \leq k$. Además si $q = (n_1, \ldots, n_k)$ y $q' = (m_1, \ldots, m_l)$ son elementos de $\mathcal{F}$ entonces existe un elemento $r = (a_1, \ldots, a_t)$ tal que $q \leq r$ y $q' \leq r$, así que r extiende tanto a q como a q' lo que implica que $q' \leq q$ ó $q \leq q'$ para cada par de elementos q y q' en $\mathcal{F}$. Lo anterior quiere decir que podemos escribir $\mathcal{F}$ como $\mathcal{F} = \{(n_1), (n_1, n_2), \ldots, (n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k), (n_1, \ldots, n_{k+1}), \ldots\}$.

Observemos que $\mathcal{F}$ es infinito, ya que si fuese finito se podría escribir como $\mathcal{F} = \{(n_1), \ldots, (n_1, \ldots, n_k)\}$ y entonces habría un abierto $U \in \mathcal{B}$ que estaría contenido en $X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \{x_{n_1,\ldots,n_i}\}$; pero $\mathcal{F} \bigcap D_U \neq \varnothing$ implica que existe un $q = (n_1, \ldots, n_l) \in \mathcal{F}$ tal que $x_{n_1,\ldots,n_i} \in U$ para algún $i < l$. Esta contradicción muestra que $\mathcal{F}$ es infinito.

Para concluir la demostración consideremos el partido en $\mathcal{J}$

$$P = \{(U_{n_1}, x_{n_1}), \ldots, (U_{n_1,\ldots,n_k}, x_{n_1,\ldots,n_k}), \ldots\} = \{(U_{n_1,\ldots,n_i}, x_{n_1,\ldots,n_i}) : i \in \mathbb{N}\}.$$

Recordemos que para cada $U \in \mathcal{B}$ existe $q = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathcal{F} \bigcap D_U$ tal que $x_{n_1,\ldots,n_i} \in U$ para algún $i < k$; así que el conjunto $\{x_{n_1,\ldots,n_i} : i \in \mathbb{N}\}$ es denso en el espacio X. Por construcción, el punto $x_{n_1,\ldots,n_k} = s(U_{n_1}, \ldots, U_{n_1,\ldots,n_k})$ por lo que P es un partido en el que el segundo jugador aplica la estrategia s y pierde. De modo que el jugador II no tiene estrategia ganadora sobre el espacio X y por lo tanto X es neutral para el juego $\mathcal{J}$.

2.3.2. Corolario. *Si se cumple MA junto con la negación de CH entonces existe un espacio neutral numerable para el juego de selecciones densas.*

Demostración. En virtud del Teorema P.25 existe un subespacio denso numerable X del cubo de Cantor $\{0,1\}^{\omega_1}$. Por el Teorema P.26 este espacio X cumple las hipótesis del Teorema 2.3.1 y por lo tanto es neutral para el juego $\mathcal{J}$.

Bibliografía

[1] Arkhangel'skii, A.V., *The construction and classification of topological spaces and cardinal invariants*, Russian, Math. Surveys **33: 6** (1978), 33-96.

[2] Arkhangel'skii, A.V., *On relations between invariants of topological spaces and their subspaces*, Russian, Math. Surveys **35: 3** (1980), 1-23.

[3] Arkhangel'skii, A.V., *Classes of topological groups*, Russian, Math. Surveys **36: 3** (1981), 151-174.

[4] Arkhangel'skii, A.V., *Contunuous maps, factorizatin theorems, and function spaces*, Trudy Moskovsk. Math. Obshch.**47** (1984), 3-21.

[5] Arkhangel'skii, A.V., *Function spaces in the topology of pointwise convergence. Part I: General topology: function spaces and dimension,* Moskovsk. Gos. Univ., (1985), 3-66.

[6] Arkhangel'skii, A.V., Ponomarev, V.I., *Fundamentals of General Topology: Problems and Excercises,* Reidel, 1984.

[7] Arkhangel'skii, A.V., Tkachuk, V.V., *Function spaces and topological invariants,* Moskovsk. Gos. Univ., 1985.

[8] Arkhangel'skii, A.V., Tkachuk, V.V.,*Calibers and point-finite cellularity of the spaces $C_P(X)$ and some questions of S. Gul'ko and M. Husek,* Topol. Appl **23: 1** (1986), 65-74.

[9] Christiansen, J.P.R., *Topology and Borel structure.* Amsterdam, 1974.

[10] Debs, G., *Pointwise and uniform convergence on a Corson compact space* Topol. Appl. **23: 3** (1986), 299-303.

[11] Dijkstra, J., Grilliot, T., Lutzer, D., Mill, J. van, *Function spaces of low Borel complexity* Proc. Amer. Math. Soc. **94: 4** (1985), 703-710.

[12] Engelking, R. *General Topology,* Berlin: Heldermann, 1989.

[13] Galvin, F. *Indeterminacy of point-open games.* Bull. Acad. Pol. sci.**26: 5,** (1978), 445-449.

[14] Gerlits, J.,*Some properties of $C_P(X)$ II,* Topol. Appl **15: 3** (1983), 255-262.

[15] Gerlits, J., Nagay Zs.,*Some properties of $C_P(X)$ I,* Topol. Appl. **14: 2** (1982), 151-161.

[16] Gillman, L., Jerison, M., *Rings of continuous function,* Princeton, 1960.

[17] Gruenhage, G., *Covering properties of $X^2 \setminus \Delta, W$-sets and compact subsets of Σ-products,* Topol. Appl., **17: 3** (1984), 287-304.

[18] Gruenhage, G., *Games, covering properties and Eberlein compacta,* Topol. Appl., **23: 3** (1986), 291-298.

[19] Hodel, Richard.*Cardinal Functions I. En Handbook of set-theoretic topology.* Kunen y Vaughan (eds.). Netherlands: Elsevier Science Publishers, 1984, pp. 1-61.

[20] Juhász, István. *Cardinal Functions in Topology. Ten Years Later.* Amsterdam: North Holland P.C., 1980.

[21] Juhász, István. *Point picking games and HDF's. En Models and Sets.* Proc. Logic Coll. Springer, LNS 1103, 1983, 53-66.

[22] Juhász, István. *On point picking games.* Topology proceedings **10:1** (1985), 103-110.

[23] Lutzer, D.J., McCoy,. R..A.,*Category in function spaces,* Pacific J. Math **89: 2** (1980), 1-24.

[24] Lutzer, D.J., Mill, J. van, Pol, R.,*Descriptive complexity of function spaces,* Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985), 121-128.

[25] Nagami, K., Σ*-spaces,* Fund. Math **65: 2** (1965), 162-192.

[26] Pelczynsky,A.,*Linear extensions, linear averagings and their application to the linear topological classificationof spaces of continuous functions,* Diss. Math. **58** (1968).

[27] Pták, V., *On a theorem of W.F. Eberlein* Studia Math **14: 2** (1954), 276-284.

[28] Scheepers M.,*Topological games and Ramsey theory, en Open problems in Topology II* E. Pearl ed., Elsevier B.V. Amsterdam, 2007, 61-89.

[29] Schmets, J., *Espaces de fonctions continues,* Lecture notes in Math. **519: XII** (1976).

[30] Telgarsky, Ratislav. *Spaces defined by topological games.* Fund. Math **88:3,** (1975), 193-223.

[31] Telgarsky, Ratislav. *Spaces defined by topological games, II.* Fundamenta Matematicae **116:3** (1983), 189-207.

[32] Tkachuk, V.V., *Aplicaciones topológicas de la Teoría de Juegos,* Moscú: Editorial de la Universidad Estatal de Moscú, Moscú, 1992.

[33] Tkachuk, V.V.,*On the multiplicativity of certain properties of spaces of mappings in the topology of pointwise convergence,* Moscow Univ. Math. Bull. **39: 6** (1984), 53-57.

[34] Tkachuk, V.V.,*Characterization of Baire property in $C_P(X)$ by properties of the space X, en Kardinaln. invariant. i otobrazh. topol. prostranstv.,* Izhevsk, 1984, 76-77.

[35] Tkachuk, V.V., *The spaces $C_P(X)$: decomposition into a countable union of bounded subspaces and completness properties,* Topol. Appl. **22: 3** (1986), 241-254.

[36] Tkachuk, V.V., *Some new versions of an old game* Comment. Math. Univ. Carolinae. **36: 1** (1995), 179-198.

[37] Tkachuk, V.V., *Curso Básico de Topología General* México: UAM-Iztapalapa, México, 1999.

[38] Tkachuk, V.V.,*Teoría de juegos en topología,* Carta Informativa SMM **44** (2005), 10-11.

[39] Weiss. *Versions of Martin's Axiom. En Handbook of set-theoretic topology.* Kunen y Vaughan (eds.). Netherlands: Elsevier Science Publishers, 1984, 827-887.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE IDÓNEA COMUNICACIÓN DE RESULTADOS

No. 00018

DOS JUEGOS TOPOLOGICOS
CLASICOS

En México, D.F., se presentaron a las 17:00 horas del día 17 del mes de abril del año 2008 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS

DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA

DR. VLADIMIR TKACHUK VLADIMIROVICH

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Idónea Comunicación de Resultados cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

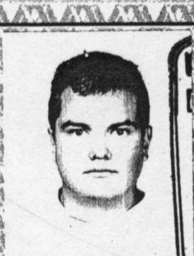
MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: DAVID GUERRERO SANCHEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
DIRECCIÓN DE SISTEMAS ESCOLARES
Casa abierta al tiempo

DAVID GUERRERO SANCHEZ
FIRMA DEL ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTORA DE LA DIVISIÓN DE CBI

DRA. VERONICA MEDINA BAÑUELOS

PRESIDENTE

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS

VOCAL

DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA

SECRETARIO

DR. VLADIMIR TKACHUK VLADIMIROVICH