Producción de Entropía en Cadenas de Markov

Tesis que presenta:
Jorge Ricardo Bolaños Servín
para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Posgrado en Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana
Iztapalapa

Asesor: Dr. Roberto Quezada Batalla.

Julio 16, 2010

Agradecimientos

Para Elvira Servín, mi mamá quien siempre ha estado conmigo.
Para Jorge Bolaños, mi papá quien me ha dado todo sin pedir nunca nada a cambio.
Para Diego Arroyo, mi amigo de quien he aprendido a conocerme a mí mismo.

Gracias a mi asesor Roberto Quezada Batalla por su visión, guía, aliento, ayuda y tiempo para la ejecución de esta empresa y para mi crecimiento como matemático.
A Julio Cesar García Corte cuyas clases y conversaciones enriquecieron de manera notable este trabajo. A Jorge León Vázquez por la revisión y su función de sinodal externo.

Agradezco el apoyo de CONACyT mediante el proyecto No.49510-F y la beca de posgrado No.24010.

Índice

Introducción

De acuerdo con la opinión de David Ruelle [23], la Mecánica Estadística, creada hacia finales del siglo XIX entre otros por Maxwell, Boltzman y Gibbs, consiste de dos partes diferentes: la mecánica estadística de sistemas en equilibrio y aquella de sistemas fuera de equilibrio. La primera se ha desarrollado y aplicado con gran éxito, pero el desarrollo de la segunda ha sido mucho más lento y aún se depende de las ideas originales de Boltzman sobre la irreversibilidad, de manera que el conocimiento actual de este fenómeno es todavía principalmente cualitativo. Un sistema macroscópico consiste de una gran cantidad (del orden de 10^{23}) de elementos microscópicos tales como átomos y moléculas. El problema fundamental de la mecánica estadística de sistemas fuera de equilibrio, consiste en explicar los fenómenos irreversibles que prevalecen en sistemas macroscópicos debido a la evolución reversible de sus componentes microscópicas, dando predicciones cuantitativas. La solución de este problema se inició en 1872 con la formulación de lo que ahora se llama ecuación de transporte de Ludwig Edward Boltzman (Vienna 1844 - Trieste 1906). A pesar de su poco riguroso estilo de escribir y del rechazo que sus ideas provocaron entre sus contemporáneos, Boltzman hizo contribuciones mayores no sólo en física y química, sino también en matemáticas. En particular la noción de **entropía** y su famoso **Teorema H**, han sido una inmensa fuente de inspiración para, por una parte, entender nuestro universo en términos matemáticos y, por otro lado, para atacar muchos problemas puramente matemáticos, véase por ejemplo [25].

Al tratar con los problemas físicos de sistemas fuera de equilibrio, se usan dos enfoques: en el primero se modela el sistema mediante un proceso estocástico y en el otro mediante un sistema dinámico determinista. Siguiendo el libro de los Qian [21], en los primeros tres capítulos de este trabajo nos concentramos en la modelación usando cadenas de Markov a tiempo discreto y continuo. En el último capítulo estudiamos una cadena de spines cuánticos, considerado como un sistema cuántico abierto que interacciona con su entorno, este es un caso particular de una clase de sistemas cuánticos abiertos estudiados en [1]. Los objetos de nuestro interés son distintos de aquellos relacionados con el Teorema H, pues sólo estudiaremos estados estacionarios fuera de equilibrio que, de acuerdo con Prigogini [11, 19], son el punto medular.

Las ideas centrales de modelación de sistemas físicos mediante procesos estocásticos están presente en el trabajo de Boltzman y más claramente en los trabajos de Einstein sobre el movimento browniano, [8]. La investigación sobre la irreversibilidad de sistemas fuera de equilibrio se inició con los trabajos de Haken [13, 14] sobre lasers y Prigogini [11, 19] sobre las oscilaciones de reacciones químicas. En particular, Nicolis y Prigogini [19] consideran que un sistema fuera de equilibrio es un sistema abierto estacionario con tasa de producción de entropía positiva, lo cual significa intercambio de materia y energía con su entorno, e introducen el concepto de estructura disipativa para designar el fenómeno que se origina de la cooperación de los subsistemas en una situación en la que el sistema total está en equilibrio. Hacemos notar que precisamente esta característica está presente en la cadena de spines que estudiamos en el Capítulo 4.

Para distingir los estados de equilibrio de aquellos que siendo estacionarios están fuera de equilibrio, en física se tiene la condición de **balance detallado**, ya conocida por Boltzman, que describe la dualidad que existe entre el proceso de transición de un estado a otro y el proceso de transición inverso. En matemáticas tenemos la condición de **reversibilidad de Kolmogorov** que establece que la probabilidad de visitar los estados $x_2, x_3, \cdots x_n, x_1$ iniciando en x_1 es la misma que la de vistarlos en el orden inverso $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2, x_1$ iniciado en x_1. No es un accidente que ambas condiciones sean equivalentes pues las dos nociones: equilibrio y reversibilidad, resultan ser lo mismo.

Si el balance detallado caracteriza equilibrio, ¿qué característica debe tener un sistema fuera de equilibrio? Trabajando con la descomposición en ciclos de cadenas de Markov de Kalpazidou [16], recientemente los Qian [21] desarrollaron una descripción de la producción de entropía de una cadena de Markov estacionaria en términos de la distribución circulatoria ó descomposición en ciclos, mostrando así el papel fundamental que juegan los ciclos tanto en el comportamiento asintótico de la cadena como en la producción de entropía. Esta descomposición en ciclos implica que la corriente o flujo entre los estados de la cadena, tiene una descomposición en ciclos de manera que, si el flujo neto en cada ciclo es nulo el sistema está en balance detallado y la cadena es reversible; pero si hay un flujo neto no nulo en al menos un ciclo, entonces la cadena es irreversible. Una cadena de Markov con una corriente neta no nula tiene producción de entropía positiva y viceversa. Entonces las cadenas de Markov con una corriente neta no nula pueden tomarse como modelos de sistemas fuera de equilibrio.

El propósito principal del presente trabajo es hacer una revisión de la teoría de los Qian en el caso de cadenas de Markov finitas, completando los detalles de manera que la exposición resulte fácil de entender para el lector interesado. Además, como mencionamos antes, presentamos un ejemplo nuevo, relativamente "simple", de una cadena de Markov a tiempo continuo con un estado invariante fuera de equilibrio, a la cual aplicamos su teoría. Este ejemplo completa, en cierta medida, la exposición de los Qian: pues por una parte es un ejemplo de una cadena de Markov a tiempo continuo irreversible, los Qian no presentan ejemplo alguno de este tipo; por otro lado, puesto que proviene de un generador de Gorini-Kossakowski-Sudarshan y Lindblad (GKS-L) restringido a una subálgebra conmutativa del álgebra de las matrices complejas 4×4, está asociada con un sistema cuántico fuera de equilibrio, los cuales no se consideran en el libro de los Qian. El semigrupo cuántico de Markov asociado con este generador GKS-L, describe la evolución de una cadena de spines cuánticos que interacciona con dos baños térmicos a diferentes temperaturas, [1]. Otros enfoques sobre sistemas cuánticos fuera de equilibrio se pueden encontar en las referencias [23], [15, 2].

Capítulo 1

Circuitos, ciclos y funciones de pasaje

1.1 Circuitos

Un circuito o ciclo es un concepto topológico que puede definirse geométricamente o algebraicamente. Desde el punto de vista geométrico, un circuito de puntos distintos es la imagen, bajo cierta función, de un círculo o de cualquier curva homeomorfa a un círculo, por ejemplo una curva de Jordan compuesta de varios arcos cerrados. Mientras que la definición algebraica requiere la noción de orientación, es decir, distinguir un punto inicial y un punto final en cada arco. Cuando los arcos de un circuito tienen la misma orientación lo llamaremos circuito dirigido.

Una propiedad que poseen los circuitos dirigidos es que regresan periódicamente a sus puntos, esto motiva una definición que exprese dicha periodicidad.

Definición 1.1.1. *Una función de circuito dirigido en un conjunto numerable S es una función periódica c, $c : \mathbb{Z} \to S$.*

A los valores de la función $c(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, les llamamos puntos, vértices o nodos de c, mientras que a las parejas $(c(n), c(n+1))$, $n \in \mathbb{Z}$, les llamamos aristas. Al menor entero $p = p_c \geq 1$ que satisface la ecuación $c(n+p) = c(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ le llamaremos periodo de c.

Con cada función de circuito dirigido c podemos asociar una clase de funciones de circuito dirigido c', construida a partir de c mediante el grupo de translaciones en $\mathbb{Z}$ de la siguiente manera: para cualquier $i \in \mathbb{Z}$ fijo, definimos la función $t_i(n) := n + i$, $n \in \mathbb{Z}$. Con ello obtenemos una nueva función de circuito dirigido c' mediante la composición $c' = c \circ t_i$, es decir, $c'(n) = c(n + i)$, $n \in \mathbb{Z}$.

El hecho de que c y c' no difieren escencialmente motiva definir la siguiente relación.

Definición 1.1.2. *Decimos que dos funciones de circuito dirigido c y c' están relacionadas, denotándolo por $c \sim c'$, si y sólo si existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $c' = c \circ t_i$.*

Es importante notar que si $c \sim c'$ entonces ambas funciones comparten periodo, vértices y dirección.

Proposición 1.1.3. *La relación $\sim$ es una relación de equivalencia sobre la clase de todos las funciones de circuito dirigido en S.*

Demostración. *(i)Reflexividad.* Una función de circuito dirigido c satisface $c \sim c$, pues $c = c \circ t_0$.
(ii)Simetría. Supongamos que $c \sim c'$, es decir existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $c'(n) = c(n + i)$. A partir de ello vemos que $-i$ satisface $c(n) = c'(n + (-i))$. Por lo tanto $c' \sim c$.
(iii)Transitividad. Si $c \sim c'$ y $c' \sim c''$, entonces existen $i, j \in \mathbb{Z}$ tales que $c'(n) = c(n + i)$ y $c''(n) = c(n + j)$. De aquí obtenemos $c''(n) = c'(n + j) = c(n + i + j)$. Así que $c \sim c''$. $\square$

Definición 1.1.4. *Le llamamos **circuito dirigido** a cada una de las clases de equivalencia inducidas por $\sim$.*

Un circuito dirigido c está completamente determinado por

- El periodo p_c
- Cualquier $(p_c + 1)$-tupla $(i_1, i_2, \ldots, i_{p_c}, i_{p_c+1})$ con $i_{p_c+1} = i_1$ ó cualesquiera p_c parejas ordenadas $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{p_c}, i_{p_c+1})$ con $i_{p_c+1} = i_1$ donde $i_l = c(n + l - 1)$, $1 \leq l \leq p_c$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.1.5. *El **ciclo dirigido** asociado con un circuito dirigido dado $c = (i_1, i_2, \ldots, i_p, i_1)$, $p \geq 1$, con puntos distintos $i_1, i_2, \ldots, i_p$, es la sucesión ordenada $\hat{c} = (i_1, \ldots, i_p)$.*

Como consecuencia de las definiciones anteriores, un ciclo dirigido es invariante respecto a permutaciones cíclicas.

Definición 1.1.6. *Dado un circuito dirigido $c = (i_1, i_2, \ldots, i_p, i_1)$ definimos el **circuito en reversa** como $c_- = (i_1, i_p, i_{p-1}, \ldots, i_2, i_1)$.*

1.2 Funciones de pasaje

Dado un conjunto finito S y un circuito dirigido c en S, para el estudio de sus propiedades es útil saber cuándo un circuito pasa a través de un punto. La manera más sencilla de hacerlo es usar la función indicadora de dicho evento.

Definición 1.2.1. *Dado un circuito dirigido $c = (i_1, \ldots, i_p, i_1)$, definimos la* ***función de pasaje de*** *c denotada por J_c como*

$$J_c(k) = card\{l \in \mathbb{Z} : i_{l+1} = k, 0 \leq l \leq p_c - 1\}$$

Decimos que c ***pasa por*** *k si y sólo si $J_c(k) \neq 0$. $J_c(k)$ es el número de veces que c pasa por k.*

Proposición 1.2.2. *Si c es un circuito dirigido entonces $J_{c \circ t_j}(k) = J_c(k)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Como $c \circ t_j$ es una permutación cíclica de c es claro que $J_{c \circ t_j}(k) = J_c(k)$. $\square$

Cuando los puntos de c son distintos, con excepción de los extremos, entonces

$$J_c(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es punto de } c; \\ 0 & \text{otro.} \end{cases}$$

Definición 1.2.3. *Dados $k_1, \ldots, k_r \in S$ con $r > 1$ y un circuito dirigido c en S con periodo p, definimos $J_c(k_1, \ldots, k_r)$ como*

$$J_c(k_1, \ldots, k_r) = card\{l \in \mathbb{Z} : c \circ t_l(m) = k_m, m = 1, 2, \ldots, r, 0 \leq l \leq p_c - 1\}$$

Decimos que c ***pasa através de*** *$(k_1, \ldots, k_r)$ si y sólo si $J_c(k_1, \ldots, k_r) \neq 0$. $J_c(k_1, \ldots, k_r)$ es el número de veces que c pasa por $(k_1, \ldots, k_r)$.*

Cuando los puntos de c son distintos, excepto por los extremos, entonces

$$J_c(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \text{ es arista de } c; \\ 0 & \text{otro.} \end{cases}$$

Lema 1.2.4. *La función de pasaje J_c satisface las siguientes propiedades de balance:*

$$J_c(k) = \sum_{i \in S} J_c(k, i) = \sum_{l \in S} J_c(l, k)$$

$$J_c(k) = J_{c_-}(k_-)$$

para cualquier $k = (k_1, \ldots, k_r) \in S^r$, $r \geq 1$.

Demostración. Primero notemos que c no pasa por k si y sólo si c no pasa por (k, i) para todo $i \in S$, equivalentemente, c no pasa por (l, k) para todo $l \in S$. En ese caso se cumple

$$J_c(k) = \sum_{i \in S} J_c(k, i) = \sum_{l \in S} J_c(l, k) = 0$$

En el otro caso, cada vez que c pasa por k, considerando al punto de c inmediatamente después de k, digamos i, podemos concluir que c pasa por (k, i). De manera análoga, fijándonos en el punto inmediatamente anterior a k, digamos l, concluímos que c pasa por (l, k).

Para la segunda ecuación es claro que el número de veces que c pasa por k es el mismo número de veces que c_- pasa por k_-.

□

Definición 1.2.5. *Una función $w : S \times S \to \mathbb{Z}_+$ no negativa que satisface las propiedades de balance del lema anterior la llamaremos* ***función de balance****.*

Sorprendentemente el siguiente teorema muestra que cualquier función de balance puede expresarse como combinación lineal de funciones de pasaje de ciertos circuitos dirigidos. Es decir, en cierto sentido, las funciones de pasaje forman una "base" de las funciones de balance.

Teorema 1.2.6. *Sea S un conjunto no vacío, finito y w una funcion no negativa definida sobre $S \times S$. Supongamos que w satisface las ecuaciones de balance*

$$\sum_{i \in S} w(k, i) = \sum_{i \in S} w(i, k), \quad k \in S. \tag{1.1}$$

Tal que cada suma es estrictamente positiva. Entonces existe una colección ordenada, finita $\mathcal{C}$ de circuitos dirigidos en S y un conjunto ordenado $\{w_c : c \in \mathcal{C}\}$ de números estrictamente positivos, dependiendo del orden de $\mathcal{C}$, tales que

$$w(k, i) = \sum_{c \in \mathcal{C}} w_c J_c(k, i). \tag{1.2}$$

para todo $k, i \in S$ donde $J_c(i, j)$ es una función de pasaje.

Demostración. Sea $k \in S$ arbitrario fijo. Por la positividad estricta de (1.1) existe un $j \in S$ tal que $w(k,j) = w_-(j,k) > 0$. Hacemos $i_1 = k$, $i_2 = j$. Tomando i_2 fijo y aplicando (1.1), podemos concluir que existe un i_3 tal que $w(i_2, i_3) > 0$. Repitiendo este proceso obtenemos una sucesión de pares $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots$ para los cuales $w(i_k, i_{k+1}) > 0$. Como S es finito los términos de la sucesión eventualmente se repiten. Sea n el mínimo índice tal que $i_n = i_k$ para algún k, $1 < k < n$. Entonces la lista $(i_k, i_{k+1}), (i_{k+1}, i_{k+2}), \ldots, (i_{n-1}, i_k)$ determina un circuito dirigido c_1 con puntos distintos.

Definimos
$$w_{c_1} := \min_{\{(i,j):(i,j) \text{ es arista de } c_1\}} w(i,j).$$

Consideramos la función $w_1(i,j) := w(i,j) - w_{c_1} J_{c_1}(i,j)$. Por la definición de w_{c_1} y por ser combinación lineal de funciones de balance, esta nueva función es no negativa y de balance.

Si $w_1 \equiv 0$ la conclusión del teorema se satisface para $\mathcal{C} = \{c_1\}$. Si no, entonces por contrucción w_1 se mantiene estrictamente positiva en número menor de parejas que w. Repitiendo el argumento ahora para w_1 obtenemos un circuito dirigido c_2 de puntos distintos, excepto por los extremos. Definimos
$$w_{c_2} := \min_{\{(i,j):(i,j) \text{ es arista de } c_2\}} w_1(i,j).$$

Y tenemos la función
$$\begin{aligned} w_2(i,j) &= w_1(i,j) - w_{c_2} J_{c_2}(i,j) \\ &= w(i,j) - w_{c_1} J_{c_1}(i,j) - w_{c_2} J_{c_2}(i,j), \end{aligned}$$

etcétera.

Mediante este procedimiento obtenemos una sucesión $w_1, w_2, \ldots$ de funciones de balance tales que cada w_{k+1} permanece estrictamente positiva en menos parejas que w_k. Por ello después de un número finito de pasos, digamos n, la sucesión de funciones se vuelve constante 0, es decir $w_l \equiv 0$ para $l \geq n+1$.

Si hacemos $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ por construcción para todo $i, j \in S$ se satisface
$$w(i,j) = \sum_{c \in \mathcal{C}} w_c J_c(i,j)$$

$\square$

La ecuación (1.1) se llama "ecuación generadora de ciclos" pues puede usarse como definición implícita de circuitos dirigidos, véase la referencia [16]. De acuerdo con lo anterior diremos que la función w está representada por $(\mathcal{C}, w_c)$ y que (1.2) es su descomposición en circuitos dirigidos.

Capítulo 2

Descomposición en ciclos: tiempo discreto

2.1 Introducción

En este capítulo $\xi = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una cadena de Markov a tiempo discreto, irreducible y estacionaria en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, con espacio de estados S finito, matriz de transición $P = (p_{i,j})_{i,j\in S}$ y distribución invariante $\Pi = \{\pi_i\}_{i\in S}$. Siempre que sea necesario, por ser S finito, consideraremos a la σ-álgebra total $\Sigma = 2^S$ en el espacio medible (S, Σ) y $|S| = N$.

Frecuentemente tomaremos $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ como el espacio canónico dado por el Teorema de Extensión de Kolmogorov para ξ, es decir,

$$\Omega = S^{\mathbb{Z}} = \{\omega = (\omega_k)_{k\in\mathbb{Z}} : \omega_k \in S,\ \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

con $\xi_n(\omega) = \omega_n$.

En este capítulo definiremos una cadena de Markov auxiliar que nos ayudará a estudiar ciertas propiedades de la cadena ξ, en particular, la existencia de ciclos que no dependen de la orbita ω. Esto nos permitirá alcanzar nuestro objetivo principal que es obtener una descomposición de la cadena en términos de estos ciclos.

Ilustraremos la definición de la cadena auxiliar $\{\eta_n\}_n$ mediante un ejemplo. Supongamos que la órbita ω de ξ es

$$\{3, 4, 7, 3, 1, 2, 1, 2, 4, 1, \dots\}$$

En cada tiempo n, $\eta_n(\omega)$ será la órbita de la cadena original hasta el tiempo n, respetando el orden en que aparecen los estados, pero descartando los ciclos formados hasta dicho tiempo. Es decir,

n	0	1	2	3	4	5	6
$\xi_n(\omega)$	3	4	7	3	1	2	1
$\eta_n(\omega)$	$[3]$	$[3,4]$	$[3,4,7]$	$[3]$	$[3,1]$	$[3,1,2]$	$[3,1]$
Ciclos descartados				$(3,4,7)$			$(1,2)$

A continuación definiremos $\{\eta_n\}_n$ de manera rigurosa.

2.2 La cadena derivada

Definición 2.2.1. *Definimos a $[S]$ como el conjunto de sucesiones finitas ordenadas de* ***elementos distintos*** *de S. En símbolos*

$$[S] = \{[i_1, i_2, \ldots, i_r] : i_1, i_2, \ldots, i_r \in S \text{ y son distintos}, r \geq 1\}.$$

La concatenación de dos elementos de $[S]$ está bien definida siempre y cuando no tengan puntos en común, i.e.

$$[[i_1, \ldots, i_r], [i_{r+1}, \ldots, i_{r+n}]] = [i_1, \ldots, i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+n}].$$

Claramente $[S]$ es finito. Tomaremos la σ-álgebra $[\Sigma] = 2^{[S]}$.

Definición 2.2.2. *Definimos una operación binaria $\uplus : [S] \times S \to [S]$ mediante*

$$[i_1, i_2, \ldots, i_r] \uplus i = \begin{cases} [i_1, i_2, \ldots, i_r, i] & \text{si } i \notin \{i_1, \ldots, i_r\} \\ [i_1, i_2, \ldots, i_k], & \text{si } i = i_k, \text{para algún } 1 \leq k \leq r \end{cases}$$

Definición 2.2.3. *Definimos el proceso estocástico $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\eta_n : \Omega \to [S]$ recursivamente como sigue:*

$$\eta_0(\omega) = [\xi_0(\omega)] \qquad \eta_n(\omega) = \eta_{n-1}(\omega) \biguplus \xi_n(\omega) \text{ para } n \geq 1.$$

Proposición 2.2.4. *El proceso estocástico $\{\eta_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ está adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ donde $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_k : 0 \leq k \leq n)$.*

Demostración. Tenemos que ver que η_n es $\mathcal{F}_n$-medible para cada n. Usaremos inducción. Sea $A \in [\Sigma]$ cualquiera.

Para $n = 0$,
$\eta_0^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : [\xi_0(\omega)] = \eta_0(\omega) \in A\} = \bigcup_{[n_1]\in A} \xi_0^{-1}(\{n_1\}) \in \mathcal{F}_0$.

Supongamos que el resultado es válido para n. Como $\Sigma, [\Sigma]$ son las σ-álgebras totales, entonces la σ-álgebra producto coincide con $[\Sigma] \times \Sigma$ haciendo trivialmente medible a $\uplus : [S] \times S \longrightarrow [S]$. Por otro lado para $(\eta_n, \xi_{n+1}) : \Omega \longrightarrow [S] \times S$ tomamos un conjunto rectangular $A \times B$ donde $A \in [\Sigma]$, $B \in \Sigma$.

$$(\eta_n, \xi_{n+1})^{-1}(A \times B) = \eta_n^{-1}(A) \cap \xi_{n+1}^{-1}(B) \in \mathcal{F}_{n+1} \text{ pues } \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$$

La familia de conjuntos rectangulares medibles es una álgebra, por tanto es π-sistema contenido en la familia $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L} = \{C \in [S] \times S : (\eta_n, \xi_{n+1})^{-1}(C) \in \mathcal{F}_{n+1}\}$$

i) Se tiene que $[S] \times S \in \mathscr{L}$ pues $(\eta_n, \xi_{n+1})^{-1}([S] \times S) = \Omega \in \mathcal{F}_{n+1}$

ii) Si $C, D \in \mathscr{L}$ y $C \subset D$ entonces

$$\begin{aligned}(\eta_n, \xi_{n+1})^{-1}(D - C) &= (\eta_n, \xi_{n+1})^{-1}(D \cap C^c) \\ &= (\eta_n, \xi_{n+1})^{-1}(D) \cap (\eta_n, \xi_{n+1})^{-1}(C^c) \in \mathcal{F}_{n+1}\end{aligned}$$

iii) Si $C_1 \subset C_2 \subset \ldots, C_i \in \mathscr{L}$ entonces

$$(\eta_n, \xi_{n+1})^{-1}\left(\bigcup_i C_i\right) = \bigcup_i (\eta_n, \xi_{n+1})^{-1}(C_i) \in \mathcal{F}_{n+1}$$

Así $\mathscr{L}$ es un λ-sistema. Por el lema de Dynkin (η_n, ξ_{n+1}) es medible. Usando la relación de recurrencia $\eta_{n+1} = \uplus \circ (\eta_n, \xi_{n+1})$ concluímos que η_{n+1} es $\mathcal{F}_{n+1}$ medible.

$\square$

Definición 2.2.5. *Definimos $[S]_i$ como el conjunto de elementos $[i_1, \ldots, i_r]$, $r \geq 1$ de [S] tales que $i_1 = i$ y $p_{i_k, i_{k+1}} > 0$ $\forall$ $1 \leq k \leq r$.*

De acuerdo a la manera en que está definida η, si $\eta_0(\omega) = [i]$ entonces $\eta_n(\omega) \in [S]_i$ para todo n.

Lema 2.2.6. *$\eta = \{\eta_n\}_{n\geq 0}$ es una cadena de Markov con espacio de estados $[S]$ y distribución inicial*

$$\mathbb{P}(\eta_0 = [i]) = \begin{cases} \pi_i & i \in S \\ 0 & \textit{otro} \end{cases}$$

Cada $[S]_i$ es una clase irreducible y positiva recurrente de η. Además para cualquier par de estados $y_1 = [i_1, \ldots, i_s], y_2 = [j_1, \ldots, j_r] \in [S]_i$ la probabilidad de transición en un solo paso viene dada por

$$\tilde{p}_{y_1,y_2} = \begin{cases} p_{i_s,j_r} & \textit{si } r \leq s \textit{ y } i_1 = j_1,\ i_2 = j_2, \ldots, i_r = j_r \\ & \textit{ó } r = s+1 \textit{ y } i_1 = j_1,\ i_2 = j_2,\ \ldots, i_s = j_s, \\ 0 & \textit{otro caso} \end{cases}$$

Y la distribución invariante única $\tilde{\Pi}^i$ de η en cada clase irreducible $[S]_i$ satisface

$$\tilde{\Pi}^i([i]) = \pi_i$$

Demostración. Primero notemos que si $y_1 = [i_1, \ldots, i_s], y_2 = [j_1, \ldots, j_r] \in [S]_i$, $\omega \in \Omega$, por la manera en que actúa $\uplus$, sólo es posible la transición de $\eta_n(\omega) = y_1$ a $\eta_{n+1}(\omega) = y_2$ si $y_2 = [y_1, j_r]$ ó $y_1 = [y_2, [i_{r+1}, \ldots, i_s]]$, por tanto si no pasa lo anterior para cualesquiera $z_1, \ldots z_{n-1} \in [S]_i$

$$\mathbb{P}(\eta_{n+1}(\omega) = y_2 | \eta_n(\omega) = y_1, \eta_{n-1}(\omega) = z_{n-1}, \ldots, \eta_1(\omega) = z_1) = 0$$

En cambio, si $y_2 = [y_1, j_r]$ ó $y_1 = [y_2, [i_{r+1}, \ldots, i_s]]$ y cualesquiera $z_1, \ldots z_{n-1} \in [S]_i$ adecuados, tenemos que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\eta_{n+1}(\omega) = y_2 | \eta_n(\omega) = y_1, \eta_{n-1}(\omega) = z_{n-1}, \ldots, \eta_0(\omega) = [i]) \\ &= \mathbb{P}(\eta_{n+1}(\omega) = y_2, \xi_{n+1}(\omega) = j_r | \xi_n(\omega) = i_s, \eta_n(\omega) = y_1, \ldots, \eta_0(\omega) = [i]) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{n+1}(\omega) = j_r | \xi_n(\omega) = i_s, \eta_n(\omega) = y_1, \eta_{n-1}(\omega) = z_{n-1}, \ldots, \eta_0(\omega) = [i]) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{n+1}(\omega) = j_r | \xi_n(\omega) = i_s) \\ &= p_{i_s,j_r}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad de Markov de ξ. Así mismo, la propiedad de Markov para η se sigue de lo anterior.

Para ver que $[S]_i$ es una clase irreducible de η, basta ver que cualquier $[i, i_1, \ldots, i_s] \in [S]_i$ está comunicado con $[i]$. Por definición de $[S]_i$, $[i]$ está comunicado con $[i, i_1, \ldots, i_s]$. En efecto, como ξ es irreducible, η llega a $[i]$ partiendo de $[i, i_1, \ldots, i_s]$, pues ξ llega a i partiendo de i_s, completando el ciclo $(i, i_1, \ldots, i_s)$.

Al ser η irreducible en $[S]_i$ el cual es finito, entonces es recurrente positiva. Sea $\tilde{\Pi}^i$ la distribución invariante única de η.

Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}^i([i]) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\eta_k = [i] | \eta_0 = [i]) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(\xi_k = [i] | \xi_0 = [i]) = \pi_i.
\end{aligned}$$

□

2.3 Distribución estacionaria de η

En esta sección se probarán algunos resultados necesarios para dar la forma explícita la distribución estacionaria, $\tilde{\Pi}^i$, de η, en términos de las entradas de la matriz de transición P de ξ.

Definición 2.3.1. *Dado un conjunto índice $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$, definimos $D(H)$ como el subdeterminante de la matriz $\mathbf{D} = I - P$ tomando como renglones y columnas a los elementos de H, es decir,*

$$D(H) = \begin{vmatrix} d_{h_1,h_1} & d_{h_1,h_2} & \cdots & d_{h_1,h_k} \\ d_{h_2,h_1} & d_{h_2,h_2} & \cdots & d_{h_2,h_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{h_k,h_1} & d_{h_k,h_2} & \cdots & d_{h_k,h_k} \end{vmatrix}.$$

Si $H = \emptyset$ definimos a $D(H) = 1$.

Lema 2.3.2. *La distribución estacionaria única* $\Pi = (\pi_i)_{i\in S}$ *de la cadena de Markov* ξ *puede expresarse como*

$$\pi_i = \frac{D(\{i\}^c)}{\sum_{j\in S} D(\{j\}^c)}. \tag{2.1}$$

Demostración. Sabemos que Π existe, es única y satisface

$$\Pi P = P, \quad \Pi \mathbf{1} = \mathbf{1},$$

equivalentemente,

$$\Pi \mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad \Pi \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

Como la suma de cada renglón de $\mathbf{D}$ es cero, el anterior sistema de ecuaciones es equivalente al sistema

$$(\pi_1, \ldots, \pi_N) \begin{pmatrix} 1 & d_{1,1} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,j-1} & d_{1,j+1} & \cdots & d_{1,N} \\ 1 & d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots & d_{2,j-1} & d_{2,j+1} & \cdots & d_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{N,1} & d_{N,2} & \cdots & d_{N,j-1} & d_{N,j+1} & \cdots & d_{N,N} \end{pmatrix} = (1, 0, \ldots, 0),$$

para cada $j \in S$.

Llamaremos $\mathbf{D}_j$ a la matriz del sistema anterior. Veremos que $\det \mathbf{D}_j \neq 0$. Consideremos la transformación lineal asociada con la matriz $\mathbf{D}$,
$\mathbf{D} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.

i) $\mathbf{1} \in \ker(\mathbf{D}) - Im(\mathbf{D})$

Claramente $\mathbf{D}\mathbf{1} = I\mathbf{1} - P\mathbf{1} = 0$, donde $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Por otro lado supongamos que $\mathbf{1} \in Im(\mathbf{D})$, es decir, existe x tal que $\mathbf{D}x = \mathbf{1} \Rightarrow Px = x - \mathbf{1}$. Entonces

$$\begin{aligned} \Pi P = \Pi \Rightarrow \Pi x &= \Pi P x = \Pi(x - \mathbf{1}) = \Pi x - 1 \\ &\Rightarrow 1 = 0 \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción.

ii) $\ker(\mathbf{D}) \cap Im(\mathbf{D}) = \emptyset$

Tenemos que $\ker(\mathbf{D}) \cap Im(\mathbf{D}) \subset \ker(\mathbf{D})$ y por el teorema de Perron-Frobenius sabemos que el espacio propio asociado al valor propio dominante tiene dimensión 1, en este caso al ser P una matriz estocástica e irreducible dicho valor propio es $\lambda = 1$ y $\dim\ker(\mathbf{D}) = \dim\ker(I-P) = \dim E_\lambda = 1$. De esta forma $\dim(\ker(\mathbf{D}) \cap Im(\mathbf{D})) = 0$ ó 1. Pero no puede ser 1, pues en ese caso $\ker(\mathbf{D}) \cap Im(\mathbf{D}) = \ker(\mathbf{D})$ y por el inciso anterior esto no es posible.

iii) Las columnas de $\mathbf{D}_j$ son linealmente independientes

Por lo anterior podemos escribir $\mathbb{R}^N = \ker(\mathbf{D}) \oplus Im(\mathbf{D})$, es decir podemos escribir de manera única al $\mathbf{0}$ como suma de elementos de $\ker(\mathbf{D})$ y de $Im(\mathbf{D})$.

Para probar la independencia lineal de las columnas de $\mathbf{D}_j$ llamemosles $\mathbf{1}, \mathbf{d}_j$ a las columnas correspondientes. Si $\alpha\mathbf{1} + \sum_{l\neq j} \beta_l d_l = 0$ entonces claramente $\alpha\mathbf{1}$ pertenece al kernel y la suma del lado derecho pertenece a la imagen de la matriz $\mathbf{D}$. Solo queda entonces que $\alpha = 0$ y que $\sum_{l\neq j} \beta_l d_l = 0$. Por último, de la independencia lineal de $\mathbf{d}_l$ se sigue que $\beta_l = 0$.

De modo que resolviendo el sistema obtenemos,

$\Pi = (1, 0, \ldots, 0)\mathbf{D}_j^{-1} =$ (vector de cofactores de la primera columna de D_j).

La j-ésima entrada de Π es

$$\pi_j = \frac{D(\{j\}^c)}{(-1)^{j+1} \det \mathbf{D}_j}. \tag{2.2}$$

Recordando que $\sum_l d_{i,l} = 0 \Rightarrow -d_{i,k} = \sum_{l\neq k} d_{i,l}$ para toda k, sumamos todas las columnas, excepto la primera, a la segunda columna. Como el intercambio de columas dentro de un determinante sólo le cambian el signo, obtenemos que si $2 \leq j \leq N$

$$
\begin{aligned}
&\det \mathbf{D}_j = \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & d_{1,1} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,j-1} & d_{1,j+1} & \cdots & d_{1,N} \\ 1 & d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots & d_{2,j-1} & d_{2,j+1} & \cdots & d_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{N,1} & d_{N,2} & \cdots & d_{N,j-1} & d_{N,j+1} & \cdots & d_{N,N} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & -d_{1,j} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,j-1} & d_{1,j+1} & \cdots & d_{1,N} \\ 1 & -d_{2,j} & d_{2,2} & \cdots & d_{2,j-1} & d_{2,j+1} & \cdots & d_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -d_{N,j} & d_{N,2} & \cdots & d_{N,j-1} & d_{N,j+1} & \cdots & d_{N,N} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^j(-1) \det \begin{pmatrix} 1 & d_{1,2} & \cdots & d_{1,j-1} & d_{1,j} & d_{1,j+1} & \cdots & d_{1,N} \\ 1 & d_{2,2} & \cdots & d_{2,j-1} & d_{2,j} & d_{2,j+1} & \cdots & d_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{N,2} & \cdots & d_{N,j-1} & d_{N,j} & d_{N,j+1} & \cdots & d_{N,N} \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{j+1} \det \mathbf{D}_1
\end{aligned}
$$

Por otro lado dado que $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$ y que $\pi_j(-1)^{j+1} \det \mathbf{D}_j = D(\{j\}^c)$

$$\det \mathbf{D}_1 = \det \mathbf{D}_1 \sum_{j\in S} \pi_j = \sum_{j\in S} \pi_j (-1)^{j+1} \det \mathbf{D}_j = \sum_{j\in S} D(\{j\}^c)$$

Finalmente combinando lo anterior

$$\pi_i = \frac{D(\{i\}^c)}{(-1)^{i+1}\det \mathbf{D}_i} = \frac{D(\{i\}^c)}{\det \mathbf{D}_1} = \frac{D(\{i\}^c)}{\sum_{j\in S} D(\{j\}^c)}.$$

□

Lema 2.3.3.

$$
\begin{aligned}
&D(\{i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}\}^c) \\
&= d_{i_s,i_s} D(\{i_1, \ldots, i_s\}^c) \\
&- \sum_{r>0, j_1, \ldots, j_r} p_{i_s,j_1} p_{j_1,j_2} \cdots p_{j_{r-1},j_r} p_{j_r,i_s} D(\{j_1, \ldots, j_r, i_1, \ldots, i_s\}^c),
\end{aligned}
$$

en donde la suma se toma sobre todas las elecciones distintas de $j_1, \ldots, j_r \in \{i_1, \ldots, i_s\}^c$.

Demostración. Introducimos para esta demostración la siguiente notación. Le llamaremos $D(i, j|k_1, \ldots, k_r)$ al siguiente determinante:

$$D(i, j|k_1, \ldots, k_r) = \begin{vmatrix} d_{i,j} & d_{i,k_1} & \cdots & d_{i,k_r} \\ d_{k_1,j} & \ddots & & d_{k_1,k_r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ d_{k_r,j} & \cdots & \cdots & d_{k_r,k_r} \end{vmatrix},$$

es decir, es el determinante formado por los renglones $i, k_1, \ldots, k_r$ y las columnas $j, k_1, \ldots, k_r$ de la matriz $\mathbf{D}$. Entendemos que todos los $k_1, \ldots, k_r$ son distintos entre si.

Expandiendo dicho determinante por el primer renglón vemos que

$$D(i, j|k_1, \ldots, k_r) = d_{i,j} \underbrace{\begin{vmatrix} d_{k_1,k_1} & d_{k_1,k_2} & \cdots & d_{k_1,k_r} \\ d_{k_2,k_1} & \ddots & & d_{k_2,k_r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ d_{k_r,k_1} & \cdots & \cdots & d_{k_r,k_r} \end{vmatrix}}_{D(k_1,\ldots,k_r)} + \ldots$$

$$+ d_{i,k_sj}(-1)^{1+(s+1)} \underbrace{\begin{vmatrix} d_{k_1,j} & d_{k_1,k_1} & \cdots & d_{k_1,k_{s-1}} & d_{k_1,k_{s+1}} & \cdots & d_{k_1,k_r} \\ d_{k_2,j} & d_{k_2,k_1} & \cdots & d_{k_2,k_{s-1}} & d_{k_2,k_{s+1}} & \cdots & d_{k_2,k_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k_r,j} & d_{k_r,k_1} & \cdots & d_{k_r,k_{s-1}} & d_{k_r,k_{s+1}} & \cdots & d_{k_r,k_r} \end{vmatrix}}_{Mi,k_s} + \ldots$$

$$+ d_{i,k_r}(-1)^{1+(r+1)} \begin{vmatrix} d_{k_1,j} & d_{k_1,k_2} & \cdots & d_{k_1,k_{r-1}} \\ d_{k_2,j} & \ddots & & d_{k_2,k_{r-1}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ d_{k_r,j} & \cdots & \cdots & d_{k_r,k_{r-1}} \end{vmatrix}.$$

Es fácil verificar que $D(k_s, j|k_1, \ldots, k_{s-1}, k_{s+1}, \ldots, k_r) = (-1)^{s-1} M_{i,k_s}$ donde M_{i,k_s} es la matriz del término general indicada arriba.

Con ello tenemos que

$$\begin{aligned}
&D(i, j|k_1, \ldots, k_r)\\
&= d_{i,j} D(k_1, \ldots, k_r) + \sum_{s=1}^{r} d_{i,k_s} (-1)^{1+(s+1)} M_{i,k_s}\\
&= d_{i,j} D(k_1, \ldots, k_r) + \sum_{s=1}^{r} d_{i,k_s} (-1)^{2+s+(s-1)} D(k_s, j|k_1, \ldots, k_{s-1}, k_{s+1}, \ldots, k_r)\\
&= d_{i,j} D(k_1, \ldots, k_r) + \sum_{s=1}^{r} \underbrace{d_{i,k_s} (-1)^{1+2s}}_{p_{i,k_s}} D(k_s, j|k_1, \ldots, k_{s-1}, k_{s+1}, \ldots, k_r)\\
&= d_{i,j} D(k_1, \ldots, k_r) + \sum_{s=1}^{r} p_{i,k_s} D(k_s, j|k_1, \ldots, k_{s-1}, k_{s+1}, \ldots, k_r).
\end{aligned}$$

Por inducción sobre r probaremos que

$$\begin{aligned}
&D(i, j|k_1 \ldots, k_r) = d_{i,j} D(\{k_1, \ldots, k_r\})\\
&- \sum_{\alpha>0, j_1, \ldots, j_\alpha} p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \cdots p_{j_{\alpha-1},j_a} p_{j_\alpha,j} D(\{k_1, \ldots, k_r\} \cap \{j_1, \ldots, j_\alpha\}^c),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

donde la suma se toma sobre las distintas elecciones $j_1, \ldots, j_\alpha$ en $\{k_1, \ldots, k_r\}$.

Para r=1, usando la igualdad obtenida anteriormente obtenemos,

$D(i, j|k_1) = d_{i,j} D(\{k_1\}) + p_{i,k_1} \underbrace{D(k_1, j|\cdot)}_{d_{k_1,j}} = d_{i,j} D(\{k_1\}) - p_{i,k_1} \underbrace{p_{k_1,j}}_{-d_{k_1,j}} D(\emptyset)$,

que corresponde al único caso de la elección "vacía".

Supongamos el resultado cierto para r. Por la expresión anterior

$$\begin{aligned}
D(i, j|k_1, \ldots, k_{r+1}) = d_{i,j} D(k_1, \ldots, k_{r+1}) +&\\
\sum_{s=1}^{r+1} p_{i,k_s} D(k_s, j|k_1, \ldots, k_{s-1}, k_{s+1}, \ldots, k_{r+1})&
\end{aligned}$$

Trabajamos la suma del lado derecho en donde al usar la hipótesis de inducción obtenemos que

$$\sum_{s=1}^{r+1} p_{i,k_s} D(k_s, j|k_1, \ldots, k_{s-1}, k_{s+1}, \ldots, k_{r+1})$$

$$= \sum_{s=1}^{r+1} p_{i,k_s} (-p_{k_s,j}) D(\{k_1, \ldots, k_{s-1}, k_{s+1}, \ldots, k_{r+1}\})$$

$$- \sum_{\substack{\alpha>0 \\ j_1,\ldots,j_\alpha}} p_{i,k_s} p_{k_s,j_1} p_{j_1,j_2} \cdots$$
$$\cdots p_{j_{\alpha-1},j_a} p_{j_\alpha,j} D(\{k_1, \ldots, k_{s-1}, k_{s+1}, \ldots, k_{r+1}\} \cap \{j_1, \ldots, j_\alpha\}^c).$$

Fijándonos que
$D(\{k_1, \ldots, k_{s-1}, k_{s+1}, \ldots, k_{r+1}\}) = D(\{k_1, \ldots, k_{r+1}\} \cap \{k_s\}^c)$, a cada elección $j_1, \ldots, j_\alpha$ de elementos de $\{k_1, \ldots, k_{s-1}, k_{s+1}, \ldots, k_{r+1}\}$ la renombramos y agregamos el correspondiente k_s, obteniendo al mover la s con la suma todas las elecciones $j'_1, j'_2, \ldots, j'_{\alpha'}$ de elementos de $\{k_1, \ldots, k_{r+1}\}$
donde $j'_1 = k_s, j'_2 = j_1, \ldots$

Además notamos que

$$D(\{k_1, \ldots, k_{s-1}, k_{s+1}, \ldots, k_{r+1}\} \cap \{j_1, \ldots, j_\alpha\}^c)$$
$$= D(\{k_1, \ldots, k_{r+1}\} \cap \{j'_1, \ldots, j'_{\alpha'}\}^c)$$

Obteniendo finalmente, al juntar los dos términos de la suma, que
$D(i, j|k_1 \ldots, k_{r+1}) = d_{i,j} D(\{k_1, \ldots, k_{r+1}\})$
$- \sum_{\alpha'>0, j'_1, \ldots, j'_{\alpha'}} p_{i,j'_1} p_{j'_1,j'_2} \cdots p_{j'_{\alpha'},j} D(\{k_1, \ldots, k_{r+1}\} \cap \{j'_1, \ldots, j'_{\alpha'}\}^c).$

Por tanto la ecuación (2.3) vale para toda r. Finalmente hacemos $i = j = i_s$, y a $\{k_1, \ldots, k_r\} = \{i_1, \ldots, i_s\}^c$ en dicha ecuación para obtener lo deseado. $\square$

Lema 2.3.4. *Para todo $j \in \{i_1, \ldots, i_s\}^c$ fijo tenemos que*

$$D(\{i_1, \ldots, i_s\}^c)$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \sum_{\substack{r \geq 0 \\ j_1, \ldots, j_r}} p_{j,j_1} p_{j_1,j_2} \cdots p_{j_r,i_k} D(\{j, j_1, \ldots, j_r, i_1, \ldots, i_s\}^c),$$

donde la suma está tomada sobre las distintas elecciones

$j_1, \ldots, j_r \in \{j, i_1, \cdots, i_s\}^c$.

Demostración. Procederemos inductivamente. Vemos que si el ciclo es todo $S - \{j\}$, es decir, de longitud $s = N - 1$, entonces el lema es válido, ya que

$$D(\{i_1, \ldots, i_s\}^c) = D(\{j\}) = d_{j,j} = 1 - p_{j,j} = \sum_{k=1}^{s} p_{j,i_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \sum_{r \geq 0, j_1, \ldots, j_r} p_{j,j_1} p_{j_1,j_2} \cdots p_{j_r,i_k} D(\{j, j_1, \ldots, j_r, i_1, \ldots, i_s\}^c)$$

pues existe una única elección para los j_l's, la elección vacía.

Si el ciclo tiene $s = N - 2$ elementos para $j = i_{N-1}$ ó $j = i_N$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
&D(\{i_1,\dots,i_s\}^c)\\
&= D(\{i_{N-1},i_N\})\\
&= d_{i_{N-1},i_{N-1}}d_{i_N,i_N} - d_{i_{N-1},i_N}d_{i_N,i_{N-1}}\\
&= (1-p_{i_{N-1},i_{N-1}})d_{i_N,i_N} - p_{i_{N-1},i_N}p_{i_N,i_{N-1}}\\
&= \big(\sum_{k=1}^{N-2} p_{i_{N-1},i_k} + p_{i_{N-1},i_N}\big)d_{i_N,i_N} - p_{i_{N-1},i_N}p_{i_N,i_{N-1}}\\
&= \sum_{k=1}^{i_{N-2}} p_{i_{N-1},i_k}d_{i_N,i_N} + p_{i_{N-1},i_N}(d_{i_N,i_N} - p_{i_N,i_{N-1}})\\
&= \sum_{k=1}^{N-2} p_{i_{N-1},i_k}d_{i_N,i_N} + p_{i_{N-1},i_N}(1 - p_{i_N,i_N} - p_{i_N,i_{N-1}})\\
&= \sum_{k=1}^{N-2} p_{i_{N-1},i_k}d_{i_N,i_N} + \sum_{k=1}^{N-2} p_{i_{N-1},i_N}p_{i_N,i_k}\\
&= \sum_{k=1}^{N-2} p_{i_{N-1},i_k}D(\{i_1,\dots,i_{N-1}\}^c) + p_{i_{N-1},i_N}p_{i_N,i_k}D(\{i_1,\dots,i_N\}^c),
\end{aligned}
$$

por lo tanto también es válida la aseveración. Ahora el paso inductivo.

Suponemos que es válida para $\{i_1,\dots,i_s\}$, o sea para todo $j = i_{s+1},\dots,i_N$

$$
\begin{aligned}
&D(\{i_{s+1},\dots,i_N\})\\
&= \sum_{k=1}^{s} \sum_{r\geq 0, j_1,\dots,j_r} p_{j,j_1}p_{j_1,j_2}\cdots p_{j_r,i_k}D(\{j,j_1,\dots,j_r,i_1,\dots,i_s\}^c),
\end{aligned}
$$

con $j_1, \ldots, j_r \in \{i_1, i_2, \ldots, i_s, j\}^c$.

Tenemos que probar que es válida para $\{1, \ldots, s-1\}$, es decir, para todo $j = i_s, \ldots, i_N$.

$$D(\{i_s, i_{s+1}, \ldots, i_N\}) \tag{2.4}$$

$$= \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{r \geq 0, j_1, \ldots, j_r} p_{j,j_1} p_{j_1,j_2} \cdots p_{j_r,i_k} D(\{j, j_1, \ldots, j_r, i_1, \ldots, i_{s-1}\}^c),$$

en donde la suma se toma sobre las distintas elecciones $j_1, \ldots, j_r \in \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}^c$. De hecho basta probar que lo anterior sucede para $j = i_s$, pues mediante una numeración distinta de los elementos fuera del ciclo, podemos obtenerlo para cualquier otro $j \in \{i_1, \ldots, i_{s-1}\}^c$.

La contribución a la suma de la elección vacía $r = 0$ del lado derecho de (2.4) es

$$\sum_{k=1}^{s-1} p_{i_s,i_k} D(\{i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}, i_s\}^c)$$

$$= \sum_{k=1}^{s-1} p_{i_s,i_k} D(\{i_{s+1}, \ldots, i_N\})$$

$$= \left(d_{i_s,i_s} - \sum_{l=s+1}^{N} p_{i_s,i_l} \right) D(\{i_{s+1}, \ldots, i_N\}) \text{ y por hipótesis de inducción}$$

$$= d_{i_s,i_s} D(\{i_{s+1}, \ldots, i_N\})$$
$$- \sum_{l=s+1}^{N} p_{i_s,i_l} \sum_{k=1}^{s} \sum_{r \geq 0, j'_1, \ldots, j'_r} p_{i_l,j'_1} p_{j'_1,j'_2} \cdots p_{j'_r,i_k} D(\{i_l, j'_1, \ldots, j'_r, i_1, i_2, \ldots, i_s\}^c)$$

$$= d_{i_s,i_s} D(\{i_{s+1}, \ldots, i_N\})$$
$$- \sum_{k=1}^{s} \sum_{r \geq 1, j_1, \ldots, j_r} p_{i_s,j_1} p_{j_1,j_2} p_{j_2,j_3} \cdots p_{j_r,i_k} D(\{j_1, j_2, \ldots, j_r, i_1, i_2, \ldots, i_s\}^c).$$

Y completando con el resto de las contribuciones de las elecciones para $r \geq 1$ obtenemos que la parte derecha de (2.4) es igual a

$$
\begin{aligned}
& d_{i_s,i_s} D(\{i_{s+1},\ldots,i_N\}) \\
& -\sum_{k=1}^{s}\sum_{r\geq 1, j_1,\ldots,j_r} p_{i_s,j_1}p_{j_1,j_2}p_{j_2,j_3}\cdots p_{j_r,i_k} D(\{j_1,j_2,\ldots,j_r,i_1,i_2,\ldots,i_s\}^c) \\
& +\sum_{k=1}^{s-1}\sum_{r\geq 1, j_1,\ldots,j_r} p_{i_s,j_1}p_{j_1,j_2}p_{j_2,j_3}\cdots p_{j_r,i_k} D(\{j_1,j_2,\ldots,j_r,i_1,i_2,\ldots,i_s\}^c) \\
& = d_{i_s,i_s} D(\{i_{s+1},\ldots,i_N\}) \\
& -\sum_{r\geq 1, j_1,\ldots,j_r} p_{i_s,j_1}p_{j_1,j_2}p_{j_2,j_3}\cdots p_{j_r,i_s} D(\{j_1,j_2,\ldots,j_r,i_1,i_2,\ldots,i_s\}^c),
\end{aligned}
$$

donde la suma es sobre las distintas elecciones $j_i,\ldots,j_r \in \{i_1,\ldots,i_s\}^c$. Por el lema anterior se concluye el lado izquierdo de (2.4). $\square$

Lema 2.3.5. *Para cualquier* $i \in$

$$\sum_{j\in S} D(\{j\}^c) = \sum_{[i_1,\ldots,i_s]\in[S]_i} p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{s-1},i_s} D(\{i_1,\ldots,i_s\}^c).$$

Para el caso $s=1$*, entendemos a* $p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{s-1},i_s}$ *como 1.*

Demostración. Usando el lema anterior y sumando

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in S} D(\{j\}^c) &= \sum_{\substack{j\in S\\ j\neq i}}\sum_{\substack{r\geq 0\\ j_1,\ldots,j_r}} p_{i,j_1}p_{j_1,j_2}\cdots p_{j_r,j} D(\{i,j_1,\ldots,j_r,l\}^c) + D(\{i\}^c) \\
&= \sum_{\substack{s\geq 2, i_2,\ldots,i_s\\ i_1=1}} p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{s-1},i_s} D(\{i_1,\ldots,i_s\}^c) + D(\{i\}^c) \\
&= \sum_{[i_1,\ldots,i_s]\in[S]_i} p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{s-1},i_s} D(\{i_1,\ldots,i_s\}^c).
\end{aligned}
$$

$\square$

Regresando a la cadena derivada η, el siguiente teorema nos da una descripción explícita de su distribución invariante.

Teorema 2.3.6. *Si ξ es una cadena de Markov estacionaria con matriz de transición $P = (p_{i,j})_{i,j\in S}$, irreducible con espacio de estados S finito y distribución estacionaria $\Pi = (\pi_i)_{i\in S}$, entonces su cadena derivada η es positiva recurrente en cada $[S]_i$ con distribución invariante $\tilde{\Pi}^i$ dada por*

$$\tilde{\Pi}^i([i_1,\dots,i_s]) = p_{i_1,i_2}p_{i_2,i_3}\cdots p_{i_{s-1},i_s}\frac{D(\{i_1,\dots,i_s\}^c)}{\displaystyle\sum_{j\in S} D(\{j\}^c)}. \tag{2.5}$$

Además se tiene que

$$\tilde{\Pi}^i([i_1,\dots,i_s])p_{i_s,i_1} = \sum_{k=1}^{s}\sum_{\substack{r\geq 1\\ j_2,\dots,j_r}} \tilde{\Pi}^{j_1}([j_1,\dots,j_r,i_k,i_{k+1},\dots,i_{k+s-1}])p_{i_{k-1},i_s}, \tag{2.6}$$

donde j_1 es fijo en $\{i_1,\dots,i_s\}^c$, la suma es sobre las distintas elecciones $j_2,\dots,j_r \in \{j_1,i_1,\dots,i_s\}^c$ y las sumas donde aparece k se entienden modulo s.

Demostración. Sólo resta demostrar las ecuaciones (2.5) y (2.6). Como η es recurrente positiva en la clase irreducible $[S]_i$ entonces $\tilde{\Pi}^i$ es la única solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^i\tilde{P}_i &= \tilde{\Pi}^i \\ \sum_{[i_1,\dots,i_s]\in[S]_i} \tilde{\Pi}^i([i_1,\dots,i_s]) &= 1. \end{aligned}$$

Por el lema anterior se sigue que $\tilde{\Pi}^i$ dado por (2.5) satisface la segunda ecuación. Recordando que $d_{j,j} = 1 - p_{j,j}$ y usando el lema (2.3.3) obtenemos que

$$\tilde{\Pi}^i([i_1,\ldots,i_s])$$

$$=p_{i_1,i_2}p_{i_2,i_3}\cdots p_{i_{s-1},i_s}\frac{D(\{i_1,\ldots,i_s\}^c)}{\displaystyle\sum_{j\in S}D(\{j\}^c)}$$

$$=p_{i_1,i_2}p_{i_2,i_3}\cdots p_{i_{s-1},i_s}\frac{D(\{i_1,\ldots,i_{s-1}\}^c)}{\displaystyle\sum_{j\in S}D(\{j\}^c)} + p_{i_1,i_2}p_{i_2,i_3}\cdots p_{i_{s-1},i_s}p_{i_s,i_s}\frac{D(\{i_1,\ldots,i_s\}^c)}{\displaystyle\sum_{j\in S}D(\{j\}^c)}$$

$$+\sum_{\substack{r\geq 1\\ j_1,\ldots,j_r}} p_{i_1,i_2}p_{i_2,i_3}\cdots p_{i_{s-1},i_s}p_{i_s,j_1}p_{j_1,j_2}\cdots p_{j_{r-1},j_r}p_{j_r,i_s}\frac{D(\{j_1,\ldots,j_r,i_1,\ldots,i_s\}^c)}{\displaystyle\sum_{j\in S}D(\{j\}^c)}$$

$$=\underbrace{p_{i_{s-1},i_s}}_{c)}\tilde{\Pi}^i([i_1,\ldots,i_{s-1}])+\underbrace{p_{i_s,i_s}}_{b)}\tilde{\Pi}^i([i_1,\ldots,i_s]) + \sum_{\substack{r\geq 1\\ j_1,\ldots,j_r}}\underbrace{p_{j_r,i_s}}_{a)}\tilde{\Pi}^i([i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_r])$$

Veamos que esto es exactamente la primera ecuación. Recordemos que si $x=[x_1,\ldots,x_n], y=[y_1,\ldots,y_m]\in[S]_i$ entonces $\tilde{p}_{x,y}\neq 0$ sólo cuando

a) $m<n$

b) $m=n$

c) $m=n+1$

y en los tres casos $\tilde{p}_{x,y} = p_{x_n,y_m}$.

$$= \underbrace{\tilde{p}_{x',y}}_{\substack{x'=[i_1,\ldots,i_{s-1}]\\ y=[x',i_s]\\ c)}} \tilde{\Pi}^i([i_1,\ldots,i_{s-1}]) + \underbrace{\tilde{p}_{x'',y}}_{\substack{x''=y=[i_1,\ldots,i_s]\\ b)}} \tilde{\Pi}^i([i_1,\ldots,i_s])$$

$$+ \sum_{\substack{r\geq 1\\ j_1,\ldots,j_r}} \underbrace{\tilde{p}_{x,y}}_{\substack{x=[i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_r]\\ y=[i_1,\ldots,i_s]\\ a)}} \tilde{\Pi}^i([i_1,\ldots,i_s,j_1,\ldots,j_r])$$

$$= \sum_{x\in[S]_i} \tilde{\Pi}^i(x)\tilde{p}_{x,[i_1,\ldots,i_s]}.$$

Esto demuestra (2.5). Usando la descripción de $\tilde{\Pi}^i$ junto con el lema (2.3.4), fijando un $j_1 \in \{i_1,\ldots,i_s\}^c$ se concluye la validez de (2.6). □

2.4 Representación probabilística en ciclos

Definición 2.4.1. *Le llamamos $\mathcal{C}_n(\omega)$ a la clase de todos los ciclos que ocurren hasta el tiempo n a lo largo de la órbita $\{\xi_l(\omega)\}_{l\geq 0}$*

Definición 2.4.2. *Para un ciclo c, definimos*

$$w_{c,n}(\omega) = \sum_{l=1}^{n} 1_{\cup_{k=1}^{s}\{\tilde{\omega}\,:\,\eta_{l-1}(\tilde{\omega}) = [\eta_l(\tilde{\omega}),[i_{k+1},\ldots,i_{k+s-1}]]\}}(\omega).$$

Es claro que $w_{c,n}(\omega)$ cuenta el número de veces que aparece el ciclo c o alguna permutación cíclica en la órbita $\{\xi_l(\omega)\}_{l\geq 0}$ hasta el tiempo n.

Definición 2.4.3. *Denotamos por $\sigma_n(\omega;i,j)$ al número promedio de transiciones de i a j en la órbita de $\{\xi_l(\omega)\}_l \geq 0$ hasta el tiempo n.*

En símbolos

$$\sigma_n(\omega;i,j) = \frac{1}{n}\ card\{m : 0 \leq m < n, \xi_m(\omega) = i, \xi_{m+1}(\omega) = j\}$$

Buscamos obtener una familia de ciclos, a la que llamaremos $\mathcal{C}_\infty$, que no dependa de ω y que contenga a todos los ciclos posibles de la cadena ξ. A continuación definimos dos procesos estocásticos auxiliares γ y ζ mediante

$$\begin{aligned}
&\gamma_n : \Omega \longrightarrow S \times S \\
&\gamma_n(\omega = (\xi_{n-1}(\omega), \xi_n(\omega)) \\
&\zeta_n : \Omega \longrightarrow [S] \times [S] \\
&\zeta_n(\omega) = (\eta_{n-1}(\omega), \eta_n(\omega))
\end{aligned}$$

Proposición 2.4.4. *El proceso estocástico γ es una cadena de Markov. Es irreducible y positiva recurrente en*

$$I = \{(l, s) \in S \times S : p_{l,s} > 0\}$$

con distribución estacionaria única

$$\Pi_\gamma(i, j) = \pi_i p_{i,j}$$

Demostración. La propiedad de Markov se sigue de

$$\mathbb{P}(\gamma_{n+1}(\omega) = (y_1, y_2)|\gamma_n(\omega) = (x_1, x_2), \gamma_{n-1}(\omega), \dots, \gamma_1(\omega))$$

$$= \mathbb{P}(\xi_{n+1}(\omega) = y_2, \xi_n(\omega) = y_1|\xi_n(\omega) = x_2, \dots, \xi_0(\omega))$$

$$= \begin{cases} p_{y_1,y_2} & \text{si } x_2 = y_1 \\ 0 & \text{otro} \end{cases} = q_{(x_1,x_2),(y_1,y_2)}.$$

La irreducibilidad de γ se sigue de la definición de I y de la irreducibilidad de ξ. Al ser I finito entonces γ es positiva recurrente.

Como

$$\sum_{l,k\in S} \pi_l p_{l,k} = \sum_{l\in S} \pi_l \sum_{k\in S} p_{l,k} = \sum_{l\in S} \pi_l = 1$$

$$\sum_{l,k\in S} \pi_l p_{l,k} q_{(l,k),(i,j)} = \sum_{l\in S} \pi_l p_{l,i} p_{i,j} = p_{i,j} \sum_{l\in S} \pi_l p_{l,i} = \pi_i p_{i,j}$$

por la unicidad de la distribución invariante entonces $\Pi_\gamma(i, j) = \pi_i p_{i,j}$. □

Proposición 2.4.5. *El proceso estocástico ζ es una cadena de Markov. Para cada $i \in S$, ζ es irreducible y positiva recurrente en*

$$I_i = \{(y_0, y_1) \in [S]_i \times [S]_i : \tilde{p}_{y_0,y_1} > 0\}$$

con distribución estacionaria

$$\hat{\Pi}^i(y_0, y_1) = \tilde{\Pi}^i(y_0)\tilde{p}_{y_0,y_1}$$

Demostración. La propiedad de Markov se sigue de

$$\mathbb{P}(\zeta_{n+1}(\omega) = (y_1, y_2)|\zeta_n(\omega) = (x_1, x_2), \ldots, \zeta_1(\omega))$$

$$= \mathbb{P}(\eta_{n+1}(\omega) = y_2, \eta_n(\omega) = y_1|\eta_n(\omega) = x_2, \ldots, \eta_0(\omega))$$

$$= \begin{cases} \tilde{p}_{y_1,y_2} & \text{si } x_2 = y_1 \\ 0 & \text{otro} \end{cases} = \tilde{q}_{(x_1,x_2),(y_1,y_2)}.$$

La irreducibilidad de ζ se sigue de la definición de I_i y de la irreducibilidad de η. Al ser I finito entonces γ es positiva recurrente. Como

$$\sum_{x_1,x_2\in I_i} \tilde{\Pi}^i(x_1)\tilde{p}_{x_1,x_2} = \sum_{x_1\in I_i} \tilde{\Pi}^i_{x_1} \sum_{x_2\in I_i} \tilde{p}_{x_1,x_2} = \sum_{x_1\in I^i} \tilde{\Pi}^i(x_1) = 1.$$

$$\sum_{x_1,x_2\in I_i} \tilde{\Pi}^i(x_1)\tilde{p}_{x_1,x_2}\tilde{q}_{(x_1,x_2),(y_1,y_2)} = \sum_{x_1\in S} \tilde{\Pi}^i(x_1)\tilde{p}_{x_1,y_1}\tilde{p}_{y_1,y_2}$$
$$= \tilde{p}_{y_1,y_2} \sum_{x_1\in S} \tilde{\Pi}^i(x_1)\tilde{p}_{x_1,y_1} = \tilde{p}_{y_1,y_2}\tilde{\Pi}^i(y_1),$$

por la unicidad de la distribución estacionaria entonces $\Pi_\gamma(i, j) = \pi_i p_{i,j}$ □

Proposición 2.4.6. *Para todo* $i, j \in S$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(\omega; i, j) = \pi_i p_{i,j} \quad c.s.$$

Demostración. Para $i, j \in$ S fijos consideramos el funcional $f : S\times S \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$f(x, y) = 1_{\{(i,j)\}}(x, y)$$

Tenemos que $\sigma_n(\omega; i, j) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{m=1}^{n} f((\xi_{m-1}(\omega), \xi_m(\omega)) = \dfrac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(\gamma_m(\omega))$

Y aplicando la ley de los úmeros para cadenas de Markov a la cadena γ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sigma_n(\omega;i,j) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(\gamma_m(\omega)) \\
&= \sum_{l,k\in S}\Pi_\gamma(l,k)f(l,k) \qquad c.s. \\
&= \sum_{l,k\in S}\Pi_\gamma(l,k)1_{\{i,j\}}(l,k) \quad c.s. \\
&= \Pi_\gamma(i,j) \qquad c.s. \\
&= \pi_i p_{i,j} \qquad c.s.
\end{aligned}$$

□

Proposición 2.4.7. *Para cada ciclo $c=(i_1,\ldots,i_s)$ el siguiente límite existe*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w_{c,n}(\omega)}{n} = w_c \quad c.s.,$$

donde

$$w_c = p_{i_1,i_2}p_{i_2,i_3}\cdots p_{i_{s-1},i_s}p_{i_s,i_1}\frac{D(\{i_1,\ldots,i_s\}^c)}{\sum_{j\in S} D(\{j\}^c)}$$

Demostración. Para algún $i \in S$ fijo denotamos por $\mathbb{P}_i$ a la probabilidad condicional $\mathbb{P}(\cdot|\xi_0 = i)$. Para el ciclo $c=(i_1,\ldots,i_s)$ definimos el conjunto en $[S]_i \times [S]_i$

$$A_k = \{(z,w) : z = [w, i_{k+1},\ldots,i_{k+s-1}],\ \text{el último elemento de } w \text{ es } i_k\}$$

Aplicando la ley de los grandes números para cadenas de Markov a ζ y al funcional $f:[S]_i\times[S]_i \longrightarrow \mathbb{R}$, entendiendo las sumas interiores módulo s,

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{s} 1_{A_k}(x,y),$$

obtenemos que para $\mathbb{P}_i$-casi todo ω

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{w_{c,n}(\omega)}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} f(\zeta_l(\omega)) = E^{\tilde{\Pi}^i}(f(\cdot)) \\
&= \sum_{(x_1,x_2)\in[S]_i^2} \hat{\Pi}^i(x_1,x_2) f(x_1,x_2) \\
&= \sum_{(x_1,x_2)\in[S]_i^2} \tilde{\Pi}^i(x_1)\tilde{p}_{x_1,x_2}\sum_{k=1}^{s} 1_{A_k}(x_1,x_2).
\end{aligned}
$$

Hay dos casos:

Si $i \in \{i_1,\ldots,i_s\}$ digamos $i = i_l$ con $1 \le l \le s$,

$$
A_k = \begin{cases} \{([i_l, i_{l+1},\ldots,i_{l-1}],[i_l])\} & \text{si } k = l \\ \emptyset & \text{otro} \end{cases}
$$

de donde

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{(x_1,x_2)\in I_i} \tilde{\Pi}^i(x_1)\tilde{p}_{x_1,x_2}\sum_{k=1}^{s} 1_{A_k}(x_1,x_2) \\
&= \tilde{\Pi}^{i_l}([i_l, i_{l+1},\ldots,i_{l+s-1}])p_{i_{l-1},i_l} \\
&= \tilde{\Pi}^{i_1}([i_1,\ldots,i_s])p_{i_s,i_1},
\end{aligned}
$$

usando el Teorema 2.3.6 en la última desigualdad.

Si $i \notin \{i_1,\ldots,i_s\}$ entonces

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{(x_1,x_2)\in[S]_i^2} \tilde{\Pi}^i(x_1)\tilde{p}_{x_1,x_2}\sum_{k=1}^{s} 1_{A_k}(x_1,x_2) \\
&= \sum_{k=1}^{s}\sum_{r\geq 0} \sum_{\substack{(y_1,y_2)\in[S]_i^2 \\ y_1=[i,y_2,i_{k+1},\dots,i_{k+s-1}] \\ y_2=[j_1,\dots,j_r,i_k]}} \tilde{\Pi}^i([i,y_2,i_{k+1},\dots,i_{k+s-1}])p_{i_{k-1},i_k} \\
&= \sum_{k=1}^{s}\sum_{r\geq 0}\sum_{j_1,\dots,j_r} \tilde{\Pi}^i([i,j_1,\dots,j_r,i_k,\dots,i_{k+s-1}])p_{i_{k-1},i_k} \\
&= \tilde{\Pi}^{i_1}([i_1,\dots,i_s])p_{i_s,i_1},
\end{aligned}
$$

usando nuevamente en la última igualdad el Teorema 2.3.6.

Por todo lo anterior tenemos que en cualquier caso, para $\mathbb{P}_i$-casi todo ω

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{w_{c,n}(\omega)}{n} &= \tilde{\Pi}^{i_1}([i_1,\dots,i_s])p_{i_s,i_1} \\
&= p_{i_1,i_2}p_{i_2,i_3}\cdots p_{i_{s-1},i_s}p_{i_s,i_1}\frac{D(\{i_1,\dots,i_s\}^c)}{\sum_{j\in S} D(\{j\}^c)},
\end{aligned}
$$

hemos usado por última vez el Teorema 2.3.6. □

Es importante notar que por la proposición anterior, el límite w_c **no** depende de ω.

Proposición 2.4.8. *La sucesión $(\mathcal{C}_n(\omega))_n$ converge casi seguramente a una clase de ciclos denotada por $\mathcal{C}_\infty$.*

Demostración. Por definición de los $\mathcal{C}_n(\omega)$, la sucesión es creciente y podemos asignarle a cada ω la clase

$$
\mathcal{C}_\infty(\omega) := \lim_{n\to\infty}\mathcal{C}_n(\omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}_n(\omega).
$$

Para ver que no depende de la trayectoria, sean ω_1, ω_2 fuera del conjunto de probabilidad cero dado por la proposición anterior. Entonces para cada

$c \in \mathcal{C}_\infty(\omega_1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_{c,n}(\omega_1)}{n} = w_c = \lim_{n\to\infty} \frac{w_{c,n}(\omega_2)}{n},$$

y así $c \in \mathcal{C}_\infty(\omega_2)$.

Por tanto $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{C}_\infty(\omega)$ no depende de la trayectoria ω. □

Definición 2.4.9. *La clase de ciclos $\mathcal{C}_\infty$ dada por la proposición anterior es la colección de ciclos que ocurren en casi todas las órbitas $\{\xi_n(\omega)\}_n$. Al conjunto de pesos $\{w_c : c \in \mathcal{C}_\infty\}$ de las proposiciones anteriores se les llama distribución circulatoria de ξ.*

El siguiente teorema es el más importante de esta sección. Es el primer teorema que sugiere fuertemente que estudiando los ciclos que se forman podemos obtener información probabilística de la cadena de Markov.

Teorema 2.4.10. ***(Representación Probabilística en Ciclos)*** *Si ξ es una cadena de Markov estacionaria con matriz de transición $P = (p_{i,j})_{i,j\in S}$, irreducible con espacio de estados S finito y distribución estacionaria $\Pi = (\pi_i)_{i\in S}$, entonces*

$$\begin{aligned}\pi_i p_{i,j} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{c\in\mathcal{C}_\infty} \frac{w_{c,n}(\omega)}{n} J_n(i,j) \quad c.s \\ &= \sum_{c\in\mathcal{C}_\infty} w_c J_c(i,j) \quad \forall i,j \in S.\end{aligned}$$

Demostración. Para esta demostración definimos la función $\epsilon_n(\omega; i,j,)$ como

$$\epsilon_n(\omega; i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si la última transición de } i \text{ a } j \text{ pertenece} \\ & \quad \text{a algún ciclo de } \mathcal{C}_n(\omega) \\ 0 & \text{otro.} \end{cases}$$

Tenemos la siguiente descomposición:

$$\sigma_n(\omega; i,j) = \sum_{c\in\mathcal{C}_n(\omega)} \frac{w_{c,n}(\omega)}{n} J_c(i,j) + \frac{\epsilon_n(\omega; i,j)}{n}.$$

Definimos para cada n

$$a_n(\omega; c) = \begin{cases} \frac{w_{c,n}(\omega)}{n} & \text{si } c \in \mathcal{C}_n(\omega) \\ 0 & \text{otro.} \end{cases}$$

Para obtener

$$\sigma_n(\omega; i, j) = \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} a_n J_c(i, j) + \frac{\epsilon_n(\omega; i, j)}{n}.$$

.

Tomando límite cuando $n \to \infty$ en ambos lados y usando la Proposición 2.4.6, obtenemos

$$\pi_i p_{i,j} = \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} w_c J_c(i, j).$$

□

Teorema 2.4.11. ***(Descomposición en Ciclos)*** *Si ξ es una cadena de Markov estacionaria con matriz de transición $P = (p_{i,j})_{i,j \in S}$, irreducible con espacio de estados S finito, distribución estacionaria $\Pi = (\pi_i)_{i \in S}$ entonces para cualesquiera $i, j \in S$*

$$\pi_i p_{i,j} - \pi_j p_{j,i} = \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} (w_c - w_{c_-}) J_c(i, j). \tag{2.7}$$

Demostración. Para cualesquiera $i, j \in$ usando el teorema anterior dos veces y restando obtenemos que

$$\pi_i p_{i,j} - \pi_j p_{j,i} = \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} w_c J_c(i, j) - \sum_{c_- \in \mathcal{C}_\infty} w_{c_-} J_{c_-}(j, i) = \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} (w_c - w_{c_-}) J_c(i, j),$$

donde usamos que $J_c(i, j) = J_{c_-}(j, i)$. □

2.5 Irreversibilidad y producción de entropía

Definición 2.5.1. *Decimos que la cadena de Markov estacionaria ξ es reversible si $(\xi_{m_1}, \ldots, \xi_{m_k})$ tiene la misma distribución que $(\xi_{T-m_1}, \ldots, \xi_{T-m_k})$ para todo $k \geq 1$, $m_1 < m_2 < \ldots < m_k$ y $T \in \mathbb{Z}$.*

Definición 2.5.2. *Decimos que la cadena de Markov estacionaria ξ con distribución invariante Π está en balance detallado si*

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i} \quad \forall i, j \in S$$

Definición 2.5.3. *Decimos que una cadena ξ con matriz de transición $P = (p_{i,j})_{i,j \in S}$ satisface el criterio de Kolmogorov si*

$$p_{i_1,i_2} p_{i_2,i_3} \cdots p_{i_{s-1},i_s} = p_{i_s,i_{s-1}} \cdots p_{i_3,i_2} p_{i_2,i_1},$$

para cualquier colección finita $\{i_1, \ldots, i_s\}$ de elementos distintos de S.

La condición de balance detallado y el criterio de Kolmogorov son equivalentes a la reversibilidad de la cadena.

$$\begin{aligned} r : (\Omega, \mathcal{F}) &\to (\Omega, \mathcal{F}) \\ rw(n) = w(-n) &\quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

la transormación que "invierte" el tiempo, y

$$\begin{aligned} \theta : (\Omega, \mathcal{F}) &\to (\Omega, \mathcal{F}) \\ \theta w(n) = w(n+1) &\quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

la transformación que hace un "corrimiento" a la izquierda.

Ambas transformaciones son invertibles, en particular $r = r^{-1}$.

Definición 2.5.4. *Definimos el proceso estocástico ξ^- como*

$$\xi_n^-(\omega) = \xi_n(r\omega) = \xi_{-n}(\omega)$$

y la medida $P^- = rP$ sobre $(\Omega, \mathcal{F})$, en donde

$$\mathbb{P}^-(A) = r\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(r^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

ξ^- es el proceso ξ con el tiempo en reversa, y su distribución viene dada por $\mathbb{P}^-$.

Proposición 2.5.5. *ξ es reversible si y sólo si $\mathbb{P} = \mathbb{P}^-$*

Demostración. Recordemos que la σ-álgebra $\mathcal{F}$ está generada por conjuntos cilíndricos de la forma $B \times S^{\mathbb{Z}-M}$ donde $M \subset \mathbb{Z}$ finito, digamos $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$ y $B \in \Sigma^k$.

Para cualquier conjunto cilíndrico tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}^-(B \times S^{\mathbb{Z}-M}) \\
&= \mathbb{P}(r^{-1}(B \times S^{\mathbb{Z}-M})) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : rw(m_i) \in B, \quad i = 1, \ldots k\}) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : w(-m_i) \in B, \quad i = 1, \ldots, k\}) \\
&= \mathbb{P}(\xi_{-m_1}(\omega), \xi_{-m_2}(\omega), \ldots, \xi_{-m_k}(\omega) \in B) \text{ y usando la reversibilidad} \\
&= \mathbb{P}(\xi_{m_1}(\omega), \xi_{m_2}(\omega), \ldots, \xi_{m_k}(\omega) \in B) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : w(m_i) \in B, \quad i = 1, \ldots k\}) \\
&= \mathbb{P}(B \times S^{\mathbb{Z}-M})
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que si ξ es reversible entonces $\mathbb{P} = \mathbb{P}^-$. La suficiencia se sigue de un reacomodo de las igualdades anteriores. □

Proposición 2.5.6. *La transformación θ^n es $\mathbb{P}$-invariante y $\mathbb{P}^-$-invariante, es decir, $\theta^n\mathbb{P} = \mathbb{P}$ y $\theta^n\mathbb{P}^- = \mathbb{P}^-$.*

Demostración. Para cualquier conjunto cilíndrico tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\theta^{-1}(B \times S^{\mathbb{Z}-M})) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \theta w(m_i) \in B \quad i = 1, \ldots, k\}) \\
&= \mathbb{P}(\xi_{m_1+1}(\omega), \ldots, \xi_{m_k+1}(\omega) \in B) \text{ y usando que } \xi \text{ es estacionaria} \\
&= \mathbb{P}(\xi_{m_1}(\omega), \ldots, \xi_{m_k}(\omega) \in B) \\
&= \mathbb{P}(B \times S^{\mathbb{Z}-m}).
\end{aligned}
$$

Mediante el lema de Dynkin se extiende a toda $\mathcal{F}$. La $\mathbb{P}^-$-invariancia es consecuencia de

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}^-(\theta^{-1}A)\\
&= \mathbb{P}(r^{-1}\theta^{-1}A)\\
&= \mathbb{P}((\theta r)^{-1})\\
&= \mathbb{P}((r\theta^{-1})^{-1}A), \quad \text{pues } \theta r = r\theta^{-1}\\
&= \mathbb{P}(\theta r^{-1}A)\\
&= \mathbb{P}(r^{-1}A), \text{ usando la } \mathbb{P}\text{-invariancia de } \theta\\
&= \mathbb{P}^-(A)
\end{aligned}
$$

El caso $n \geq 1$ se prueba por inducción y esconsecuencia de lo anterior. $\square$

Proposición 2.5.7. *ξ^- es una cadena de Markov estacionaria en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con matriz de transición*

$$P^- = (p^-_{i,j})_{i,j\in S} = \left(\frac{\pi_j p_{j,i}}{\pi_i}\right)_{i,j\in S},$$

y distribución invariante $\Pi^- = \Pi$.

Demostración.

$$\mathbb{P}(\xi^-_{-m}(\omega) = j | \xi^-_{-(m+1)}(\omega) = i, \xi^-_{-(m+2)}(\omega) \ldots)$$

$$= \mathbb{P}(\xi_m(r\omega) | \xi_{m+1}(r\omega) = i, \ldots)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\xi_m(r\omega) = j, \xi_{m+1}(r\omega) = i, \ldots)}{\mathbb{P}(\xi_{m+1}(r\omega), \ldots)}$$

$$= \left(\frac{\mathbb{P}(\xi_{m+2}(r\omega), \ldots | \xi_m(r\omega) = j, \xi_{m+1}(r\omega) = i)}{\mathbb{P}(\xi_{m+2}(r\omega), \ldots | \xi_{m+1}(r\omega) = i)} \right) \Big(\mathbb{P}(\xi_m(r\omega) = j) \Big)$$

$$\left(\frac{\mathbb{P}(\xi_{m+1}(r\omega) = i | \xi_m(r\omega) = j)}{\mathbb{P}(\xi_{m+1}(r\omega) = i)} \right)$$

$$= \left(\overbrace{\frac{\mathbb{P}(\xi_{m+2}(r\omega), \ldots | \xi_{m+1}(r\omega) = i)}{\mathbb{P}(\xi_{m+2}(r\omega), \ldots | \xi_{m+1}(r\omega) = i)}}^{\text{usando la propiedad de Markov}} \right) \Big(\mathbb{P}(\xi_m(r\omega) = j) \Big)$$

$$\left(\frac{\mathbb{P}(\xi_{m+1}(r\omega) = i | \xi_m(r\omega) = j)}{\mathbb{P}(\xi_{m+1}(r\omega) = i)} \right)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\xi_{m+1}(r\omega) = i | \xi_m(r\omega) = j)}{\mathbb{P}(\xi_{m+1}(r\omega) = i)} \mathbb{P}(\xi_m(r\omega) = j) = \frac{\pi_j}{\pi_i} p_{i,j}.$$

Esto demuestra la propiedad de Markov y la forma de su matriz de transición. La existencia y unicidad de la distribución invariante de ξ^- se sigue de la existencia y unicidad de la de ξ.

Además observamos que

$$\sum_{j \in S} \pi_j p^-_{j,i} = \sum_{j \in S} \pi_j \frac{\pi_i p_{i,j}}{\pi_j} = \pi_i,$$

es decir, Π es punto fijo de P^-, por lo que $\Pi^- = \Pi$. $\square$

Definición 2.5.8. *Supongamos que μ y λ son dos medidas de probabilidad sobre un espacio medible $(M, \mathcal{A})$, la entropía relativa de μ respecto a λ se define como*

$$H(\mu, \lambda) = \begin{cases} \displaystyle\int_M \log \frac{d\mu}{d\lambda}(x)\mu(dx) & si\ \mu \ll \lambda\ y \log \frac{d\mu}{d\lambda} \in L_1(\mu) \\ +\infty & otro \end{cases}$$

Definición 2.5.9. *La tasa de producción de entropía de la cadena de Markov estacionaria ξ se define por*

$$e_p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathbb{P}_{[0,n]}, \mathbb{P}^-_{[0,n]})$$

donde $H(\mathbb{P}_{[0,n]}, \mathbb{P}^-_{[0,n]})$ es la entropía relativa de $\mathbb{P}$ con respecto a $\mathbb{P}^-$ restringidas a la σ-álgebra $\mathcal{F}_0^n$.

Lema 2.5.10. *Si la matriz de transición P de ξ satisface*

$$p_{i,j} > 0 \Longleftrightarrow p_{j,i} > 0 \quad \forall i, j \in S$$

entonces para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ las medidas $\mathbb{P}_{[m,m+n]}$ y $\mathbb{P}^-_{[m,m+n]}$ son equivalentes, es decir, $\mathbb{P}_{[m,m+n]} \ll \mathbb{P}^-_{[m,m+n]}$ y $\mathbb{P}^-_{[m,m+n]} \ll \mathbb{P}_{[m,m+n]}$.

Además la derivada de Radon-Nikodym viene dada por

$$\frac{d\mathbb{P}_{[m,m+n]}}{d\mathbb{P}^-_{[m,m+n]}}(\omega) = \frac{\pi_{\xi_m(\omega)} p_{\xi_m(\omega),\xi_{m+1}(\omega)} \cdots p_{\xi_{m+n-1}(\omega),\xi_{m+n}(\omega)}}{\pi_{\xi_{m+n}(\omega)} p_{\xi_{m+n}(\omega),\xi_{m+n-1}(\omega)} \cdots p_{\xi_{m+1}(\omega),\xi_m(\omega)}} \quad \mathbb{P} - c.s \tag{2.8}$$

Demostración. Como podemos pensar a $\mathcal{F}_m^{m+n} = \sigma(\{\{i_m\} \times \cdots \{i_{m+n}\} \times S^{\mathbb{Z}-M} : i_m, \ldots, i_{m+n} \in S\})$ consideramos cualquier conjunto cilíndrico $B \times S^{\mathbb{Z}-M}$ de los que generan a $\mathcal{F}_m^{m+n}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[m,m+n]}(B \times S^{\mathbb{Z}-M}) &= \mathbb{P}(\xi_m(\omega), \ldots, \xi_{m+n}(\omega) \in B) \\ &= \pi_{i_m} p_{i_m,i_{m+1}} \cdots p_{i_{m+n-1},i_{m+n}}. \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^-_{[m,m+n]}(B \times S^{\mathbb{Z}-M}) &= \pi^-_{i_m} p^-_{i_m,i_{m+1}} \cdots p^-_{i_{m+n-1},i_{m+n}} \\ &= \pi_{i_{m+n}} p_{i_{m+n},i_{m+n-1}} \cdots p_{i_{m+1}(\omega),i_m}. \end{aligned}$$

Y usando la relación entre P y P^- obtenemos que

$$\mathbb{P}_{[m,m+n]}(B \times S^{\mathbb{Z}-M}) = \frac{\pi_{i_m} p_{i_m,i_{m+1}} \cdots p_{i_{m+n-1},i_{m+n}}}{\pi_{i_{m+n}} p_{i_{m+n},i_{m+n-1}} \cdots p_{i_{m+1}}} \mathbb{P}^-_{[m,m+n]}(B \times S^{\mathbb{Z}-M}).$$

Así bajo la hipótesis de la proposición las medidas son equivalentes.

Recordemos que los conjuntos cilíndricos forman un álgebra, por lo que forman un π-sistema contenido en el siguiente conjunto

$$\mathscr{L} = \{A \in \mathcal{F}_m^{m+n} : \mathbb{P}_{[m,m+n]}(A) = \int_A f d\mathbb{P}^-_{[m,m+n]}\}$$

donde f es la función dada por (2.8). Veremos que $\mathscr{L}$ es un λ-sistema.

i) $\Omega \in \mathscr{L}$ pues

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f d\mathbb{P}^-_{[m,m+n]} &= \sum_{i_m,\ldots,i_{m+n} \in S} \int_{B \times S^{\mathbb{Z}-M}} f d\mathbb{P}^-_{[m,m+n]} \\
&= \sum_{i_m,\ldots,i_{m+n} \in S} \frac{\pi_{i_m} p_{i_m,i_{m+1}} \cdots p_{i_{m+n-1},i_{m+n}}}{\pi_{i_{m+n}} p_{i_{m+n},i_{m+n-1}} \cdots p_{i_{m+1},i_m}} \mathbb{P}^-_{[m,m+n]}(B \times S^{\mathbb{Z}-M}) \\
&= \sum_{i_m,\ldots,i_{m+n} \in S} \mathbb{P}_{[m,m+n]}(B \times S^{\mathbb{Z}-M}) = \mathbb{P}_{[m,m+n]}(\Omega)
\end{aligned}$$

ii) Si $A, B \in \mathscr{L}, A \subset B$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \int_{B \cap A^c} f d\mathbb{P}^- + \int_{B \cap A} f d\mathbb{P}^- \\
&= \int_{B-A} f d\mathbb{P}^- + \int_A f d\mathbb{P}^- \\
&= \int_{B-A} f d\mathbb{P}^- - \mathbb{P}(A)
\end{aligned}$$

Por lo que $\displaystyle\int_{B-A} f d\mathbb{P}^- = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B - A).$

iii) Si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \in \mathscr{L}$ entonces

$$\int_{\cup^\infty A_i} f d\mathbb{P}^- = \lim_{n\to\infty} \int_{\cup^n A_i} f d\mathbb{P}^- = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f d\mathbb{P}^-$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = P(\cup^\infty A_i).$$

Por el lema de Dynkin $\mathscr{L} = \mathcal{F}_m^{m+n}$, y por unicidad f es la derivada de Radon-Nikodym. □

Teorema 2.5.11. *La tasa de produción de entropía e_p de la cadena de Markov estacionaria ξ puede expresarse como*

$$e_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j\in S} (\pi_i p_{i,j} - \pi_j p_{j,i}) \log \frac{\pi_i p_{i,j}}{\pi_j p_{j,i}}. \tag{2.9}$$

Demostración.

Basta considerar el caso en que

$$p_{i,j} > 0 \Longleftrightarrow p_{j,i} > 0 \quad \forall i, j \in S,$$

de lo contrario $e_p = +\infty$ mientras que en el lado derecho de (2.9) ningún término puede ser $-\infty$ y por lo menos uno de ellos es $+\infty$. En dicho caso (2.9) se cumple.

Así pues, bajo la hipótesis del lema anterior,

$$\begin{aligned} e_p &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathbb{P}_{[0,n]}, \mathbb{P}^-_{[0,n]}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i_0,\ldots,i_n\in S} \pi_{i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n} \log \frac{\pi_{i_0} p_{i_0,i_1} \cdots p_{i_{n-1},i_n}}{\pi_{i_n} p_{i_n,i_{n-1}} \cdots p_{i_1,i_0}} \end{aligned}$$

y utilizando propiedades del logaritmo para separar productos en sumas,

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i_k,i_{k+1}\in S}\pi_k p_{i_k,i_{k+1}}\log\frac{\pi_k p_{i_k,i_{k+1}}}{\pi_{i_{k+1}}p_{i_{k+1},i_k}} \\
&= \sum_{i,j\in S}\pi_i p_{i,j}\log\frac{\pi_i p_{i,j}}{\pi_j p_{j,i}}, \quad \text{pues la suma interna no depende de n} \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{i,j\in S}(\pi_i p_{i,j}-\pi_j p_{j,i})\log\frac{\pi_i p_{i,j}}{\pi_j p_{j,i}}
\end{aligned}
$$

□

Mediante el teorema anterior es visible la relación entre la producción de entropía y la condicion de balance detallado. Dado que en la sección anteior encontramos una expresion de $\pi_i p_{i,j}$ en términos de su distribución circulatoria $\{w_c : c \in \mathcal{C}_\infty\}$ se antoja expresar la tasa de producción de entropía en estos mismo términos.

Teorema 2.5.12. *Si ξ es una cadena de Markov estacionaria con matriz de transición $P = (p_{i,j})_{i,j\in S}$, irreducible con espacio de estados S finito y distribución estacionaria $\Pi = (\pi_i)_{i\in S}$, entonces su tasa de producción de entropía puede ser expresada en términos de su distribución circulatoria*

$$
e_p = \frac{1}{2}\sum_{c\in\mathcal{C}_\infty}(w_c - w_{c_-})\log\frac{w_c}{w_{c_-}} \tag{2.10}
$$

Demostración. Partiendo de (2.9) y usando (2.7) se tiene que

$$
\begin{aligned}
e_p &= \tfrac{1}{2}\sum_{i,j\in S}\sum_{c\in\mathcal{C}_\infty}(w_c - w_{c_-})J_c(i,j)\log\frac{\pi_i p_{i,j}}{\pi_j p_{j,i}} \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{c\in\mathcal{C}_\infty}\sum_{i,j\in S}(w_c - w_{c_-})J_c(i,j)\log\frac{\pi_i p_{i,j}}{\pi_j p_{j,i}} \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{\substack{c\in\mathcal{C}_\infty \\ c=(\ldots,i_k,i_{k+1},\ldots)}}\sum_{k=1}^{s}(w_c - w_{c_-})\log\frac{\pi_{i_k} p_{i_k,i_{k+1}}}{\pi_{i_{k+1}} p_{i_{k+1},i_k}} \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{c\in\mathcal{C}_\infty}(w_c - w_{c_-})\log\prod_{k=1}^{s}\frac{\pi_{i_k} p_{i_k,i_{k+1}}}{\pi_{i_{k+1}} p_{i_{k+1},i_k}} \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{c\in\mathcal{C}_\infty}(w_c - w_{c_-})\log\frac{w_c}{w_{c_-}}.
\end{aligned}
$$

□

El trabajo de todo este capítulo puede resumirse en el siguiente teorema.

Teorema 2.5.13. *Si ξ es una cadena de Markov estacionaria con matriz de transición $P = (p_{i,j})_{i,j\in S}$, irreducible con espacio de estados S finito y distribución estacionaria $\Pi = (\pi_i)_{i\in S}$, entonces son equivalentes:*

1) La cadena deMarkov ξ es reversible.

2) La cadena de Markov está en balance detallado, esto es,

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i} \quad \forall i,j \in S.$$

3) La cadena de Markov satisface el criterio de Kolmogorov,

$$p_{i_1,i_2}p_{i_2,i_3}\cdots p_{i_{s-1},i_s} = p_{i_s,i_{s-1}}\cdots p_{i_3,i_2}p_{i_2,i_1},$$

para cualquier colección finita $\{i_1,\ldots,i_s\}$ de elementos distintos de S.

4) Los elementos de la distribución circulatoria $\{w_c : c \in \mathcal{C}_\infty\}$ satisfacen la condición de simetría

$$w_c = w_{c_-} \quad \forall c \in \mathcal{C}_\infty.$$

5) La tasa de producción de entropía es cero

$$e_p = 0$$

Demostración.

Ya sabemos que 1) $\Longleftrightarrow$ 2) $\Longleftrightarrow$ 3). Mientras que 4) $\Longleftrightarrow$ 5) es consecuencia de (2.10). Por último 2) $\Longleftrightarrow$ 5) se sigue de (2.9). □

Ejemplo 2.5.14. *El caso mas simple no trivial es cuando el espacio de estados es $S = \{1, 2, 3\}$ y matriz de transición*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & p \\ p & q & 0 \end{pmatrix},$$

donde $p, q > 0$ y $p + q = 1$. La distribución envariante es $\Pi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Los ciclos que aparecen en casi todas las trayectorias son

$$\mathcal{C}_\infty = \{(1, 2, 3), (3, 2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

Recordemos que un ciclo es equivalente a sus permutaciones cíclicas. Los pesos asociados a cada ciclo en virtud de la proposición (2.4.7) son

$$w_{(1,2,3)} = \frac{p_{1,2}p_{2,3}p_{3,1}}{\begin{vmatrix} 1 & -p \\ -q & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -p \\ -q & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -p \\ -q & 1 \end{vmatrix}} = \frac{p^3}{3(1 - pq)},$$

$$w_{(3,2,1)} = \frac{q^3}{3(1 - pq)},$$

$$w_{(1,2)} = w_{(2,3)} = w_{(3,1)} = \frac{pq}{3(1 - pq)},$$

Es importante notar que para cada ciclo c de longitud 2, se tiene que c_- es la única permutación cíclica de c, y por la equivalencia conocida entonces $w_c = w_{c_-}$. Esto y la ecuación (2.10) muestra que los ciclos que contribuyen a la tasa de producción de entropía son aquellos de longitud 3 o más.

En nuestro ejemplo la tasa de producción de entropía es

$$e_p = (w_{(1,2,3)} - w_{(3,2,1)}) \log \frac{w_{(1,2,3)}}{w_{(3,2,1)}} = \frac{p^3 - q^3}{3(1-pq)} \log \left(\frac{p}{q}\right)^3 = \frac{p^3 - q^3}{1-pq} \log \frac{p}{q},$$

$$= \frac{(p-q)(p^2+pq+q^2)}{1-pq} \log \frac{p}{q} = (p-q) \log \frac{p}{q}.$$

Pues si $p+q=1$*, entonces* $(p+q)^2 = 1$ *y con ello* $p^2+pq+q^2 = 1-pq$.

De lo anterior vemos que la cadena de Markov ξ *es reversible si y sólo si* $p = q = \frac{1}{2}$.

Capítulo 3

Descomposición en ciclos: tiempo continuo

3.1 Introducción

A lo largo de este capítulo suponemos que $\xi = \{\xi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es una cadena de Markov a tiempo continuo, irreducible, estacionaria, con espacio de estados finito $S = \{1, \ldots, N\}$ y distribución invariante $\Pi = \{\pi_i\}_{i\in S}$ sobre el espacio de probabilidad canónico $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de ξ. Supondremos que sus trayectorias son continuas por la derecha con límites por la izquierda, entre otras cosas, esta hipótesis asegura la existencia y unicidad de medidas condicionales, véase por ejemplo el Corolario 3 en la página 622 de [B. Fristedt and L.F. Gray, A Modern Approach to Probability Theory, Birkhäuser, 1997]. Su matriz de intensidades de transición, o generador infinitesimal, se denotará por $Q = (q_{i,j})_{i,j\in S}$ donde

$$q_i := \sum_{j\in S, \neq i} q_{i,j} = -q_{i,i} < \infty \quad \forall i \in S.$$

Sea $P(t) = (p_{i,j}(t))_{i,j\in S}$ la matriz de probabilidades de transición de ξ al tiempo t, entonces tenemos que

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{p_{i,j}(t) - \delta_{i,j}}{t} = q_{i,j} \quad \forall i, j \in S.$$

Consideraremos la matriz $\mathbf{D} = (d_{i,j})_{i,j\in S}$, donde

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ -\frac{q_{i,j}}{q_i} & i \neq j. \end{cases}$$

Definición 3.1.1. *Dado un conjunto de índices $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$, definimos $D(H)$ como el subdeterminante de la matriz $\mathbf{D}$ tomando como renglones y columnas a los elementos de H, es decir,*

$$D(H) = \begin{vmatrix} d_{h_1,h_1} & d_{h_1,h_2} & \cdots & d_{h_1,h_k} \\ d_{h_2,h_1} & d_{h_2,h_2} & \cdots & d_{h_2,h_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{h_k,h_1} & d_{h_k,h_2} & \cdots & d_{h_k,h_k}. \end{vmatrix}$$

De manera similar denotamos por $\tilde{D}(H)$ al determinante de Q dado por el conjunto de índices H. En ambos casos convenimos que $D(\emptyset) = \tilde{D}(\emptyset) = 1$.

Definición 3.1.2. *Denotamos por $\tilde{\xi} = \{\tilde{\xi}_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\xi_{T_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $T_0, T_1, \ldots$ son los tiempos de transición de ξ definidos por*

$$\begin{aligned} T_0(\omega) &:= 0 \\ T_1(\omega) &:= \inf\{t > 0 : \xi_t(\omega) \neq \xi_0(\omega)\} \\ T_{k+1}(\omega) &:= \inf\{t > T_k(\omega) : \xi_t(\omega) \neq \xi_{T_k(\omega)}(\omega)\} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De la propiedad fuerte de Markov de ξ se tiene que $\tilde{\xi}$ es una cadena de Markov a tiempo discreto, irreducible, recurrente y estacionaria con espacio de estados S, distribución invariante $\tilde{\Pi} = (\tilde{\pi}_i)_{i\in S}$ y matriz de transición $\tilde{P} = (\tilde{p}_{i,j})_{i,j\in S}$ dada por

$$\tilde{p}_{i,j} = \mathbb{P}(\tilde{\xi}_{n+1} = j | \tilde{\xi}_n = i) = \begin{cases} \frac{q_{i,j}}{q_i} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

$\tilde{\xi}$ se llama la cadena de Markov encajada de ξ, ver [20].

Es fácil ver que las matrices $D, \tilde{P}$ satisfacen que $D = I - \tilde{P}$, mientras que los procesos cumplen

$$\xi_t(\omega) = \tilde{\xi}_k(\omega) \text{ cuando } T_k(\omega) \leq t < T_{k+1}(\omega).$$

Proposición 3.1.3. *Las distribuciones invariantes de ξ y $\tilde{\xi}$ satisfacen las siguientes relaciones*

$$
\begin{aligned}
\tilde{\pi}_i &= \frac{D(\{i\}^c)}{\sum\limits_{j\in S} D(\{j\}^c)} = \frac{\tilde{D}(\{i\}^c)q_i}{\sum\limits_{j\in S} \tilde{D}(\{j\}^c)q_j} \quad \forall i \in S. \\
\pi_i &= \frac{\tilde{D}(\{i\}^c)}{\sum\limits_{j\in S} \tilde{D}(\{j\}^c)} = \frac{\tilde{\pi}_i/q_i}{\sum\limits_{j\in S} \tilde{\pi}_j/q_j} \quad \forall i \in S.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Demostración. Las primeras igualdades en (3.1) se siguen del Lema 2.3.2 del capítulo anterior y del hecho de que $\Pi Q = 0$.

Para obtener la última igualdad para $\tilde{\pi}_i$ bastará ver que para $i \neq j$ se tiene que $D(\{j\}^c)\tilde{D}(\{i\}^c)q_i = D(\{i\}^c)\tilde{D}(\{j\}^c)q_j$. En efecto, utilizando la relación entre los elementos de matriz de Q y D y propiedades de los determinantes

$$
\begin{aligned}
D(\{j\}^c)\tilde{D}(\{i\}^c)q_i &= D(\{j\}^c)\tilde{D}(\{i\}^c)q_i \prod_l \frac{-q_l}{-q_l} \\
&= D(\{j\}^c)\tilde{D}(\{i\}^c)q_i \frac{-q_j}{-q_j} \prod_{l\neq j} \frac{-q_l}{-q_l} \\
&= \tilde{D}(\{j\}^c)\tilde{D}(\{i\}^c)q_i \frac{-q_j}{-q_j} \prod_{l\neq j} \frac{1}{-q_l} \\
&= \tilde{D}(\{j\}^c)\tilde{D}(\{i\}^c)q_i \frac{-q_j}{-q_i} \prod_{l\neq i} \frac{1}{-q_l} \\
&= \tilde{D}(\{j\}^c)\tilde{D}(\{i\}^c)q_j \prod_{l\neq i} \frac{1}{-q_l} \\
&= \tilde{D}(\{j\}^c)D(\{i\}^c)q_j.
\end{aligned}
$$

A partir de esta relación se ve que la última igualdad para π_i es inmediata pues,

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}(\{j\}^c)q_j\tilde{\pi}_i &= \tilde{D}(\{j\}^c)q_j\left(\frac{\tilde{D}(\{i\}^c)q_i}{\displaystyle\sum_{l\in S}\tilde{D}(\{l\}^c)q_l}\right) \\
&= \left(\frac{\tilde{D}(\{j\}^c)q_j}{\displaystyle\sum_{l\in S}\tilde{D}(\{l\}^c)q_l}\right)\tilde{D}(\{i\}^c)q_i \\
&= \tilde{\pi}_j\tilde{D}(\{i\}^c)q_i.
\end{aligned}
$$

□

3.2 Representación probabilística en ciclos

Dado que la cadena ξ es irreducible y recurrente, en casi todas las trayectorias ω, $\xi.(\omega)$ genera una sucesión infinita de ciclos. Si contamos cada ciclo completado y lo eliminamos, podemos saber el número de veces que aparece un ciclo específico c hasta el tiempo t, denotamos a este número por $\tilde{w}_{c,t}(\omega)$. La idea es aplicar los resultados del capítulo anterior a la cadena encajada $\tilde{\xi}$.

Definición 3.2.1. *Definimos $n_t(\omega)$ como*

$$n_t(\omega) = \sup\{n \geq 0 : T_n(\omega) \leq t\}$$

De la definición se ve que $n_t(\omega)$ es el número de transiciones en la órbita ω hasta el tiempo t de la cadena ξ.

Definición 3.2.2. *Para la cadena ξ definimos*

$$\tilde{w}_{c,t}(\omega) = w_{c,n_t(\omega)}$$

Es claro que $\tilde{w}_{c,t}(\omega)$ es el número de veces que se completa el ciclo c en la órbita ω hasta el tiempo t.

Lema 3.2.3. *Para $\mathbb{P}$-casi todo $\omega \in \Omega$*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{n_t(\omega)}{t} = \frac{\displaystyle\sum_{i\in S} \tilde{D}(\{i\}^c)q_i}{\displaystyle\sum_{i\in S} \tilde{D}(\{i\}^c)}$$

Demostración. Para cada $n \geq 1$ sea $\tau_n(\omega) = T_n(\omega) - T_{n-1}(\omega)$ el tiempo de espera entre transiciones de la cadena ξ. Sabemos que $\{\tau_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ son variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente con parámetro $q_{\xi_{T_{n-1}(\omega)}(\omega)}$. Recordemos que $E\left[\tau_k|\tilde{\xi}_{k-1}\right] = \varphi \circ \tilde{\xi}_{k-1}$ en donde $\varphi : S \to \mathbb{R}$ es medible. Puesto que condicionando respecto al evento $\{\tilde{\xi}_{k-1}(\omega) = i\}$, la variable τ_k tiene distribución exponencial con parámetro q_i, se tiene que

$$\varphi(i) = E\left[\tau_k|\tilde{\xi}_{k-1} = i\right] = \int_0^\infty q_i u e^{-q_i u} du = \frac{1}{q_i}.$$

Por lo que

$$E\left[\tau_k|\tilde{\xi}_{k-1}\right](\omega) = \varphi \circ \tilde{\xi}_{k-1} = \frac{1}{q_{\tilde{\xi}_{k-1}(\omega)}}.$$

Por otro lado

$$Var(\tau_n) \leq \max_{i\in S} \frac{1}{q_i^2} < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(\tau_n)}{n^2} < \infty.$$

Y usando el criterio de Kolmogorov para la ley de los grandes números

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} [\tau_k - E(\tau_k)] = 0 \quad c.s.$$

Sea $\rho_n(i) = \mathbb{P}(\tilde{\xi}_n(\omega) = i)$, entonces por la Proposición 3.1.3 tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(i) = \tilde{\pi}_i = \frac{\tilde{D}(\{i\}^c)q_i}{\displaystyle\sum_{j\in S} q_j \tilde{D}(\{j\}^c)}.$$

Y con esto

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\tau_k) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E\left(E\left[\tau_k|\tilde{\xi}_{k-1}\right]\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in S}\quad\int_{\{\tilde{\xi}_{k-1}=i\}}E\left[\tau_k|\tilde{\xi}_{k-1}\right]d\mathbb{P}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in S}\frac{1}{q_i}\int_{\{\tilde{\xi}_{k-1}=i\}}d\mathbb{P}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in S}\frac{\rho_{k-1}(i)}{q_i}\\
&= \sum_{i\in S}\frac{1}{q_i}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\rho_{k-1}(i)\\
&= \frac{\sum_{i\in S}\tilde{D}(\{i\}^c)}{\sum_{j\in S}q_j\tilde{D}(\{j\}^c)}.
\end{aligned}
$$

De donde

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau_k\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\tau_k)\quad c.s.\\
&= \frac{\sum_{i\in S}\tilde{D}(\{i\}^c)}{\sum_{j\in S}q_j\tilde{D}(\{j\}^c)}.
\end{aligned}
$$

Finalmente para cada $\omega \in \Omega$ y $t > 0$

$$\frac{n_t(\omega)}{T_{n_t(\omega)+1}(\omega)} \leq \frac{n_t(\omega)}{t} \leq \frac{n_t(\omega)}{T_{n_t(\omega)}(\omega)},$$

tomando límite obtenemos por lo anterior que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_t}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{T_n} = \frac{\displaystyle\sum_{j\in S} q_j \tilde{D}(\{j\}^c)}{\displaystyle\sum_{i\in S} \tilde{D}(\{i\}^c)} \quad c.s.$$

$\square$

Proposición 3.2.4. *Para cada ciclo $c = (i_1, \ldots, i_s)$ el siguiente límite existe*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{w}_{c,t}(\omega)}{t} = w_c \quad c.s.,$$

donde

$$w_c = (-1)^{s-1} q_{i_1,i_2} q_{i_2,i_3} \cdots q_{i_{s-1},i_s} q_{i_s,i_1} \frac{\tilde{D}(\{i_1, \ldots, i_s\}^c)}{\sum_{j\in S} \tilde{D}(\{j\}^c)}.$$

Demostración. Para cada ciclo c por la Proposición 2.4.7, aplicada a la cadena encajada $\tilde{\xi}$, obtenemos que casi seguramente

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{w_{c,n}(\omega)}{n} &= \tilde{p}_{i_1,i_2}\tilde{p}_{i_2,i_3}\cdots\tilde{p}_{i_{s-1},i_s}\tilde{p}_{i_s,i_1}\frac{D(\{i_1,\ldots,i_s\}^c)}{\sum\limits_{j\in S} D(\{j\}^c)} \\
&= \frac{q_{i_1,i_2}}{q_{i_1}}\cdots\frac{q_{i_s,i_1}}{q_{i_s}}\frac{\prod\limits_{l\in\{i_1,\ldots,i_s\}^c}\frac{1}{-q_l}\tilde{D}(\{i_1,\ldots,i_s\}^c)}{\prod\limits_{l\in S}\frac{1}{-q_l}\sum\limits_{j\in S} -q_j\tilde{D}(\{j\}^c)} \\
&= \prod_{l\in\{i_1,\ldots,i_s\}} -q_l\frac{q_{i_1,i_2}}{q_{i_1}}\cdots\frac{q_{i_s,i_1}}{q_{i_s}}\frac{\tilde{D}(\{i_1,\ldots,i_s\}^c)}{\sum\limits_{j\in S} -q_j\tilde{D}(\{j\}^c)} \\
&= (-1)^{s-1}q_{i_1,i_2}q_{i_2,i_3}\cdots q_{i_{s-1},i_s}q_{i_s,i_1}\frac{\tilde{D}(\{i_1,\ldots,i_s\}^c)}{\sum\limits_{j\in S} q_j\tilde{D}(\{j\}^c)}.
\end{aligned}
$$

Y usando el lema anterior

$$
\begin{aligned}
w_c &= \lim_{t\to\infty}\frac{\tilde{w}_{c,t}(\omega)}{t} \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{n_t(\omega)}{t}\frac{w_{c,n_t(\omega)}(\omega)}{n_t(\omega)} \\
&= (-1)^{s-1}q_{i_1,i_2}q_{i_2,i_3}\cdots q_{i_{s-1},i_s}q_{i_s,i_1}\frac{\tilde{D}(\{i_1,\ldots,i_s\}^c)}{\sum\limits_{j\in S} q_j\tilde{D}(\{j\}^c)}\frac{\sum\limits_{j\in S} q_j\tilde{D}(\{j\}^c)}{\sum\limits_{i\in S}\tilde{D}(\{i\}^c)} \\
&= (-1)^{s-1}q_{i_1,i_2}q_{i_2,i_3}\cdots q_{i_{s-1},i_s}q_{i_s,i_1}\frac{\tilde{D}(\{i_1,\ldots,i_s\}^c)}{\sum\limits_{i\in S}\tilde{D}(\{i\}^c)}.
\end{aligned}
$$

□

Proposición 3.2.5. *La sucesión $\{\mathcal{C}_t(\omega)\}_{t>0}$ converge casi seguramente a una clase de ciclos que denotaremos por $\mathcal{C}_\infty$.*

Demostración. Por definición de los $\mathcal{C}_t(\omega)$, la sucesión es creciente y podemos asignarle a cada ω la clase

$$\mathcal{C}_\infty(\omega) := \lim_{t\to\infty} \mathcal{C}_t(\omega) = \bigcup_{t>0} \mathcal{C}_t(\omega).$$

Para ver que esta clase no depende de la trayectoria, tomemos ω_1, ω_2 fuera del conjunto de probabilidad cero dado por la proposición anterior. Entonces para cada $c \in \mathcal{C}_\infty(\omega_1)$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{w}_{c,t}(\omega_1)}{t} = w_c = \lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{w}_{c,t}(\omega_2)}{t},$$

y así $c \in \mathcal{C}_\infty(\omega_2)$.

Por lo tanto $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{C}_\infty(\omega)$ no depende de la trayectoria ω. □

Teorema 3.2.6. ***(Representación Probabilística en Ciclos)*** *Si ξ es una cadena de Markov estacionaria con generador Q, irreducible con espacio de estados S finito y distribución estacionaria Π, entonces*

$$\pi_i q_{i,j} = \sum_{c\in\mathcal{C}_\infty} w_c J_c(i,j) \quad \forall i,j \in S \quad i \neq j.$$

Demostración. Para cada $c \in \mathcal{C}_\infty$ denotamos $\tilde{w}_c = \lim_{n\to\infty} \frac{w_{c,n}(\omega)}{n}$ $c.s$, entonces claramente $\{\tilde{w}_c : c \in \mathcal{C}_\infty\}$ es la distribución circulatoria de la cadena encajada $\tilde{\xi}$, aún más por la Proposición 3.2.4 sabemos que

$$\tilde{w}_c = w_c \frac{\sum_{i\in S} \tilde{D}(\{i\}^c)}{\sum_{j\in S} q_j \tilde{D}(\{j\}^c)}.$$

Utilizando la representación probabilística en ciclos de la cadena encajada $\tilde{\xi}$ dada por el Teorema 2.4.10,

$$\tilde{\pi}_i \tilde{p}_{i,j} = \sum_{c\in\mathcal{C}_\infty} \tilde{w}_c J_c(i,j),$$

las relaciones entre las distribuciones invariantes Π y $\tilde{\Pi}$, de la Proposición 3.1.3 obtenemos que

$$\pi_i q_{i,j} = \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} w_c J_c(i,j).$$

□

Teorema 3.2.7. ***(Descomposición en Ciclos)*** *Si ξ es una cadena de Markov estacionaria con matriz $Q = (q_{i,j})_{i,j \in S}$, irreducible con espacio de estados S finito y con distribución estacionaria $\Pi = (\pi_i)_{i \in S}$, entonces para cualesquiera $i, j \in S$*

$$\pi_i q_{i,j} - \pi_j q_{j,i} = \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} (w_c - w_{c_-}) J_c(i,j). \tag{3.2}$$

Demostración. Para cualesquiera $i, j \in$, usando el teorema anterior dos veces y restando obtenemos que

$$\pi_i q_{i,j} - \pi_j q_{j,i} = \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} w_c J_c(i,j) - \sum_{c_- \in \mathcal{C}_\infty} w_{c_-} J_{c_-}(j,i) = \sum_{c \in \mathcal{C}_\infty} (w_c - w_{c_-}) J_c(i,j),$$

donde usamos que $J_c(i,j) = J_{c_-}(j,i)$. □

3.3 Irreversibilidad y producción de entropía

Definición 3.3.1. *Decimos que una cadena de Markov estacionaria ξ es reversible si $(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_k})$ tiene la misma distribución que $(\xi_{T-t_1}, \ldots, \xi_{T-t_k})$ para todo $k \geq 1$, $t_1 < \ldots < t_k$ y $T \in \mathbb{R}$.*

Definición 3.3.2. *Decimos que la cadena de Markov estacionaria ξ con distribución invariante Π está en balance detallado si*

$$\pi_i q_{i,j} = \pi_j q_{j,i} \quad \forall i, j \in S$$

Definición 3.3.3. *Decimos que una matriz $Q = (q_{i,j})_{i,j \in S}$ satisface el criterio de Kolmogorov si*

$$q_{i_1,i_2} q_{i_2,i_3} \cdots q_{i_{s-1},i_s} = q_{i_s,i_{s-1}} \cdots q_{i_3,i_2} q_{i_2,i_1}$$

para cualquier colección finita $\{i_1, \ldots, i_s\}$ de elementos distintos de S.

Sean r la transformacion medible que "invierte" el tiempo y θ_t, $t \in \mathbb{R}$, el corrimiento a la izquierda por t unidades.

Como requerimos que las trayectorias sean continuas a la derecha, modificamos los estados en los tiempos de transición en las trayectorias en reversa como sigue:

$$r : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F}),$$
$$rw(t) = \lim_{s \uparrow -t} w(s), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

para la transformación que "invierte" el tiempo, y

$$\theta : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F}),$$
$$\theta_t w(s) = w(s+t), \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

para la transformación que hace un "corrimiento" a la izquierda.

Ambas transformaciones son invertibles, en particular $r = r^{-1}$.

Definición 3.3.4. *Definimos el proceso estocástico ξ^- como*

$$\xi_t^-(\omega) = \xi_t(r\omega)$$

y una medida $P^- = rP$ sobre $(\Omega, \mathcal{F})$, en donde

$$\mathbb{P}^-(A) = rP(A) = \mathbb{P}(r^{-1}(A)), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

ξ^- es la cadena en reversa de ξ y su distribución viene dada por $\mathbb{P}^-$.

Proposición 3.3.5. *Las transformaciones anteriores satisfacen las siguientes propiedades:*

i) ξ es reversible si y sólo si $\mathbb{P} = \mathbb{P}^-$

ii) θ_t es $\mathbb{P}$-invariante

iii) θ_t es $\mathbb{P}^-$-invariante

Demostración. Las demostraciones son análogas al caso discreto al considerar el álgebra cilíndrica generada con el conjunto índice $\mathbb{R}$ y usando el lema de Dynkin.

Proposición 3.3.6. *ξ^- es una cadena de Markov estacionaria en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con generador*

$$Q^- = (q^-_{i,j})_{i,j\in S} = \left(\frac{\pi_j q_{j,i}}{\pi_i}\right)_{i,j\in S},$$

y distribución invariante $\Pi^- = \Pi$.

Demostración. Para cualquier par de estados i, j, distintos, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\pi_j p_{j,i}(h) = \mathbb{P}(\xi_t(r\omega) = j)\mathbb{P}(\xi_{t+h}(r\omega) = i|\xi_t(r\omega) = j)\\
&= \mathbb{P}(\xi_t(r\omega) = i)\mathbb{P}(\xi_t(r\omega) = j|\xi_{t+h}(r\omega) = i)\\
&= \mathbb{P}(\xi_t(r\omega) = i)\mathbb{P}(\xi^-_t(\omega) = j|\xi^-_{t+h}(\omega) = i) = \pi_i p^-_{i,j}(h).
\end{aligned}$$

De donde dividiendo entre h y tomando límite cuando $h \to 0$ obtenemos

$$q^-_{i,j} = \lim_{h\to 0}\frac{p^-_{i,j}(h)}{h} = \frac{\pi_j}{\pi_i}\lim_{h\to 0}\frac{p_{j,i}(h)}{h} = \frac{\pi_j}{\pi_i}q_{j,i}.$$

De esto se sigue la propiedad de Markov. De la existencia y unicidad de Π se sigue la existencia y unicidad de Π^-, además estas coinciden, pues se satisface que

$$\sum_{j\in S}\pi_j q^-_{j,i} = \sum_{j\in S}\pi_j\frac{\pi_i q_{i,j}}{\pi_j} = 0;$$

es decir, $\Pi Q^- = 0$, por lo que $\Pi^- = \Pi$. Así ξ^- es una cadena de Markov estacionaria. □

Definición 3.3.7. *Para cualquier $s < t$ denotamos por $\mathcal{F}^t_s$ a la sub σ-álgebra generada por $\{\xi_u : s \le u \le y\}$, es decir,*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^t_s = \sigma(\xi_u : s \le u \le t)\\
&\mathbb{P}_{[s,t]} = \mathbb{P}|_{\mathcal{F}^t_s}\\
&\mathbb{P}^-_{[s,t]} = \mathbb{P}^-|_{\mathcal{F}^t_s}.
\end{aligned}$$

Definición 3.3.8. *La tasa de producción de entropía de una cadena de Markov estacionaria* ξ *se define por*

$$e_p = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} H(\mathbb{P}_{[0,t]}, \mathbb{P}^-_{[0,t]}),$$

donde $H(\mathbb{P}_{[0,t]}, \mathbb{P}^-_{[0,t]})$ *es la entropía relativa de* $\mathbb{P}$ *con respecto a* $\mathbb{P}^-$ *restringidas a la* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_0^t$.

Definición 3.3.9. *Para cualquier* $t > 0$, $n \geq 0$ *y* $[i_0, i_1, \ldots, i_n] \in [S]$, *denotamos por*

$$A_{i_0,i_1,\ldots,i_n}(t) = \{\omega \in \Omega : n_t(\omega) = n, \xi_{T_k(\omega)}(\omega) = i_k, k = 0, 1, \ldots, n\},$$

al conjunto de trayectorias ω *que hasta el tiempo* t *contienen* n *transiciones sobre el conjunto* $i_0, i_1, \ldots, i_n$.

Lema 3.3.10. *Si la* Q*-matriz de* ξ *satisface*

$$q_{i,j} > 0 \Longleftrightarrow q_{j,i} > 0 \quad \forall i, j \in S,$$

entonces para todo $s, t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ *las medidas* $\mathbb{P}_{[s,s+t]}$ *y* $\mathbb{P}^-_{[s,s+t]}$ *son equivalentes, es decir,* $\mathbb{P}_{[s,s+t]} \ll \mathbb{P}^-_{[s,s+t]}$ *y* $\mathbb{P}^-_{[s,s+t]} \ll \mathbb{P}_{[s,s+t]}$.

Demostración. Para $t > 0$, $n \geq 0$, $[i_0, i_1, \ldots, i_n] \in [S]$, $0 < t_1 < \ldots < t_n < t$ y δ suficientemente pequeño para que no haya traslapes escribimos

$$A = \{\omega \in A_{i_0,i_1,\ldots,i_n}(t) : t_1 < T_1(\omega) \leq t_1 + \delta t_1, \cdots, t_n < T_n(\omega) \leq t_n + \delta t_n\}.$$

Con esto,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \pi_{i_0}\tilde{p}_{i_0,i_1} \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} q_{i_0} e^{-q_{i_0}s_1} \tilde{p}_{i_1,i_2} \int_{t_2-s_1}^{t_2+\delta t_2 - s_1} q_{i_1} e^{-q_{i_1}s_2} \cdots \tilde{p}_{i_{n-1},i_n} \\
&\int_{t_n-\sum_{k=1}^{n-1} s_k}^{t_n+\delta t_n-\sum_{k=1}^{n-1} s_k} q_{i_{n-1}} e^{-q_{i_{n-1}}s_n} \int_{t-\sum_{k=1}^{n} s_k}^{\infty} q_{i_n} e^{-q_{i_n}s_{n+1}} ds_{n+1} ds_n \cdots ds_2 ds_1 \\
&= \pi_{i_0} q_{i_0,i_1} \cdots q_{i_{n-1}i_n} q_{i_n} \\
&\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \cdots \int_{t_n-\sum_{k=1}^{n-1} s_k}^{t_n+\delta t_n-\sum_{k=1}^{n-1} s_k} \int_{t-\sum_{k=1}^{n} s_k}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} e^{-q_{i_k}s_{k+1}} ds_{n+1} \cdots ds_1.
\end{aligned}$$

De manera similar,

$$\mathbb{P}^-(A) = \pi^-_{i_0} q^-_{i_0,i_1} \cdots q^-_{i_{n-1} i_n} q^-_{i_n}$$
$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \cdots \int_{t_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k}^{t_n+\delta t_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k} \int_{t-\sum_{k=1}^{n} s_k}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} e^{-q^-_{i_k} s_{k+1}} ds_{n+1} \cdots ds_1.$$

Y tenemos

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Longleftrightarrow q_{i_0,i_1} \cdots q_{i_{n-1} i_n} q_{i_{n-1},i_n} = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$q^-_{i_0,i_1} \cdots q^-_{i_{n-1} i_n} q^-_{i_{n-1},i_n} = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{P}^-(A) = 0.$$

Aún más, para $\mathbb{P}(A) > 0$ usando la relación entre $q_{i,j}$ y $q^-_{i,j}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\pi_{i_0} q_{i_0,i_1} \cdots q_{i_{n-1} i_n} q_{i_{n-1},i_n}}{\pi_{i_n} q_{i_n,i_{n-1}} \cdots q_{i_2,i_1} q_{i_1,i_0}} \mathbb{P}^-(A).$$

Como $\mathcal{F}_0^t \subset \sigma(n_t, \xi_0, T_i, \xi_{T_1}, \ldots, T_k, \xi_{T_k}, \ldots)$, esta última siendo generada por conjuntos del tipo de A, entonces tenemos que $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}^-$ y $\mathbb{P}^- \ll \mathbb{P}$ en $\mathcal{F}_0^t$, en donde si $\omega \in A_{i_0,\ldots,i_n}(t)$

$$\frac{d\mathbb{P}_{[0,t]}}{d\mathbb{P}^-_{[0,t]}}(\omega) = \frac{\pi_{\xi_0(\omega)} q_{\xi_0(\omega),\xi_{T_1}(\omega)} \cdots q_{\xi_{T_{n-1}(\omega)},\xi_{T_n}(\omega)} q_{\xi_{T_{n-1}(\omega)},\xi_{T_n}(\omega)}}{\pi_{\xi_n(\omega)} q_{\xi_n(\omega),\xi_{T_{n-1}(\omega)}} \cdots q_{\xi_{T_2}(\omega),\xi_{T_1}(\omega)} q_{\xi_{T_1}(\omega),\xi_{T_0}(\omega)}} \quad \mathbb{P} - c.s.$$

□

Teorema 3.3.11. *La tasa de produción de entropía e_p de la cadena de Markov estacionaria a tiempo continuo ξ puede expresarse como*

$$e_p = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in S} (\pi_i q_{i,j} - \pi_j q_{j,i}) \log \frac{\pi_i q_{i,j}}{\pi_j q_{j,i}}. \tag{3.3}$$

Demostración.

Basta considerar el caso en que

$$q_{i,j} > 0 \Longleftrightarrow q_{j,i} > 0 \quad \forall i, j \in S,$$

de lo contrario $e_p = +\infty$, mientras que en el lado derecho de (3.3) ningún término puede ser $-\infty$ y por lo menos uno de ellos es $+\infty$. En dicho caso (3.3) se cumple.

Bajo la hipótesis del lema anterior,

$$
\begin{aligned}
H(\mathbb{P}_{[0,t]}, \mathbb{P}^-_{[0,t]}) &= E^{\mathbb{P}}\left(\log \frac{d\mathbb{P}_{[0,t]}}{d\mathbb{P}^-_{[0,t]}}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{n_t=n\}} \log \frac{d\mathbb{P}_{[0,t]}}{d\mathbb{P}^-_{[0,t]}} d\mathbb{P}_{[0,t]} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E^{\mathbb{P}}\left[\log \frac{d\mathbb{P}_{[0,t]}}{d\mathbb{P}^-_{[0,t]}} \middle| n_t = n\right] \mathbb{P}(n_t = n).
\end{aligned}
$$

Hacemos $C_1 = \max\{|\log \frac{q_{i,j}}{q_{j,i}}| : i,j \in S, q_{i,j} > 0\}$,

$C_2 = \max\{|\log \frac{\pi_i}{\pi_j}| : i,j \in S\}$ y $C_3 = \max\{q_i : i \in S\}$.

Así para $n \geq 2$

$$
\begin{aligned}
&\left| E^{\mathbb{P}}\left[\log \frac{d\mathbb{P}_{[0,t]}}{d\mathbb{P}^-_{[0,t]}} \middle| n_t = n\right] \right| \\
&= \left| E^{\mathbb{P}}\left[\log \frac{\pi_{\xi_0} q_{\xi_0,\xi_{T_1}} \cdots q_{\xi_{T_{n-1}},\xi_{T_n}} q_{\xi_{T_{n-1}},\xi_{T_n}}}{\pi_{\xi_n} q_{\xi_n,\xi_{T_{n-1}}} \cdots q_{\xi_{T_2},\xi_{T_1}} q_{\xi_{T_1},\xi_{T_0}}} \middle| n_t = n\right] \right| \\
&= \left| E^{\mathbb{P}}\left[\log \frac{\pi_{\xi_0}}{\pi_{\xi_{T_n}}} \middle| n_t = n\right] + \sum_{k=0}^{n-1} E^{\mathbb{P}}\left[\log \frac{q_{\xi_{T_k},\xi_{T_{k+1}}}}{q_{\xi_{T_{k+1}},\xi_{T_k}}} \middle| n_t = n\right] \right. \\
&\leq C_1 n + C_2.
\end{aligned}
$$

Por otra parte

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_{i_0,\ldots,i_n}(t)) = \pi_{i_0} q_{i_0,i_1} \cdots q_{i_{n-1} i_n} q_{i_n} \\
&\int_0^t \int_{t-s_1}^t \cdots \int_{t-\sum_{k=1}^{n-1} s_k}^t \int_{t-\sum_{k=1}^{n} s_k}^\infty \prod_{k=0}^{n} e^{-q_{i_k} s_{k+1}} ds_{n+1} \cdots ds_1 \\
&= \pi_{i_0} q_{i_0,i_1} \cdots q_{i_{n-1} i_n} \int_0^t \int_{t-s_1}^t \cdots \int_{t-\sum_{k=1}^{n-1} s_k}^t e^{-q_{i_n}(t-\sum_{l=1}^{n} s_l)} \prod_{k=0}^{n-1} e^{-q_{i_k} s_{k+1}} ds_n \cdots ds_1 \\
&\leq \pi_{i_0} q_{i_0,i_1} \cdots q_{i_{n-1} i_n} \int_0^t \int_{t-s_1}^t \cdots \int_{t-\sum_{k=1}^{n-1} s_k}^t ds_n \cdots ds_1 \\
&= \pi_{i_0} q_{i_0,i_1} \cdots q_{i_{n-1} i_n} \frac{t^n}{n!},
\end{aligned}
$$

con lo cual se ve que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(n_t = n) &= \sum_{i_0,\ldots,i_n \in [S]} \mathbb{P}(A_{i_0,\ldots,i_n}(t)) \\
&\leq \sum_{i_0,\ldots,i_n \in [S]} \pi_{i_0} q_{i_0,i_1} \cdots q_{i_{n-1} i_n} \frac{t^n}{n!} \leq \frac{(C_3 t)^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Obteniendo que

$$
\begin{aligned}
&\left| \sum_{n=2}^{\infty} E^{\mathbb{P}} \left[\log \frac{d\mathbb{P}_{[0,t]}}{d\mathbb{P}^-_{[0,t]}} \middle| n_t = n \right] \mathbb{P}(n_t = n) \right| \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} (C_1 n + C_2) \frac{(C_3 t)^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Es decir, $\left| \sum_{n=2}^{\infty} E^{\mathbb{P}} \left[\log \frac{d\mathbb{P}_{[0,t]}}{d\mathbb{P}^-_{[0,t]}} \middle| n_t = n \right] \mathbb{P}(n_t = n) \right| \to 0$ cuando $t \to 0^+$. Podemos decir entonces que equivale a un término de orden cuadrado $O(t^2)$.

$$
\begin{aligned}
H(\mathbb{P}_{[0,t]}, \mathbb{P}^-_{[0,t]}) &= E^{\mathbb{P}}\left[\log \frac{\pi_0 q_{\xi_0,\xi_{T_1}}}{\pi_{\xi_{T_1}} q_{\xi_{T_1},\xi_{T_0}}} \middle| n_t = 1\right] \mathbb{P}(n_t = 1) + O(t^2) \\
&= \sum_{\substack{i,j\in S\\ i\neq j}} E^{\mathbb{P}}\left[\log \frac{\pi_0 q_{\xi_0,\xi_{T_1}}}{\pi_{\xi_{T_1}} q_{\xi_{T_1},\xi_{T_0}}} \middle| n_t = 1, \xi_0 = i, \xi_{T_1} = j\right] \mathbb{P}(n_t = 1, \xi_0 = i, \xi_{T_1} = j) \\
&+ O(t^2) \\
&= \sum_{\substack{i,j\in S\\ i\neq j}} \log \frac{\pi_i q_{i,j}}{\pi_j q_{j,i}} \mathbb{P}(A_{i,j}(t)) + O(t^2) \\
&= \sum_{\substack{i,j\in S\\ i\neq j}} \log \frac{\pi_i q_{i,j}}{\pi_j q_{j,i}} \int_0^t \int_{t-s_1}^{\infty} \pi_i q_{i,j} q_j e^{-q_i s_1} e^{-q_j s_2} ds_2 ds_1 + O(t^2) \\
&= \sum_{\substack{i,j\in S\\ i\neq j}} \pi_i q_{i,j} \log \frac{\pi_i q_{i,j}}{\pi_j q_{j,i}} e^{-q_j t} \int_0^t e^{(q_j - q_i)s_1} ds_1 + O(t^2) \\
&= \sum_{\substack{i,j\in S\\ i\neq j}} \pi_i q_{i,j} \log \frac{\pi_i q_{i,j}}{\pi_j q_{j,i}} \frac{1}{q_j - q_i}(e^{-q_i t} - e^{-q_j t}) + O(t^2).
\end{aligned}
$$

Y usando L'Hopital en el siguiente límite

$$
\frac{1}{q_j - q_i} \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-q_i t} - e^{-q_j t}}{t} = \frac{1}{q_j - q_i} \lim_{t\to 0^+} -q_i e^{-q_i t} + q_j e^{-q_j t} = 1
$$

concluímos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} \frac{H(\mathbb{P}_{[0,t]}, \mathbb{P}^-_{[0,t]})}{t} &= \sum_{i,j\in S} \pi_i q_{i,j} \log \frac{\pi_i q_{i,j}}{\pi_j q_{j,i}} \frac{1}{q_j - q_i} \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-q_i t} - e^{-q_j t}}{t} \\
&+ \lim_{t\to 0^+} \frac{O(t^2)}{t} \\
&= \sum_{i,j\in S} \pi_i q_{i,j} \log \frac{\pi_i q_{i,j}}{\pi_j q_{j,i}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j\in S} (\pi_i q_{i,j} - \pi_j q_{j,i}) \log \frac{\pi_i q_{i,j}}{\pi_j q_{j,i}}.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 3.3.12. *Si ξ es una cadena de Markov estacionaria con generador $Q = (q_{i,j})_{i,j\in S}$, irreducible con espacio de estados S finito, y con distribución estacionaria $\Pi = (\pi_i)_{i\in S}$, entonces su tasa de producción de entropía puede ser expresada en términos de su distribución circulatoria*

$$e_p = \frac{1}{2}\sum_{c\in\mathcal{C}_\infty}(w_c - w_{c_-})\log\frac{w_c}{w_{c_-}}. \tag{3.4}$$

Demostración. Partiendo de (3.3) y usando el Teorema 3.2.7,

$$\begin{aligned}
e_p &= \frac{1}{2}\sum_{i,j\in S}(\pi_i q_{i,j} - \pi_j p_{j,i})\log\frac{\pi_i q_{i,j}}{\pi_j q_{j,i}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j\in S}\sum_{c\in\mathcal{C}_\infty}(w_c - w_{c_-})J_c(i,j)\log\frac{\pi_i q_{i,j}}{\pi_j q_{j,i}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\substack{c\in\mathcal{C}_\infty\\ c=(i_1,\dots,i_s)}}(w_c - w_{c_-})\sum_{k=1}^{s}\log\frac{\pi_{i_k} q_{i_k,i_{k+1}}}{\pi_{i_{k+1}} q_{i_{k+1},i_k}} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{c\in\mathcal{C}_\infty}(w_c - w_{c_-})\log\prod_{k=1}^{s}\frac{\pi_{i_k} q_{i_k,i_{k+1}}}{\pi_{i_{k+1}} q_{i_{k+1},i_k}} \text{ y por la proposición (3.2.4)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{c\in\mathcal{C}_\infty}(w_c - w_{c_-})\log\frac{w_c}{w_{c_-}}.
\end{aligned}$$

□

Los resultados del presente capítulo pueden resumirse en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.13. *Si ξ es una cadena de Markov estacionaria con generador $Q = (q_{i,j})_{i,j\in S}$, irreducible con espacio de estados S finito y distribución estacionaria $\Pi = (\pi_i)_{i\in S}$, entonces son equivalentes:*

1) La cadena de Markov ξ es reversible.

2) La cadena de Markov ξ está en balance detallado, esto es,

$$\pi_i q_{i,j} = \pi_j q_{j,i} \quad \forall i,j\in S$$

3) La cadena de Markov satisface el criterio de Kolmogorov

$$q_{i_1,i_2}q_{i_2,i_3}\cdots q_{i_{s-1},i_s} = q_{i_s,i_{s-1}}\cdots q_{i_3,i_2}q_{i_2,i_1}$$

para cualquier colección finita $\{i_1,\ldots,i_s\}$ de elementos distintos de S.

4) Los elementos de la distribución circulatoria $\{w_c : c\in\mathcal{C}_\infty\}$ satisfacen la condición de simetría

$$w_c = w_{c_-} \quad \forall c\in\mathcal{C}_\infty.$$

5) La tasa de producción de entropía de ξ es cero

$$e_p = 0.$$

Demostración.

Ya sabemos que 1) $\Longleftrightarrow$ 2) $\Longleftrightarrow$ 3). Mientras que 4) $\Longleftrightarrow$ 5) es consecuencia de (3.4). Por último 2) $\Longleftrightarrow$ 5) se sigue de (3.3). □

Ejemplo 3.3.14. *Consideremos la cadena de Markov estacionaria, irreducible ξ sobre el espacio de estados $S=\{0,1,2,3\}$ con generador*

$$Q=\begin{pmatrix} -(q_{0,1}+q_{0,2}) & q_{01} & q_{0,2} & 0\\ q_{1,0} & -(q_{1,0}+q_{1,3}) & 0 & q_{1,3}\\ q_{2,0} & 0 & -(q_{2,0}+q_{2,3}) & q_{2,3}\\ 0 & q_{3,1} & q_{3,2} & -(q_{3,1}+q_{3,2})\end{pmatrix},$$

donde las entradas indicadas son no nulas, y distribución invariante $\Pi=\rho=(\rho_0,\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ calculada en el siguiente capítulo.

Los ciclos que aparecen en casi todas las trayectorias son

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\infty = \{&(0,1,2,3),(0,1,3,2),(0,2,1,3),(0,2,3,1),(0,3,1,2),(0,3,2,1),\\ &(0,1,2),(0,2,1),(0,1,3),(0,3,1),(1,2,3),(1,3,2),(0,2,3),\\ &(0,3,2),(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}.\end{aligned}$$

Sabemos que los ciclos que contribuyen son aquellos de longitud 3 ó más, pues si $c=(i_1,i_2)$ entonces $c_-=(i_2,i_1)$, es decir, c y c_- son equivalentes en $\mathcal{C}_\infty$ al ser c_- una permutación cíclica de c y con ello $w_c=w_{c_-}$.

Calculando los pesos vemos que todos ellos se anulan excepto los correspondientes a los ciclos $\{(0,1,3,2),(0,2,3,1)\}$, de modo que en este ejemplo la tasa de producción de entropía es

$$\begin{aligned} e_p &= (w_{(0,2,3,1)} - w_{(0,1,3,2)}) \log \frac{w_{(0,2,3,1)}}{w_{(0,1,3,2)}} \\ &= -\frac{q_{0,2}q_{2,3}q_{3,1}q_{1,0} - q_{0,1}q_{1,3}q_{3,2}q_{2,0}}{\sum_{j=0}^{3} \tilde{D}(\{j\}^c)} \log \frac{q_{0,2}q_{2,3}q_{3,1}q_{1,0}}{q_{0,1}q_{1,3}q_{3,2}q_{2,0}}. \end{aligned}$$

Y la cadena ξ *es reversible si y sólo si* $q_{0,2}q_{2,3}q_{3,1}q_{1,0} = q_{0,1}q_{1,3}q_{3,2}q_{2,0}$.

Capítulo 4

Una cadena de espines cuánticos

4.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos los estados invariantes de una cadena de espines cuánticos cuya evolución se describe por un semigrupo cuántico de Markov. Esta cadena es un caso particular de una familia de sistemas cuánticos abiertos fuera de equilibrio que se estudian en la referencia [1]. El generador infinitesimal del semigrupo cuántico cuya forma general es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_*(\rho) &= \Phi_*(\rho) - G\rho - \rho G^*, \\
\Phi_*(\rho) &= \sum_{i=1}^{n} K_i \rho K_i^*, \\
G &= \frac{1}{2}\Phi_*(I) - i\Delta, \quad \Delta \text{ autoadjunto,}
\end{aligned}$$

está definido sobre el espacio de matrices complejas 4×4, $M_{4\times 4}(\mathbb{C})$, es decir, en el espacio de operadores sobre el espacio de Hilbert $\mathbb{C}^4$. Explícitamente para $\rho \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_*(\rho) = &- i[\Delta,\rho] \\
&- \sum_{\substack{\{0\le l,m\le 3:\\ \epsilon_m-\epsilon_l>0\}}} \Big(q_{ml}\big(\frac{1}{2}\{E^*_{ml}E_{ml},\rho\} - E_{ml}\rho E^*_{ml}\big) \\
&+ q_{lm}\big(\frac{1}{2}\{E_{ml}E^*_{ml},\rho\} - E^*_{ml}\rho E_{ml}\big)\Big),
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

donde q_{ml}, q_{lm} son constantes positivas,

$$
E_{ml} = |\epsilon_l\rangle\langle\epsilon_m| \tag{4.2}
$$

$$
\Delta = i\sum_{\omega\in F}\Big(I_{ml}E^*_{ml}E_{ml} - I_{lm}E_{ml}E^*_{ml}\Big), \tag{4.3}
$$

con I_{ml}, I_{lm} constantes reales y $\{|\epsilon_r\rangle : 0 \le r \le 3\}$ la base ortonormal de $\mathbb{C}^4$ cuyas coordenas en la base

$$
\{e_1 = (0,0,0,1), e_2 = (0,0,1,0), e_3 = (0,1,0,0), e_4 = (1,0,0,0)\},
$$

son

$$
\begin{aligned}
|\epsilon_0\rangle &= c_0^{-\frac{1}{2}}\Big(0,2,(\lambda_1-\lambda_2) - \sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)^2+4},0\Big),\\
|\epsilon_1\rangle &= c_1^{-\frac{1}{2}}\Big(2\gamma,0,0,(\lambda_1+\lambda_2) - \sqrt{(\lambda_1+\lambda_2)^2+4\gamma^2}\Big),\\
|\epsilon_2\rangle &= c_2^{-\frac{1}{2}}\Big(2\gamma,0,0,(\lambda_1+\lambda_2) + \sqrt{(\lambda_1+\lambda_2)^2+4\gamma^2}\Big),\\
|\epsilon_3\rangle &= c_3^{-\frac{1}{2}}\Big(0,2,(\lambda_1-\lambda_2) + \sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)^2+4},0\Big),
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

con

$$
\begin{aligned}
c_0 &= c_0(\lambda_1,\lambda_2) = 4 + \big((\lambda_1-\lambda_2) - \sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)^2+4}\,\big)^2,\\
c_1 &= c_1(\lambda_1,\lambda_2) = 4\gamma^2 + \big((\lambda_1+\lambda_2) - \sqrt{(\lambda_1+\lambda_2)^2+4\gamma^2}\,\big)^2,\\
c_2 &= c_2(\lambda_1,\lambda_2) = 4\gamma^2 + \big((\lambda_1+\lambda_2) + \sqrt{(\lambda_1+\lambda_2)^2+4\gamma^2}\,\big)^2,\\
c_3 &= c_3(\lambda_1,\lambda_2) = 4 + \big((\lambda_1-\lambda_2) + \sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)^2+4}\,\big)^2,
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

y $\epsilon_0 = -\sqrt{(\lambda_1-\lambda_2)^2+4}$, $\epsilon_1 = -\sqrt{(\lambda_1+\lambda_2)^2+4\gamma^2}$, $\epsilon_2 = -\epsilon_1$, $\epsilon_3 = -\epsilon_0$, con λ_1, λ_2 y $\gamma \neq 0$ números reales tales que $\lambda_1\lambda_2 < 1-\gamma^2$. Obsérvese que $\epsilon_0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$.

Los valores de las constantes q_{ml}, q_{lm} están dados por

$$\begin{aligned}
q_{10} &= 4\pi^2\frac{(c_1-4\gamma^2)}{c_0c_1}\omega_1 e^{-\omega_1}\Big(4\frac{e^{\beta_1\omega_1}}{e^{\beta_1\omega_1}-1}+(c_0-4)^2\frac{e^{\beta_2\omega_1}}{e^{\beta_2\omega_1}-1}\Big),\\
q_{01} &= 4\pi^2\frac{(c_1-4\gamma^2)}{c_0c_1}\omega_1 e^{-\omega_1}\Big(\frac{4}{e^{\beta_1\omega_1}-1}+\frac{(c_0-4)^2}{e^{\beta_2\omega_1}-1}\Big),\\
q_{20} &= 8\pi^2\frac{(c_2-4\gamma^2)^2}{c_0c_2}\omega_2 e^{-\omega_2}\Big(4\frac{e^{\beta_1\omega_2}}{e^{\beta_1\omega_2}-1}+(c_0-4)^2\frac{e^{\beta_2\omega_2}}{e^{\beta_2\omega_2}-1}\Big),\\
q_{02} &= 8\pi^2\frac{(c_2-4\gamma^2)^2}{c_0c_2}\omega_2 e^{-\omega_2}\Big(\frac{4}{e^{\beta_1\omega_2}-1}+\frac{(c_0-4)^2}{e^{\beta_2\omega_2}-1}\Big),\\
q_{31} &= 8\pi^2\frac{4\gamma^2}{c_1c_3}\omega_2 e^{-\omega_2}\Big((c_3-4)^2\frac{e^{\beta_1\omega_2}}{e^{\beta_1\omega_2}-1}+4\frac{e^{\beta_2\omega_2}}{e^{\beta_2\omega_2}-1}\Big),\\
q_{13} &= 8\pi^2\frac{4\gamma^2}{c_1c_3}\omega_2 e^{-\omega_2}\Big(\frac{(c_3-4)^2}{e^{\beta_1\omega_2 -1}}+\frac{4}{e^{\beta_2\omega_2}-1}\Big),\\
q_{32} &= 8\pi^2\frac{1}{c_2c_3}\omega_1 e^{-\omega_1}\Big((c_3-4)^2\frac{e^{\beta_1\omega_1}}{e^{\beta_1\omega_1}-1}+16\gamma^2\frac{e^{\beta_2\omega_1}}{e^{\beta_2\omega_1}-1}\Big),\\
q_{23} &= 8\pi^2\frac{1}{c_2c_3}\omega_1 e^{-\omega_1}\Big(\frac{(c_3-4)^2}{e^{\beta_1\omega_1}-1}+\frac{16\gamma^2}{e^{\beta_2\omega_1}-1}\Big).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Y todas las demás $q'_{ml}s$ son cero. Aquí, β_1, β_2 son dos constantes positivas y $\omega_1 = \epsilon_1 - \epsilon_0$, $\omega_2 = \epsilon_2 - \epsilon_0$.

La evolución de la cadena de espines está gobernada por la ecuación maestra

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \mathcal{L}_*\big(\rho(t)\big), \tag{4.7}$$

$$\rho(0) = \rho. \tag{4.8}$$

Es decir, $\rho(t) = \mathcal{T}_{*,t}(\rho)$ donde $(\mathcal{T}_{*,t})_{t\geq t}$ es el semigrupo cuántico de Markov generado por $\mathcal{L}_*$.

4.2 Estados invariantes y producción de entropía

Definición 4.2.1. *Un estado ρ es invariante para el semigrupo si y sólo si $\mathcal{T}_{*,t}(\rho) = \rho$, equivalentemente, $\mathcal{L}_*(\rho) = 0$.*

La restricción del generador $\mathcal{L}_*$ a una subálgebra conmutativa de $\mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{C})$ coincide con el generador de una cadena de Markov clásica. En nuestro caso, restringiremos $\mathcal{L}_*$ a la subálgebra diagonal de $\mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{C})$ en la base $\{|\epsilon_r\rangle : r = 0,1,2,3\}$ y buscaremos estados invariantes diagonales en esta base. Supongamos que $\rho = \sum_r \rho_r|\epsilon_r\rangle\langle\epsilon_r|$ es un estado invariante, entonces después de algunos cálculos usando (4.1) y las relaciones

$$E_{ml}\rho E^*_{ml} =|\epsilon_l\rangle\langle\epsilon_m|\rho|\epsilon_m\rangle\langle\epsilon_l| = \rho_m|\epsilon_l\rangle\langle\epsilon_l|, \tag{4.9}$$
$$E^*_{ml}\rho E_{ml} =|\epsilon_m\rangle\langle\epsilon_l|\rho|\epsilon_l\rangle\langle\epsilon_m| = \rho_l|\epsilon_m\rangle\langle\epsilon_m|, \tag{4.10}$$
$$E_{ml}E^*_{ml}\rho =|\epsilon_l\rangle\langle\epsilon_l|\rho = \rho_l|\epsilon_l\rangle\langle\epsilon_l| = \rho E_{ml}E^*_{ml}, \tag{4.11}$$
$$E^*_{ml}E_{ml}\rho =|\epsilon_m\rangle\langle\epsilon_m|\rho = \rho_m|\epsilon_m\rangle\langle\epsilon_m| = \rho E^*_{ml}E_{ml}, \tag{4.12}$$

obtenemos que

$$\mathcal{L}_*(\rho) \tag{4.13}$$
$$= -\sum_{\substack{\{0\le l,m\le 3:\\ \epsilon_m-\epsilon_l>0\}}} q_{ml}\big(\rho_m|\epsilon_m\rangle\langle\epsilon_m| - \rho_m|\epsilon_l\rangle\langle\epsilon_l|\big) + q_{lm}\big(\rho_l|\epsilon_l\rangle\langle\epsilon_l| - \rho_l|\epsilon_m\rangle\langle\epsilon_m|\big) \tag{4.14}$$
$$= -\sum_{\substack{\{0\le l,m\le 3:\\ \epsilon_m-\epsilon_l>0\}}} J_{ml}|\epsilon_m\rangle\langle\epsilon_m| + J_{lm}|\epsilon_l\rangle\langle\epsilon_l|, \tag{4.15}$$

donde $J_{ml} = \rho_m q_{ml} - \rho_l q_{lm}$ y $J_{lm} = -J_{ml}$. Consecuentemente $\mathcal{L}_*(\rho) = 0$ si y sólo si, $\rho Q = 0$ donde Q es la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} -(q_{0,1}+q_{0,2}) & q_{01} & q_{0,2} & 0 \\ q_{1,0} & -(q_{1,0}+q_{1,3}) & 0 & q_{1,3} \\ q_{2,0} & 0 & -(q_{2,0}+q_{2,3}) & q_{2,3} \\ 0 & q_{3,1} & q_{3,2} & -(q_{3,1}+q_{3,2}) \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que Q es una Q-matriz, es decir, es el generador de una cadena de Markov finita. De hecho, Q es la Q-matriz de la cadena de Markov en el Ejemplo 3.3.14. Entonces para calcular los estados invariantes podemos usar las fórmulas de los Qian del capítulo anterior.

De acuerdo con la Proposición 3.1.3

$$\rho_0 = \frac{\tilde{D}(\{0\}^c)}{\sum_{j=0}^{3} \tilde{D}(\{j\}^c)} = \frac{q_{1,3}q_{2,0}q_{3,2} + q_{1,0}q_{2,3}q_{3,1} + q_{1,0}q_{2,0}q_{3,1} + q_{1,0}q_{2,0}q_{3,2}}{-\sum_{j=0}^{3} \tilde{D}(\{j\}^c)}$$

$$\rho_1 = \frac{\tilde{D}(\{1\}^c)}{\sum_{j=0}^{3} \tilde{D}(\{j\}^c)} = \frac{q_{0,2}q_{2,3}q_{3,1} + q_{0,1}q_{2,3}q_{3,1} + q_{0,1}q_{2,0}q_{3,1} + q_{0,1}q_{2,0}q_{3,2}}{-\sum_{j=0}^{3} \tilde{D}(\{j\}^c)}$$

$$\rho_2 = \frac{\tilde{D}(\{2\}^c)}{\sum_{j=0}^{3} \tilde{D}(\{j\}^c)} = \frac{q_{0,1}q_{1,3}q_{3,2} + q_{0,2}q_{1,3}q_{3,2} + q_{0,2}q_{1,0}q_{3,1} + q_{0,2}q_{1,0}q_{3,2}}{-\sum_{j=0}^{3} \tilde{D}(\{j\}^c)}$$

$$\rho_3 = \frac{\tilde{D}(\{3\}^c)}{\sum_{j=0}^{3} \tilde{D}(\{j\}^c)} = \frac{q_{0,2}q_{1,0}q_{2,3} + q_{0,2}q_{1,3}q_{2,3} + q_{0,1}q_{1,2}q_{2,0} + q_{0,1}q_{1,3}q_{2,3}}{-\sum_{j=0}^{3} \tilde{D}(\{j\}^c)}$$

Como ya hemos visto en el capítulo anterior, la tasa de producción de entropía está dada por

$$\begin{aligned} e_p &= (w_{(0,2,3,1)} - w_{(0,1,3,2)}) \log \frac{w_{(0,2,3,1)}}{w_{(0,1,3,2)}} \\ &= -\frac{q_{0,2}q_{2,3}q_{3,1}q_{1,0} - q_{0,1}q_{1,3}q_{3,2}q_{2,0}}{\sum_{j=0}^{3} \tilde{D}(\{j\}^c)} \log \frac{q_{0,2}q_{2,3}q_{3,1}q_{1,0}}{q_{0,1}q_{1,3}q_{3,2}q_{2,0}}. \end{aligned}$$

Y es no nula si y sólo si la condición de Kolmogorov no se cumple en el ciclo $(0, 2, 3, 1)$, i.e.,

$$q_{0,2}q_{2,3}q_{3,1}q_{1,0} \neq q_{0,1}q_{1,3}q_{3,2}q_{2,0}. \tag{4.16}$$

En el siguiente teorema damos una condición necesaria y suficiente para que esto ocurra.

Teorema 4.2.2. *La condición de reversibilidad de Kolmogorov se cumple para el ciclo* $(0, 2, 3, 1)$*, i.e.,* $q_{0,2}q_{2,3}q_{3,1}q_{1,0} = q_{0,1}q_{1,3}q_{3,2}q_{2,0}$ *si y sólo si* $\beta_1 = \beta_2$*.*

Demostración. Un cálculo directo usando las relaciones (4.6) nos permite ver que

$$q_{02}q_{23}q_{31}q_{10} = q_{01}q_{13}q_{32}q_{20},$$

para todos los valores de $\omega_1,\ \omega_2$, si y sólo si

$$\frac{f(\omega_2)}{h(\omega_2)} = \frac{f(\omega_1)}{g(\omega_1)}. \tag{4.17}$$

Donde

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{4(e^{\beta_2\omega}-1)+(c_0-4)^2e^{(\beta_2-\beta_1)\omega}(e^{\beta_1\omega}-1)}{4(e^{\beta_2\omega}-1)+(c_0-4)^2(e^{\beta_1\omega}-1)}, \\ g(\omega) &= \frac{(c_3-4)^2(e^{\beta_2\omega}-1)+16\gamma^2e^{(\beta_2-\beta_1)\omega}(e^{\beta_1\omega}-1)}{(c_3-4)^2(e^{\beta_2\omega}-1)+16\gamma^2(e^{\beta_1\omega}-1)}, \\ h(\omega) &= \frac{(c_3-4)^2(e^{\beta_2\omega}-1)+4e^{(\beta_2-\beta_1)\omega}(e^{\beta_1\omega}-1)}{(c_3-4)^2(e^{\beta_2\omega}-1)+4(e^{\beta_1\omega}-1)}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Si $\beta_1 = \beta_2$, entonces $f(\omega) = g(\omega) = h(\omega) = 1$ y (4.17) se cumple para todos los valores de ω_1, ω_2.

Reciprocamente, si $\beta_1 \neq \beta_2$, digamos $\beta_2 > \beta_1$, entonces cuando $\lambda_1,\ \lambda_2 \to 0$ y $\gamma \to 1$ tenemos que $\omega_1 \to 0$ y $\omega_2 \to 4$ por lo tanto, $\frac{f(\omega_1)}{g(\omega_1)} \to 1$, pero $\frac{f(\omega_2)}{h(\omega_2)}$ se aproxima al valor

$$1 + (e^{4(\beta_2-\beta_1)}-1)\left(\frac{\frac{e^{4\beta_1}-1}{e^{4\beta_2}-1}}{4+16\frac{e^{4\beta_1}-1}{e^{4\beta_2}-1}}\right) > 1.$$

Consecuentemente (4.17) no se cumple para todos los valores de $\omega_1,\ \omega_2$. Esto termina la demostración. □

La importancia de este ejemplo en particular, radica en la simpleza para calcular tanto el estado invariante como la tasa de producción de entropía, puesto que en la gran diversidad de ejemplos que se encuentran en la literatura, es necesaria la ayuda de una computadora para realizar los cálculos antes mencionados. La teoría de descomposición en ciclos de Kalpazidou-Qian expuesta en los primeros capítulos, da un marco teórico para nuestro ejemplo y facilita la obtención de los resultados.

Apéndice A

Dinámica de sistemas cuánticos abiertos

Un sistema cuántico abierto es un sistema cuántico que interacciona con un sistema cuántico externo, el ambiente, por lo tanto está conectado correlacionalmente con factores externos a él.

La dinámica de los estados en un sistema cuántico abierto se describe mediante un semigrupo de tranformaciones completamente positivas que preservan la traza $(\mathcal{T}_{*t})_{t\geq 0}$ del espacio $L_1(\mathcal{H})$, de los operadores de traza finita sobre $\mathcal{H}$, en si mismo. De manera que un estado inicial ρ es enviado por este semigrupo en un estado ρ_t al tiempo t: $\rho_t = \mathcal{T}_{*t}(\rho)$. La familia de estados $(\rho_t)_{t\geq 0}$ es la solución de la ecuación maestra

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_t}{dt} &= \mathcal{L}_*(\rho_t), \\ \rho_0 &= \rho, \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde ρ es un estado inicial y $\mathcal{L}_*$ es un operador, no necesariamente acotado, del espacio $L_1(\mathcal{H})$ en si mismo, al que se le llama *generador de Lindblad y Gorini-Kossakowski-Sudarshan* (LGKS) en su representación predual.

El Teorema de Schatten, véase [22], establece un isomorfismo isométrico entre $L_1(\mathcal{H})^*$, el dual de $L_1(\mathcal{H})$, y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Así, para cada funcional lineal continuo f sobre $L_1(\mathcal{H})$ existe un elemento $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $f(\rho) = \mathrm{tr}(x\rho)$ para todo $\rho \in L_1(\mathcal{H})$. Entonces para cada $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y cada $t \geq 0$ el funcional $f(x,t)(\rho) = \mathrm{tr}\Big(x\mathcal{T}_{*t}(\rho)\Big)$ tiene asociado un elemento $\mathcal{T}_t(x) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$f(x,t)(\rho) = \mathrm{tr}\Big(x\mathcal{T}_{*t}(\rho)\Big) = \mathrm{tr}\Big(\mathcal{T}_t(x)\rho\Big).$$

Para cada t la aplicación $x \to \mathcal{T}_t(x)$ es completamente positiva y la familia $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ define un semigrupo sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que preserva la identidad. Si $\mathcal{L}$ es el generador de este semigrupo entonces se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{T}_t(x)}{dt} &= \mathcal{L}(\mathcal{T}_t(x)), \\ \mathcal{T}_0(x) &= x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Esta es una ecuación de evolución en el álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que gobierna la evolución de las observables del sistema cuántico abierto.

Consideremos el caso de dimensión finita, $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ el espacio de vectores complejos de longitud N y $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$ es el espacio de matrices complejas de $N \times N$. Al conjunto de estados o matrices de densidad (i.e., el conjunto de operadores positivos sobre $\mathcal{H}$ de traza uno) lo denotamos por $\mathcal{D}(\mathcal{H})$, claramente $\mathcal{D}(\mathcal{H}) \subset L_1(\mathcal{H})$.

En dimensión finita cualquier transformación completamente positiva que preserva la traza tiene la forma de Kraus, véase el Teorema 11.24 de [7], es decir, es de la forma

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} K_i^* x K_i \tag{A.3}$$

donde los K_i son operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisfacen la condición

$$\sum_{i=1}^{n} K_i^* K_i = I. \tag{A.4}$$

Esta representación no es única.

Definición A.0.3. *Un semigrupo cuántico de Markov uniformemente continuo sobre el álgebra de von Neumann $\mathcal{M}_N$, es una familia $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores acotados sobre $\mathcal{M}_N$ tal que*

1. $T(0) = I$
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$
3. $T(t)(\mathbb{1}) = \mathbb{1},\ \forall\, t \geq 0$
4. *Para cada $t \geq 0$, $T(t)$ es una transformación completamente positiva.*

5. *(Continuidad uniforme)*

$$\lim_{t\to 0^+} \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(t)x - x\| = 0.$$

Denotaremos por T^* al operador adjunto de T, es decir, T^* es el único operador que satisface $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ para toda $x, y \in \mathcal{H}$, donde $\langle \cdot, \cdot\rangle$ denota el producto interno en $\mathcal{H}$.

Sea un grupo uniformemente continuo $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ sobre $\mathcal{H}$ con generador A, esto es

$$T(t) = e^{tA}, \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Puesto que la aplicación $T \longmapsto T^*$ es continua en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el grupo adjunto $\{T(t)^*\}_{t\in\mathbb{R}}$ también es uniformemente continuo y

$$T(t)^* = e^{tA^*}, \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Los grupos para los cuales todos los operadores $T(t)$ son unitarios, es decir, aquellos para los cuales se cumple que $T(t)^*T(t) = I$, son particularmenete importantes y se pueden caracterizar de la siguiente manera.

Proposición A.0.4. *El grupo $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ es unitario si y sólo si A es sesquiadjunto, i.e., $A = -A^*$*

Demostración. $\Rightarrow$ Supongamos que el grupo $\{e^{tA}\}$ es unitario. Sean $x, y \in \mathcal{H}$, entonces

$$\begin{aligned}\langle e^{tA}x, y\rangle = \langle x, (e^{tA})^*y\rangle &= \left\langle x, \lim_n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{t^kA^k}{k!}\right)^* y\right\rangle \\ &= \left\langle x, \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k(A^*)^k}{k!} y\right\rangle = \langle x, e^{tA^*}y\rangle.\end{aligned}$$

Hemos usado que el producto interno es continuo en cada coordenada. De lo anterior tenemos que

$$\langle x, ((e^{tA})^* - e^{tA^*})y\rangle = 0, \ \ \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Y esto demuestra que $e^{tA^*} = \left(e^{tA}\right)^*$.

Como el grupo es de operadores unitarios tenemos que $\left(e^{tA}\right)^{*} e^{tA} = e^{tA}\left(e^{tA}\right)^{*} = I$, entonces

$$e^{tA^*} = \left(e^{tA}\right)^* = (e^{tA})^{-1} = e^{-tA} = e^{t(-A)}.$$

Recordando que un semigrupo está determinado de manera única por su generador, podemos concluir que $A^* = -A$.

$\Leftarrow$

Si A es sesquiadjunto, entonces los grupos $\{e^{tA^*}\}_{t\in\mathbb{R}}$ y $\{e^{-tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ coinciden, esto implica que

$$(e^{tA})^{-1} = e^{-tA} = e^{tA^*} = (e^{tA})^* \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$ es unitario. $\square$

Definición A.0.5. *Para cada $t \in \mathbb{R}$ se define el operador de implementación $\mathcal{T}(t) : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ asociado a un grupo unitario $(e^{tA})_{t\in\mathbb{R}}$ está definido como*

$$\mathcal{T}(t)T := e^{tA}Te^{tA^*}, \;\; \forall\, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Lema A.0.6. *Cada operador de implementación $\mathcal{T}(t)$ es un automorfismo sobre el *-álgebra de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Demostración. Sean T y S operadores y $\lambda \in \mathbb{C}$

(i)

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(t)(\lambda T + S) =& e^{tA}(\lambda T + S)e^{tA^*} = (\lambda e^{tA}T + e^{tA}S)e^{tA^*}\\ =&\lambda(e^{tA}Te^{tA^*}) + (e^{tA}Se^{tA^*}) = \lambda\mathcal{T}(t)T + \mathcal{T}(t)S,\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(t)(T^*) \;\;&= e^{tA}(T^*)e^{tA^*} = (e^{tA^*})^*(e^{tA}T)^*\\ &= (e^{tA}Te^{tA^*})^* = (\mathcal{T}(t)T)^*,\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(t)(T\,S) =& e^{tA}(T\,S)e^{tA^*} = e^{tA}Te^{-tA}e^{tA}Se^{tA^*}\\ =& e^{tA}Te^{tA^*}e^{tA}Se^{tA^*} = \mathcal{T}(t)T\,\mathcal{T}(t)S.\end{aligned}$$

Lema A.0.7. *La familia de operadores implementados* $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *asociados a un semigrupo unitario* $(e^{tA})_{t\in\mathbb{R}}$ *es un grupo de operadores uniformemente continuo sobre* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Demostración.

(i)

$$\mathcal{T}(0) = e^{0A}e^{0A^*} = I,$$

(ii)

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(t+s) =& e^{(t+s)A}e^{(t+s)A^*} = e^{tA+sA+tA^*+sA^*}\\ =& e^{tA+tA^*}e^{sA+sA^*} = \mathcal{T}(t)\mathcal{T}(s).\end{aligned}$$

Es claro que es uniformemente continuo pues $\lim_{t\downarrow 0}\|e^{tA}e^{tA^*} - I\| = 0$. □

Como consecuencia del lema anterior existe un operador $B : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$\mathcal{T}(t) = e^{tB} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Derivando la aplicación $\quad t \longmapsto e^{tA}Te^{tA^*}$ en $t = 0$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\,\mathcal{T}(t)T}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} &= Ae^{tA}(Te^{tA^*}) + e^{tA}TA^*e^{tA^*}\Big|_{t=0}\\ &= AT + TA^* = AT - TA.\end{aligned}$$

Esto demuestra lo siguiente.

Proposición A.0.8. *El grupo uniformemente continuo* $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *de automorfismos sobre* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$*, implementado por el grupo unitario* $\{e^{tA}\}_{t\in\mathbb{R}}$*, está generado por el operador* $\mathcal{L}$ *definido mediante*

$$\mathcal{L}(T) = AT - TA \qquad \forall\, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Ejemplo A.0.9. *El grupo implementado* $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ *sobre* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *asociado a un grupo unitario* $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *sobre* $\mathcal{H}$ *es un semigrupo cuántico de Markov uniformemente continuo si el grupo es uniformemente continuo. Nótese en particular que, como cada* $\mathcal{T}(t)$ *tiene la forma de Kraus, entonces* $(\mathcal{T}(t))_{t\geq 0}$ *consta de transformaciones completamente positivas.*

Otros ejemplos de semigrupos cuánticos de Markov uniformemente continuos se pueden encontrar en [5], [9]. El siguiente teorema caracteriza al generador infinitesimal de un semigrupo cuántico de Markov uniformemente continuo, ver [17],[18].

Teorema A.0.10. *Un operador lineal acotado $\mathcal{L}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ en si mismo es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo si y sólo si existe una transformación completamente positiva Φ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ en si mismo $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y un operador $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que*

$$\mathcal{L}(x) = \Phi(x) - G^* x - xG, \quad \forall x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad y$$

$$G + G^* \leq \mathcal{L}(\mathbb{1}).$$

El generador del semigrupo predual y $\mathcal{L}$ satisfacen la misma relación de dualidad que los semigrupos, es decir, $\mathrm{tr}\Big(x\mathcal{L}_*(\rho)\Big) = \mathrm{tr}\Big(\mathcal{L}(x)\rho\Big)$.

Consecuentemente $\mathcal{L}_*$ tiene la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_*(\rho) &= \Phi_*(\rho) - G\rho - \rho G^*, \\
\Phi_*(\rho) &= \sum_{i=1}^{n} K_i \rho K_i^*,
\end{aligned}$$

donde Φ_* es un elemento de $L_1(\mathcal{H})^*$ completamente positivo. En el caso $\Phi_* \equiv 0$ la ecuación maestra (A.1) se reduce a la ecuación de Schrödinger en la representación de Heisenberg.

Apéndice B

Cadenas de Markov

Aquí se presentan las definiciones básicas y los resultados más importantes usados en la exposición del texto sin demostración. Para mayor referencia consultar [20]. Siempre se denotará por ξ a una cadena de Markov discreta ó continua sobre un espacio de estados finito S con matriz de transición $P(t) = (p_{i,j}(t))_{i,j \in S}$ ó matriz de intensidades de transición (generador, ó Q-matriz) Q respectivamente.

Las siguientes definiciones son análogas en el caso discreto.

Definición B.0.11. *Le llamamos distribución invariante de ξ a un vector Π con entradas no negativas que satisface*

i) $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$

ii) $\pi_j = \sum_{j \in S} \pi_i p_{i,j}(t).$

Definición B.0.12. *A una cadena de Markov ξ con distribución invariante Π le llamamos cadena de Markov estacionaria si $\mathbb{P}(\xi_0(\omega) = i) = \pi_i$ para todo $i \in S$. Es decir, si su distribución inicial es la distribución invariante.*

Definición B.0.13. *A una cadena de Markov ξ le llamamos irreducible si para cualquier par de estados distintos $i, j \in S$ existen $j_1, \ldots, j_r \in S$ tales que $p_{i,j_1} p_{j_2,j_3} \ldots p_{j_{r-1},j_r} p_{j_r,j} > 0$.*

Definición B.0.14. *A una cadena de Markov ξ con espacio de estados finitos S le llamamos positiva recurrente si*

$$\mathbb{P}(\tau(i) < \infty) = 1 \quad \forall i \in S$$

donde $\tau(i) = \min\{n > 0 : \xi_0 = i, \xi_n = i\}$ *es el tiempo de primer regreso al estado* i*.*

Teorema B.0.15. *En una cadena de Markov irreducible* ξ *son equivalentes:*

i) ξ *tiene un estado positivo recurrente*

ii) ξ *es positiva recurremte*

iii) ξ *tiene una distribución invariante*

En particular toda cadena de Markov discreta e irreducible ξ con espacio de estados finito es positiva recurrente pues al ser P estocástica 1 es el valor propios dominante de P y por el teorema B.0.18 de Perron-Frobenius existe un único vector propio Π (salvo múltiplos) asociado a 1, es decir, una distribución invariante de ξ, de donde por el teorema anterior ξ es positiva recurrente.

Teorema B.0.16. *Si* ξ *es una cadena de Markov discreta irreducible, positiva recurrente sobre un espacio de estados finito* S *y distribución invariante* Π*, entonces*

$$\frac{I + P + P^2 + \cdots + P^n}{n+1} \to A$$

donde A *es una matriz con todos sus renglones iguales a* Π*.*

Teorema B.0.17. ***(Ley de los grandes números para cadenas de Markov discretas)****Si* ξ *es una cadena de Markov discreta irreducible, sobre un espacio de estados finito* S *y con distribución invariante* Π*; entonces para cualquer función acotada* $f : S \longrightarrow S$ *y cualquier distribución inicial dada*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) = E^{\Pi} f(\cdot) = \sum_{i \in S} \pi_i f(i).$$

Teorema B.0.18. ***(Teorema de Perron-Frobenius para cadenas de Markov discretas irreducibles)*** *Si* ξ *es una cadena de Markov discreta, irreducible, sobre un espacio de estados finito* S *y con distribución invariante* Π*; entonces*

i) 1 *es el mayor valor propio de* P

ii) El espacio propio asociado a 1 tiene dimensión 1

iii) Para cualquier $i, j \in S$, $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \pi_j$

Definición B.0.19. *Los tiempos de transición de una cadena de Markov a tiempo continuo* ξ *se definen por*

$$\begin{aligned} T_0(\omega) &:= 0 \\ T_1(\omega) &:= \inf\{t > 0 : \xi_t(\omega) \neq \xi_0(\omega)\} \\ T_{k+1}(\omega) &:= \inf\{t > T_k(\omega) : \xi_t(\omega) \neq \xi_{T_k(\omega)}(\omega)\} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Los tiempos de espera son precisamente las diferenicias entre los tiempos de transición, es decir, para toda $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= T_1 - T_2 \\ &\vdots \\ \tau_n &= T_n - T_{n-1} \end{aligned}$$

Proposición B.0.20. *Los tiempos de espera en una cadena de Markov a tiempo continuo se distribuyen exponencialmemte con parámetro* $q_{\xi_{T_{n-1}(\omega)}(\omega)}$.

Apéndice C

Condiciones de Reversibilidad

Los siguientes teoremas son bien conocidos y completan los resultados de los capítulos 2 y 3.

Teorema C.0.21. ***(Reversibilidad $\Leftrightarrow$ Balance detallado)*** *Si ξ es una cadena de Markov discreta estacionaria con matriz de transición $P = (p_{i,j})_{i,j \in S}$, irreducible con espacio de estados S finito y con distribución estacionaria $\Pi = (\pi_i)_{i \in S}$ entonces son equivalentes:*

i) ξ es reversible.

ii) El proceso de Markov está en balance detallado, esto es,

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i} \quad \forall i, j \in S.$$

Demostración. $\Rightarrow$
Como ξ es reversible para cualquier $i, j \in S$

$$\pi_i p_{i,j} = \mathbb{P}(\xi_n(\omega) = i, \xi_{n+1}(\omega) = j) = \mathbb{P}(\xi_n(\omega) = j, \xi_{n+1}(\omega) = i) = \pi_j p_{j,i}$$

$\Leftarrow$ Sean $j_0, \ldots, j_m \in S$ arbitrarios y $T, n \in \mathbb{Z}$. Sea $n\prime \in \mathbb{Z}$ tal que $T = n + n' + m$. Entonces por un lado

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\xi_n(\omega) = j_0, \xi_{n+1}(\omega) = j_1, \ldots, \xi_{n+m}(\omega) = j_m) \\
&= \pi_{j_0} p_{j_0,j_1} p_{j_1,j_2} \ldots p_{j_{m-1},j_m},
\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\xi_{n'}(\omega) = j_0, \xi_{n'+1}(\omega) = j_1, \ldots, \xi_{n'+m}(\omega) = j_m)\\ &= \pi_{j_m} p_{j_m,j_{m-1}} p_{j_{m-1},j_{m-2}} \ldots p_{j_1,j_0}.\end{aligned}$$

Por la condición de balance detallado el lado derecho de las cantidades anteriores son iguales. Es decir, la distribución de $(\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+m})$ es igual a la distribución de $(\xi_{T-n}, \xi_{T-n-1}, \ldots, \xi_{T-n-m)})$, por lo que $(\xi_{m_0}, \xi_{m_1}, \ldots, \xi_{m_k})$ tiene la misma distribución que $(\xi_{T-m_0}, \xi_{T-m_1}, \ldots, \xi_{T-m_k})$ para cualesquiera $m_0, \ldots, m_k, T \in \mathbb{Z}$. □

Teorema C.0.22. ***(Balance detallado ⇔ Criterio de Kolmogorov)***
Si ξ es una cadena de Markov estacionaria con matriz de transición $P = (p_{i,j})_{i,j \in S}$, irreducible con espacio de estados S finito y con distribución estacionaria $\Pi = (\pi_i)_{i \in S}$ entonces son equivalentes:

i) El proceso de Markov está en balance detallado, esto es,

$$\pi_i p_{i,j} = \pi_j p_{j,i} \quad \forall i, j \in S.$$

ii) El proceso de Markov satisface el criterio de Kolmogorov

$$p_{i_1,i_2} p_{i_2,i_3} \cdots p_{i_{s-1},i_s} = p_{i_s,i_{s-1}} \cdots p_{i_3,i_2} p_{i_2,i_1},$$

para cualquier colección finita $\{i_1, \ldots, i_s\}$ de elementos distintos de S.

Demostración. $\Rightarrow$
Esta dirección es trivial pues para cada colección finita de elementos distintos $\{i_1, \ldots, i_s\}$ se tiene que

$$\begin{array}{rcl}\pi_{i_1} p_{i_1,i_2} & = & \pi_{i_2} p_{i_2,i_1}\\ \pi_{i_2} p_{i_2,i_3} & = & \pi_{i_3} p_{i_3,i_2}\\ & \vdots & \\ \pi_{i_s} p_{i_s,i_1} & = & \pi_{i_1} p_{i_1,i_s}\end{array}$$

Multiplicando lo anterior obtenemos que

$$p_{i_1,i_2} p_{i_2,i_3} \cdots p_{i_{s-1},i_s} = p_{i_s,i_{s-1}} \cdots p_{i_3,i_2} p_{i_2,i_1}.$$

$\Leftarrow$ Tomemos i_1 arbitrario y fijo, a manera de estado de referencia en el resto de la prueba. Para cualquier otro $i \in S$, como ξ es irreducible, existe una coleccion finita de estados distintos $\{i_1, \ldots, i_{s-1}, i\}$ cuya trayectoria es posible, es decir, $p_{i_1,i_2} p_{i_2,i_3} \cdots p_{i_{s-1},i} > 0$. Definimos la función

$$\tilde{\pi}_i = B \frac{p_{i_1,i_2} p_{i_2,i_3} \cdots p_{i_{s-1},i}}{p_{i,i_{s-1}} \cdots p_{i_3,i_2} p_{i_2,i_1}}$$

donde $B > 0$.

$\tilde{\pi}$ esta bien definida al no depender de la colección finita de estados, pues si $\{i_1, i'_2, \ldots, i'_{s-1}, i\}$ es otra coleccion con $p_{i_1,i'_2} p_{i'_2,i'_3} \cdots p_{i'_{s-1},i} > 0$, por hipótesis

$$\frac{\tilde{\pi}_i}{B} = \frac{p_{i_1,i_2} p_{i_2,i_3} \cdots p_{i_{s-1},i}}{p_{i,i_{s-1}} \cdots p_{i_3,i_2} p_{i_2,i_1}} = \frac{p_{i_1,i'_2} p_{i'_2,i'_3} \cdots p_{i'_{s-1},i}}{p_{i,i'_{s-1}} \cdots p_{i'_3,i'_2} p_{i'_2,i_1}}.$$

Además para cualquier $i, j \in S$, $p_{i,j} > 0$ se tiene que usando la hípotesis $p_{i,j} = p_{j,i}$

$$\tilde{\pi}_i p_{i,j} = \tilde{\pi}_j p_{j,i}$$

Por último escogemos B de tal modo que $\sum_{i \in S} \tilde{\pi}_i = 1$. Trivialmente vemos que $\tilde{\pi}$ es una distribución invariante para ξ, y por unicidad $\pi = \tilde{\pi}$. De esta forma ξ está en balance detallado. □

Teorema C.0.23. ***(Reversibilidad $\Leftrightarrow$ Balance detallado)*** *Si ξ es una cadena de Markov estacionaria a tiempo continuo con matriz de intensidades de transición $Q = (q_{i,j})_{i,j \in S}$, irreducible con espacio de estados S finito y con distribución estacionaria $\Pi = (\pi_i)_{i \in S}$; entonces son equivalentes:*

i) ξ es reversible.

ii) El proceso de Markov está en balance detallado, esto es,

$$\pi_i q_{i,j} = \pi_j q_{j,i} \quad \forall i, j \in S.$$

Demostración. $\Rightarrow$

Como ξ es reversible para cualquier $i, j \in S$ y toda $t \geq 0$

$$\pi_i \frac{p_{i,j}(t)}{t} = \frac{\mathbb{P}(\xi_s(\omega) = i, \xi_{s+t}(\omega) = j)}{t} = \frac{\mathbb{P}(\xi_s(\omega) = j, \xi_{s+t}(\omega) = i)}{t} = \pi_j \frac{p_{j,i}(t)}{t}$$

Finalmente cuando $t \to 0^+$ obtenemos que $\pi_i q_{i,j} = \pi_j q_{j,i}$.

$\Leftarrow$

Consideremos $A \subset \Omega$ el conjunto de trayectorias en $[-T, T]$ que empiezan en $t = -T$ en algún estado, digamos j_1, y permanecen ahí un tiempo h_1 antes de brincar a otro estado, digamos j_2, permanecen en j_2 un tiempo h_2 antes de llegar a un estado j_3 y así sucesivamente hasta llegar a un estado j_m donde permanecen hasta el tiempo $t = T$ un periodo de tiempo h_m. Sabemos que los tiempos de espera h_l se distribuyen exponencialmente con parámetro j_l, así que

$$\mathbb{P}(A) = \pi_{j_1} q_{j_1,j_2} \cdots q_{j_{m-1},j_m} \int_{\{h_1+\ldots+h_m=2T\}} \prod_{l=1}^{m} e^{-q_{j_l} h_l} d\overline{h}.$$

Por otro lado sea $A^- \subset \Omega$ el conjunto de trayectorias inversas, es decir, aquellas trayectorias que al tiempo $t = -T$ se encuentran en j_m, después de un tiempo h_m brincan al estado j_{m-1}, etc. hasta llegar al estado j_1 donde permanece un tiempo h_1 hasta el tiempo $t = T$.

La condición de balance detallado implica que

$$\pi_{j_1} q_{j_1,j_2} \cdots q_{j_{m-1},j_m} = \pi_{j_m} q_{j_m,j_{m-1}} \cdots q_{j_2,j_1},$$

por tanto $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A^-)$. Esto significa que el comportamiento probabilístico de ξ_t es el mismo que ξ_{-t} en $[-T, T]$. Así $(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_m})$ tiene la misma distribución que $(\xi_{-t_1}, \ldots, \xi_{-t_m})$, pero esta última tiene la misma distribución que $(\xi_{T-t_1}, \ldots, \xi_{T-t_m})$ por la estacionariedad de ξ.

Se concluye que ξ es reversible. $\square$

Teorema C.0.24. ***(Balance detallado $\Leftrightarrow$ Criterio de Kolmogorov)***

Si ξ es una cadena de Markov a tiempo continuo estacionaria, con matriz de intensidades de transición $Q = (q_{i,j})_{i,j \in S}$, irreducible con espacio de estados S finito y con distribución estacionaria $\Pi = (\pi_i)_{i \in S}$; entonces son equivalentes:

i) El proceso de Markov está en balance detallado, esto es,

$$\pi_i q_{i,j} = \pi_j q_{j,i} \quad \forall i, j \in S.$$

ii) El proceso de Markov satisface el criterio de Kolmogorov

$$q_{i_1,i_2} q_{i_2,i_3} \cdots q_{i_{s-1},i_s} = q_{i_s,i_{s-1}} \cdots q_{i_3,i_2} p_{i_2,i_1},$$

para cualquier colección finita $\{i_1, \ldots, i_s\}$ de elementos distintos de S.

Demostración. La demostración es completamente análoga al caso discreto. □

Bibliografía

[1] Accardi L., Fagnola F. and Quezada R., Dynamical detailed balance for non-equilibrium stationary states, en preparación, 2010.

[2] Aschbacher W., Jakšić V., Pautrat Y. and Pillet C.A., Topics in non-equilibrium quantum statistical mechanics, in Open Quantum Systems. III, 1–66, Lecture Notes in Math., 1882, Springer, Berlin, 2006.

[3] Bratteli O., Robinson D.W., Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1, Springer (second edition), 2002.

[4] Breiman L., Probability, Classics in Applied Mathematics, SIAM,1992.

[5] Chebotarev A.M., Lectures on Quantum Probability; SMM Aportaciones Matemáticas (Textos nivel avanzado) 14: México, 2000.

[6] Chung K.L., Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, Grund. Math. Wiss 104, Springer-Verlag, Primera edición 1960.

[7] Petz D., Quantum Information Theory and Quantum Statistics, Theoretical and Mathematical Physics, Springer, 2008.

[8] Einstein A., Ann. Physik 17, 547, 1905; Ann. Physik 19, 371, 1906.

[9] Fagnola F., Quantum Markov semigroups and quantum flows, *Proyecciones* 18, 1-144, 1999.

[10] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications Vol. I, 3rd Ed. ,Wiley, 1968.

[11] Glausdorff Y. and Prigogini I., Thermodinamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations, London, Wiley-Interscience, 1971.

[12] Gorini V., Kossakowski A., Sudarshan E.C.G., Completely positive dynamical semigroups of N-level systems, J. Math. Phys. 17, 821-825, 1976.

[13] Haken H., Synergetics: an Introduction, Non-Equilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry and Biology, Berlin-New York, Springer-Verlag, 1977.

[14] Haken H., Advanced Synergetics: Instability, Hierarchies of Self-Organizing Systems and Devices, Berlin-New York, Springer-Verlag, 1983.

[15] Jakšić V. and Pillet C.A., Non-equilibrium steady states of finite quantum systems coupled to thermal reservoirs, Commun. Math. Phys. 226 (1), 131-162, 2002.

[16] Kalpazidou S.L., Cycle Representations of Markov Processes, Springer, 2006.

[17] Kraus K., General state changes in quantum theory, Ann. Phys. 64, 311-335, 1970.

[18] Lindblad L., On the generators of quantum dynamical semigroups, Commun. Math. Phys. 48, 119-130, 1976.

[19] Nicolis G. and Prigogini I., Self-Organization in Non-Equilibrium Systems: from Dissipative Structures to Order Through Fluctuations, New-York, W.H. Freman, 1989.

[20] Norris J.R., Markov Chains, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics (No. 2), Cambridge University Press, 1997.

[21] Qian M-P., Qian M., Jiang D-J., Mathematical Theory of Nonequilibrium Steady States, Springer, 2003.

[22] Reed M., Simon B., Modern Methods of Mathematical Physics, vol I, Functional Analysis, Academic Press, 1975.

[23] Ruelle D., Entropy production in spin systems, arXiv:math-ph/0006006v1/ 7 jun 2000.

[24] Varadhan S.R.S., Donsker M.D., Assymptotic evaluation of certain markov process expectacions for large time III, Communi. on Pu. and App. Math. Vol. 36, II, 183-212, 1976.

[25] Villani C., H-Theorem and beyond: Boltzman's entropy in today's mathematics, preprint, ENS Lyon (UMR CNRS 5669) & Institute Universitire de France, www.umpa.ens-lyon.fr/ cvillani.

Producción de Entropía en Cadenas de Markov

Tesis que presenta
Jorge Ricardo Bolaños Servín
para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Posgrado en Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana
Iztapalapa

Asesor: Dr. Roberto Quezada Batalla.

Julio 16, 2010