Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS ECONÓMICAS

TESIS QUE PRESENTA
NORMA ROCÍO RAMOS ESCALANTE
PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTORA EN CIENCIAS ECONÓMICAS

OBJETIVOS E INSTRUMENTOS DE POLÍTICA ECONÓMICA. EL TIPO DE CAMBIO COMO INSTRUMENTO DE AJUSTE EN MÉXICO, 1982-1994

DIRECTORES DE LA TESIS

DR. RICHARD N. COOPER
Boas Professor of International Economics
Harvard University

DR. ERNESTO TURNER
Jefe del Departamento de Economía
Unidad Azcapotzalco
Universidad Autónoma Metropolitana

Mayo de 1997

ÍNDICE GENERAL

TOMO I

Pág.

Dedicatorias *vii*

Agradecimientos *viii*

Prólogo 1

LA TEORÍA DE LA POLÍTICA ECONÓMICA: REVISIÓN Y NUEVOS MODELOS 3

Capítulo 1 Objetivos e instrumentos de política económica. Aportaciones teóricas 6

1.1 El principio de Tinbergen 6

1.2 La contribución de Robert Mundell: La asignación de los instrumentos de acuerdo con el principio de clasificación efectiva de mercado 8

1.3 La contribución de William Brainard: Introducción de las incertidumbres multiplicativa y aditiva 14

1.4 Generalización del modelo de Brainard 14

1.4.1 El modelo de M instrumentos y N objetivos 15

1.4.2 El modelo de M instrumentos y un objetivo 20

1.4.3 El modelo de dos instrumentos y un objetivo 22

1.5 William Poole: Interdependencia entre instrumentos de política monetaria 23

1.6 Henderson y Turnovsky: Costos variables derivados del uso de los instrumentos 26

1.7 Generalización de un modelo basado en el de Henderson-Turnovsky: Implicaciones de costos variables crecientes derivados del ajuste de los instrumentos en un marco de M instrumentos y un objetivo 27

1.8 Ali y Greenbaum: Política de estabilización, incertidumbres multiplicativa y aditiva e introducción de costos fijos generados por el uso de los instrumentos 38

Capítulo 2 Desarrollo de nuevos modelos. El modelo general de M instrumentos y N objetivos bajo incertidumbres multiplicativa y aditiva con costos fijos y variables y la introducción de un nuevo elemento: costos de oportunidad crecientes generados por el uso de los instrumentos y el modelo general de M instrumentos y N objetivos con certidumbre, costos de oportunidad crecientes y costos variables y fijos 39

2.1 Modelo I: En un contexto de incertidumbres multiplicativa y aditiva con costos fijos, variables y costos de oportunidad crecientes 40

2.1.1 La solución estacionaria 48

2.1.2 La solución general 50

2.1.3 Análisis de las soluciones 55

2.1.4 Estabilidad e inestabilidad del equilibrio 55

2.1.5 Condiciones para la existencia de raíces características negativas 57

2.1.6 Costos de oportunidad e incertidumbre multiplicativa 58

2.1.7 Independencia de los instrumentos 59

2.2 Modelo II: En un contexto de certidumbre con costos fijos, costos variables y costos de oportunidad crecientes 59

2.2.1 La solución estacionaria 60

2.2.2 Cálculo de soluciones 61

2.3 Certidumbre e incertidumbre: El caso límite 63

Capítulo 3 El principio de la ventaja comparativa en el uso de los instrumentos de política económica 66

Capítulo 4 La contribución de Richard N. Cooper: Análisis de la interdependencia macroeconómica entre economías grandes y de la dependencia macroeconómica de una economía pequeña y abierta con el resto del mundo 71

4.1 Modelos con interdependencia estructural y con interdependencia de políticas y de choques externos 73

4.2 Los intercambios (*trade-offs*) entre objetivos de política macroeconómica y la coordinación de políticas entre países grandes 78

4.3 Dependencia macroeconómica de la economía pequeña y abierta con el resto del mundo 81

4.4 Modelos derivados del modelo de Cooper para una economía pequeña y abierta: Especialización completa en el uso de los instrumentos para lograr los equilibrios externo e interno 86

4.4.1 Modelo I* 86

4.4.2 Modelo II* 87

4.5 La contribución de Aoki: interdependencia macroeconómica entre economías grandes y abiertas. Un análisis dinámico 89

Capítulo 5 Consideraciones adicionales sobre el marco de objetivos e instrumentos 93

Capítulo 6 Verificación empírica: Análisis econométrico de las relaciones entre los instrumentos y objetivos de política económica en varios países 99

Capítulo 7 Conclusiones del Tomo I 103

TOMO II

LOS DESEQUILIBRIOS EXTERNO E INTERNO DE MÉXICO: UN ANÁLISIS ECONOMÉTRICO, 1982-1994 1

Introducción a la parte econométrica 2

Capítulo 1 El desequilibrio externo: ¿En la balanza de reservas o en la de cuenta corriente? 5

Capítulo 2	**El tipo de cambio: ¿Objetivo o instrumento de política económica?**		10
	2.1	El tipo de cambio: ¿Instrumento u objetivo?	10
	2.2	El tipo de cambio: ¿Es un instrumento limitado o un objetivo intermedio?	11
	2.3	El índice del tipo de cambio real	14
Capítulo 3	**Análisis econométrico: Enfoque y metodología**		19
	3.1	Propósitos del análisis econométrico	19
	3.2	Las técnicas econométricas VEC y VAR	20
		3.2.1 Estructura recursiva de un VAR	22
		3.2.2 Distintos enfoques para enfrentar la no estacionariedad de las series de tiempo	24
		3.2.3 Antecedentes de las representaciones estructurales de vectores autorregresivos con corrección de errores (SVEC) y de las representaciones estructurales de vectores autorregresivos (SVAR)	27
Capítulo 4	**El dilema en el uso del tipo de cambio: ¿Para el equilibrio externo o para el equilibrio interno?**		31
Capítulo 5	**Los modelos econométricos SVEC y SVAR**		33
	5.1	El conjunto de modelos SVEC y SVAR	33
		5.1.1 Variables de los modelos trimestrales	36
		5.1.2 Variables de los modelos mensuales	37
	5.2	Representaciones estructurales de vectores autorregresivos con corrección de errores (SVEC) para el equilibrio externo y para el equilibrio interno en México, 1982-1994	38
		5.2.1. Modelos y notación	38
	5.3	Número óptimo de rezagos	44
	5.4	Causalidad de Granger en un modelo multivariado: Pruebas de exogeneidad de bloque	47

5.5	Descomposición de varianza y funciones de impulso-respuesta	51
5.6	Preguntas que se contestan en el trabajo econométrico	52
5.7	Resultados del análisis de los modelos SVEC	53
	5.7.1 Modelos SVEC para el equilibrio externo	54
	5.7.2 Modelos SVEC para el equilibrio interno	63
5.8	Representaciones estructurales de vectores autorregresivos (SVAR) para el equilibrio externo y el equilibrio interno en México, 1982-1994	83
	5.8.1 Modelos y notación	83
	5.8.2 Modelos SVAR para el equilibrio externo	85
	5.8.3 Modelos SVAR para el equilibrio interno	91
5.9	Sumario de resultados de las descomposiciones de varianza y de las funciones de impulso-respuesta de los modelos SVEC y SVAR	107

Capítulo 6 Conclusiones del Tomo II 127

<u>CONCLUSIONES GENERALES</u> 134

<u>ANEXOS ECONOMÉTRICOS</u> 1

Anexo econométrico 1: Pruebas para el número óptimo de rezagos 3

Anexo econométrico 2: Pruebas de causalidad bivariada de Granger 10

Anexo econométrico 3: Pruebas de exogeneidad de bloque 18

Anexo econométrico 4: Modelos de representación estructural de vectores autorregresivos con corrección de errores (SVEC) 21

Anexo econométrico 5: Modelos de representación estructural de vectores autorregresivos (SVAR) 130

<u>BIBLIOGRAFÍA</u> 239

TOMO I

DEDICATORIAS

- Este trabajo no se habría realizado sin el apoyo de mi esposo René,
  a quien se lo dedico con amor y gratitud.

- Con amor infinito a mi madre, por el ejemplo que me dió con su determinación,
  gran inteligencia y fuerza creadora.

- A mi abuelita María Isabel†, una mujer amorosa, visionaria y valiente.

- Con infinito amor a Tania Rocío, René Alejandro y Rodrigo David,
  a quienes admiro por ser emocional e intelectualmente brillantes,
  y con gratitud, por el enorme cariño y apoyo que me han brindado.

- Con cariño y agradecimiento a Gustav Ranis, Richard C. Levine,
  Robert Triffin† y Carlos Díaz-Alejandro†.
  A James Tobin, Franco Modigliani, Robert Mundell y Judy Shelton
  por sus valiosos comentarios en la XIV Conferencia Monetaria Internacional
  Claremont-Bologna.

- Dedico este trabajo con cariño a Paul Krugman y a C. Fred Bergsten.
  A Griselda Alvarez, Ana Lucía y José Antonio Ocampo,
  Mariano Palacios y Bailey Morris Eck.

- A mis maestros y compañeros de la Universidad de Yale, de la Universidad de Nuevo León,
  de la Universidad Autónoma Metropolitana y de El Colegio de México.

- A los que dirigen su esfuerzo e inteligencia creadora para mejorar
  el bienestar de los países en desarrollo.

AGRADECIMIENTOS

Con una profunda gratitud a Richard N. Cooper, mi maestro en el doctorado en economía de la Universidad de Yale, quien me impulsó siempre y con su profundidad, rigor analítico, oportuna y extraordinaria disposición para analizar la experiencia macroeconómica mexicana hizo posible que se realizara este trabajo.

Mi agradecimiento especial para el Presidente Miguel de la Madrid Hurtado, quien me brindó la oportunidad de colaborar en el Poder Ejecutivo Federal como Secretaria Técnica del Gabinete Económico de la Presidencia de la República, lo que me permitió vivir y analizar el proceso de toma de decisiones de la política económica de México en el periodo de 1982 a 1988.

Tengo también una deuda de gratitud con Jesús Zurita González, por su gran apoyo y brillantes sugerencias y con mis maestros Gerardo Bueno, Carlos Díaz-Alejandro†, Francisco Gil Díaz, Everardo Elizondo, Romeo Flores, David Ibarra, Gustav Ranis, John Sheahan, Leopoldo Solís, Joseph Stiglitz, James Tobin, Robert Triffin† y Víctor Urquidi por sus valiosas enseñanzas, y con Jinill Kim de la Universidad de Yale, con quien llevé a cabo una revisión y corroboración de los resultados econométricos.

Ernesto Turner, Pascual García-Alba, Etelberto Ortiz y Felipe Peredo, de la Universidad Autónoma Metropolitana y de El Colegio de México me brindaron su apoyo y me dieron un gran estímulo durante el desarrollo de este trabajo. Blanca Estela Garza de Alba, Enrique Martínez Moreno y Francisco Velázquez Osorio aportaron su talento y paciencia en la revisión del mismo.

Al pueblo y al gobierno de México y a la Organización de las Naciones Unidas les agradezco su apoyo para realizar mis estudios de maestría y doctorado.

A todos ellos, mi gratitud más sincera.

Prólogo

En México el Poder Ejecutivo Federal formula y propone las iniciativas de política económica a nivel nacional. Estas iniciativas se integran desde hace más de una década en el documento de "Criterios Generales de Política Económica" que se somete año con año a la aprobación de otro poder nacional: el legislativo. En estos documentos se establece el conjunto de objetivos macroeconómicos que el gobierno federal se propone alcanzar al siguiente año. Éstos, sin embargo, no siempre se fijan con fines estrictamente económicos: el ciclo político en el cual se encuentran inmersas las decisiones de política económica puede afectarlos de manera fundamental.

Una vez que se definen los objetivos y se establecen las prioridades el Poder Ejecutivo Federal trata de alcanzarlos a través del conjunto de instrumentos de que dispone para ello. Los instrumentos, sin embargo, no siempre se utilizan de la manera más adecuada.

Uno de los propósitos de este trabajo es explorar lo que Richard N. Cooper denominó el problema de la asignación, esto es, ¿cómo deben asignarse los instrumentos para alcanzar los objetivos económicos con eficacia y eficiencia? Y en particular, en el caso de México, ¿es conveniente utilizar el tipo de cambio para reducir el desequilibrio externo o para abatir la inflación?

En México las crisis devaluatorias que se iniciaron en 1976 continuaron presentándose en forma recurrente en los siguientes veinte años, a pesar de los distintos roles que se le asignaron al tipo de cambio: éste se utilizó como instrumento, pero también llegó a considerársele como un objetivo.

De 1982 a 1998 la economía mexicana creció a una tasa promedio anual de poco menos de 3%: ésta es aproximadamente la mitad de la tasa histórica de 6.4% que logró de 1940 a 1981. Mientras tanto de 1980 a 1996 algunos países del sudeste asiático como Singapur, Corea del Sur, Taiwán y Hong Kong experimentaron, en periodos similares, tasas de crecimiento más altas y estabilidad macroeconómica.

La lección que se deriva de la experiencia de estos países hasta antes de las crisis que padecieron en 1997 y 1998 es que el uso adecuado y la asignación eficiente de los instrumentos de política macroeconómica son fundamentales para alcanzar el triple objetivo de crecimiento con baja inflación y desequilibrio externo manejable y sostenible.

Frente a la evolución de estos países podríamos preguntarnos: ¿Qué falló en México? ¿Cómo se asignaron los instrumentos para alcanzar el éxito macroeconómico y por qué éste no se logró totalmente y la economía desembocó en varias crisis devaluatorias? ¿Y por qué no se logró un mayor ritmo de crecimiento económico?

Si la economía mexicana hubiera crecido en los últimos 15 años a un ritmo igual al que logró crecer de 1940 a 1981, su tamaño ya sería superior al de la economía canadiense.

Mi interés en el problema de la asignación del tipo de cambio en México para reducir el desequilibrio externo a un nivel que le permita crecer y al mismo tiempo lograr una relativa estabilidad de precios sin caer en crisis devaluatorias o en crisis inflacionarias me llevó a desarrollar esta investigación.

La dividí en dos partes:

- En el Tomo I reviso algunas de las principales aportaciones al marco teórico de instrumentos y objetivos de política económica. Desarrollo, asimismo, dos modelos generales: uno en un contexto de certidumbre y otro en uno de incertidumbres multiplicativa y aditiva en los cuales incorporo múltiples elementos analizados por Tinbergen, Mundell, Brainard, Henderson y Turnovsky y Ali y Greenbum.
- En el Tomo II utilizo dos conjuntos de modelos econométricos: uno con representaciones estructurales de vectores autorregresivos con corrección de errores y otro con representaciones estructurales de vectores autorregresivos, con el propósito de analizar la eficacia absoluta y relativa del tipo de cambio en México para lograr el equilibrio externo o el equilibrio interno, *vis à vis* otros instrumentos de política, en el periodo de 1982 a 1994. Exploro además, de manera indirecta, los costos de oportunidad derivados del uso del tipo de cambio para lograr cualquiera de estos equilibrios. Con la estimación de la eficacia relativa y de los costos de oportunidad derivados del uso del tipo de cambio llego a conclusiones respecto a su ventaja comparativa para alcanzar el equilibrio externo.
- Finalmente analizo la existencia de un dilema en el uso del tipo de cambio al emplearlo para conseguir el equilibrio externo o el interno en México, en el lapso de 1982 a 1994. Este dilema existe si el instrumento cambiario exhibe una alta efectividad relativa para lograr cualquiera de estos dos objetivos pero al mismo tiempo si se le utiliza para conseguir uno de ellos, la economía se aleja del otro. El fenómeno debe ser considerado cuidadosamente por quienes deciden la política económica, pues no hacerlo puede conducir a la inestabilidad y crisis económica.

LA TEORÍA DE LA POLÍTICA ECONÓMICA: REVISIÓN Y NUEVOS MODELOS

En 1952 el economista holandés Jan Tinbergen publicó *"On the Theory of Economic Policy"*[1] y creó el marco de objetivos e instrumentos de política económica. El análisis que hizo del problema fundamental de los tomadores de decisiones respecto a cómo alcanzar los objetivos económicos socialmente deseados ha sido y es de la mayor relevancia en el mundo actual.

A partir del modelo de Tinbergen se hicieron a lo largo de cinco décadas contribuciones que enriquecieron notablemente su análisis al incorporar elementos como la apertura de la economía, la incertidumbre, los costos generados por el uso de los instrumentos, la interdependencia entre economías de gran tamaño y la dependencia de una pequeña y abierta, con una grande.

El propósito en el Tomo I de la tesis es proporcionar una visión panorámica y una revisión crítica de algunas contribuciones que considero que son las más relevantes dentro del marco de instrumentos y objetivos. Propondré dos nuevos modelos generales sin restricciones en cuanto al número de objetivos y de instrumentos e introduciré en ellas un elemento que ha sido omitido en los modelos revisados: los costos de oportunidad crecientes, derivados del uso de los instrumentos. La utilización de un instrumento para alcanzar un objetivo en particular genera costos de oportunidad si al mismo tiempo afecta de manera no deseada el logro de otro u otros objetivos alternativos. Si por ejemplo el tipo de cambio se utiliza para abatir la inflación y esto provoca una sobrevaluación del tipo de cambio que afecta negativamente al desequilibrio externo, en este caso el costo de oportunidad de utilizar el tipo de cambio para lograr el equilibrio interno es el empeoramiento del desequilibrio externo.

Presentaré, asimismo, la revisión de algunos modelos de Richard N. Cooper y Masanao Aoki sobre la interdependencia económica entre economías de gran tamaño respecto a la economía mundial, así como el análisis de una economía pequeña y abierta que depende de una de mayor tamaño. Con base en el análisis de Cooper desarrollaré dos nuevos modelos para la economía

[1] Tinbergen, Jan (1952), *On the Theory of Economic Policy,* North Holland Publishers, Amsterdam.

pequeña, abierta y dependiente, relevantes para los países en desarrollo. Es necesario destacar la importancia de estudiar este tipo de economías, así como hacer algunas consideraciones sobre las dificultades teóricas y las derivadas de la instrumentación de las políticas que el tomador de decisiones debería tomar en cuenta al aplicarlas.

CAPÍTULO

1

Objetivos e instrumentos de política económica. Aportaciones teóricas

1.1 El principio de Tinbergen

En el libro sobre la teoría de la política económica Jan Tinbergen crea en 1952 un marco sistémico para el análisis de un conjunto de instrumentos y objetivos de política.[1]

Mediante el desarrollo y análisis de un modelo con un número ilimitado de instrumentos y objetivos Tinbergen establece el principio de consistencia que lleva su nombre: para alcanzar un determinado número de objetivos se debe contar por lo menos con el mismo número de instrumentos independientes entre sí.

Concluye, asimismo, que con más instrumentos que objetivos el sistema estará sobredeterminado y habrá una solución para lograr todos los objetivos utilizando sólo un subconjunto de los instrumentos. En cambio con menos instrumentos que objetivos, el sistema tendrá solución, pero sólo para alcanzar un subconjunto de los objetivos.

En este marco de análisis si los instrumentos son interdependientes entre sí esto implica que aunque haya igual número de instrumentos que de objetivos, el tomador de decisiones tendrá menos instrumentos independientes entre sí que objetivos a lograr, por lo que no podrá alcanzar éstos en su totalidad. Por otra parte si existe interdependencia entre los objetivos, el sistema estará

---

[1] Tinbergen, Jan (1952), *On the Theory of Economic Policy*, North-Holland Publishers, Amsterdam.

sobredeterminado y será posible prescindir de algunos instrumentos y aún así alcanzar todos los objetivos deseados por la sociedad.

Las relaciones entre los objetivos y los instrumentos postuladas por Tinbergen se expresan a través de un sistema de ecuaciones donde los objetivos están representados por N ecuaciones y los instrumentos por M variables.

Cada objetivo y_i está relacionado con M instrumentos y esto se puede expresar a través de la siguiente ecuación

$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{iM}x_M$, para $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$

que en forma matricial se expresa como $y = Ax$, donde y representa a un conjunto de objetivos y es un vector columna de dimensión N × 1 y A es una matriz de coeficientes de dimensión N × M que relaciona los instrumentos con los objetivos.

El elemento típico de A es a_{ij} y representa el efecto del instrumento j sobre el objetivo i y x representa a un conjunto de instrumentos a través de un vector columna de dimensión M × 1.

Si hay interdependencia entre los instrumentos por lo menos una columna de A es linealmente dependiente de otra o de otras y hay menos de M instrumentos para que el tomador de decisiones alcance los objetivos que se propone. Con este tipo de interdependencia un instrumento está relacionado con otro instrumento o con un subconjunto de ellos a través de una expresión lineal, lo cual significa que hay un número de instrumentos independientes entre sí menor a M.

En una situación en la que haya interdependencia entre los objetivos, el número de ellos será menor a N y deberán resolverse menos de N ecuaciones porque habrá relaciones de la forma $y_i = f_i(y_1, y_2, \cdots, y_N)$ y la f_i será una función lineal que puede depender de una y_j, de un subconjunto de ellas o de todas las y_j, con excepción del objetivo u objetivos que sean dependientes linealmente.

Por otro lado si N > M entonces habrá más objetivos que instrumentos y sólo se podrá alcanzar un subconjunto de los objetivos, aun cuando todos los instrumentos sean independientes entre sí.

Si M es igual a N entonces el número de objetivos será idéntico al número de instrumentos. Si además suponemos que los instrumentos así como los objetivos son independientes entre sí, entonces habrá una solución única para resolver el sistema de ecuaciones.

Finalmente, si el número de objetivos es menor al de instrumentos, esto es, si N < M y los instrumentos y los objetivos son independientes entre sí, el tomador de decisiones podrá alcanzar todos los objetivos con sólo un subconjunto de los instrumentos, en cuyo caso se podrán anclar algunos de ellos.

Algunos factores que modifican la aplicabilidad del principio general de Tinbergen son los costos derivados del uso de los instrumentos, los problemas en la instrumentación de las políticas y la situación de certidumbre o incertidumbre que predomine en la economía.

A continuación se revisarán algunas de las aportaciones más importantes al marco de análisis de Tinbergen.

1.2 La contribución de Robert Mundell: La asignación de los instrumentos de acuerdo con el principio de clasificación efectiva de mercado

En un artículo que publicó en 1962: *The Appropriate Use of Monetary and Fiscal Policy for Internal and External Stability*[2] Robert Mundell mostró que una de las limitaciones del análisis de Tinbergen era que aún cuando se analizaba la existencia y localización del equilibrio en el sistema, él no abordaba el problema de cómo se deberían asignar los instrumentos de política para alcanzarlo ni tampoco definía bajo qué condiciones el equilibrio sería estable.

Mundell logró ambas cosas en su análisis.

En su artículo él examina el caso de una economía pequeña y abierta en una situación de certidumbre perfecta, con un régimen de tipo de cambio flexible y sin trabas al comercio internacional. Introduce dos instrumentos independientes entre sí: el superávit fiscal y la tasa de interés para alcanzar dos objetivos: producción de pleno empleo y equilibrio en la balanza de reservas o como él mismo señala, equilibrio en la balanza de pagos.

2 Mundell, Robert A. (1962), "The Appropriate Use of Monetary and Fiscal Policy for Internal and External Stability", *International Monetary Fund, Staff Papers*, vol. IX, marzo de 1962, pp. 70-77.

Mundell aplica en su modelo el principio de Tinbergen y garantiza la existencia del equilibrio. Lograr ambos objetivos significa que la economía llega al equilibrio interno y externo con lo cual la economía está en pleno empleo y el saldo de su balanza de reservas es igual a cero.

En lo relativo a las condiciones para lograr la estabilidad, que fue una preocupación central de su análisis, Mundell propone el principio de clasificación efectiva de mercado, en el cual establece que se tiene que usar cada instrumento de acuerdo con su eficacia relativa para que el sistema llegue al equilibrio y que éste sea estable. Cada instrumento debe asignarse al objetivo sobre el cual ejerza mayor efecto, en términos relativos. Al respecto Mundell señala: "los instrumentos de política deben asociarse con los objetivos sobre los que tienen mayor influencia. Si no se respeta este principio se desarrollará una tendencia para aproximarse a la inestabilidad."[3]

En su modelo la política fiscal tiene ventaja relativa en términos de eficacia para alcanzar el equilibrio interno, mientras que la política monetaria tiene esta ventaja para lograr el equilibrio externo. En esta situación si no se asignan correctamente los dos instrumentos de política, la economía se alejará del equilibrio y nunca llegará a él. En relación a esto señala que "el uso de la política fiscal para propósitos externos y de la política monetaria para lograr la estabilidad interna viola el principio de clasificación efectiva de mercado, porque el cociente del efecto de la tasa de interés sobre la estabilidad interna, en relación con su efecto sobre la balanza de pagos es inferior al cociente del efecto de la política fiscal sobre la estabilidad interna, relativa a su efecto en la balanza de pagos. Y es precisamente por esta razón que el conjunto opuesto de políticas es congruente con el principio."[4] De esta forma Mundell amplía el análisis de Tinbergen y establece el criterio de asignación óptima de los instrumentos de política económica para lograr el equilibrio externo e interno en la economía y que éste sea estable.

Es interesante notar que en el modelo de Mundell no se analiza la eficiencia, sino la eficacia de los instrumentos para alcanzar los objetivos. Éste es un elemento fundamental que él pasó por alto, ya que sólo consideró los efectos de los instrumentos sobre los objetivos, omitiendo en su análisis los costos derivados del uso de los instrumentos. Con el criterio de eficacia solamente se tienen que tener en cuenta los efectos, mientras que con el de eficiencia también se tienen que considerar los costos.

---

[3] Mundell, Robert A., op. cit., p. 76.
[4] *Ibid.*, p. 77.

Finalmente podemos señalar que la conclusión de Mundell se aplica en un mundo donde prevalece la certidumbre económica, no hay costos de ajuste al usar los instrumentos y el tiempo que se tarda el sistema en llegar al equilibrio no se analiza en detalle.

A continuación se presenta el análisis de Mundell:[5]

La recta FF está formada por el conjunto de puntos donde la economía está en equilibrio externo e interno. Estos puntos representan las distintas combinaciones de tasas de interés y superávit fiscal mediante las cuales la economía logra la producción de pleno empleo con un saldo en la balanza de pagos —en realidad el saldo al que Mundell se está refiriendo es el saldo de la balanza de reservas[6]— igual a cero.

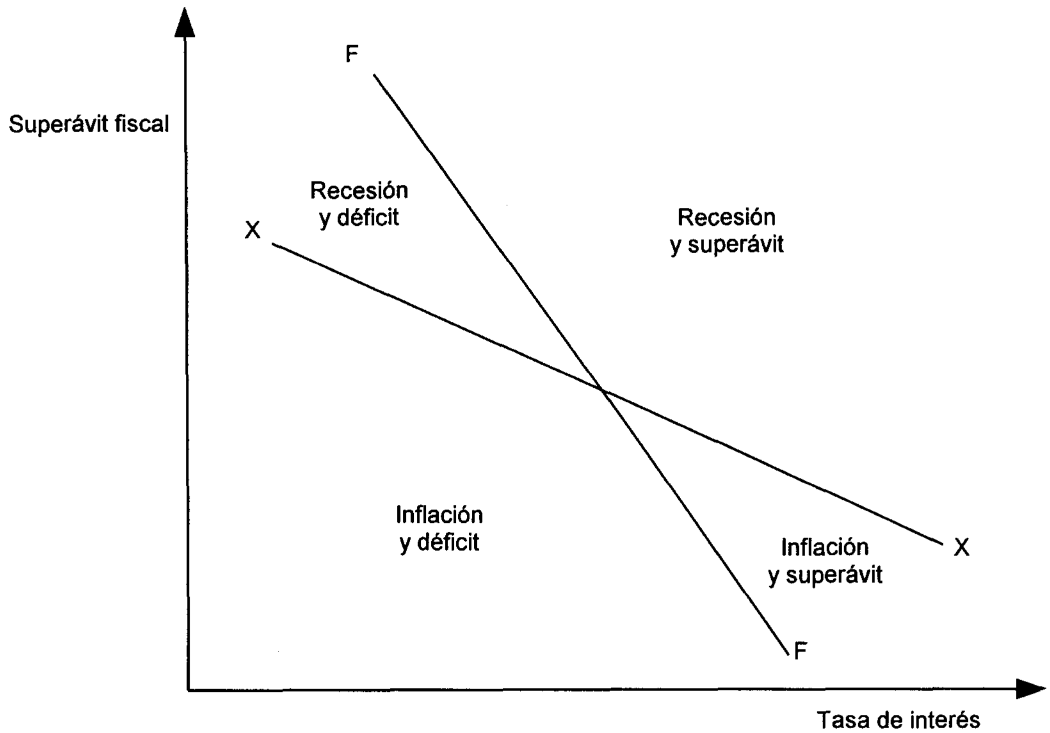
La recta FF tiene pendiente negativa ya que si nos ubicamos en cualquiera de sus puntos un incremento de la tasa de interés aumenta la entrada de capitales, lo cual a su vez produce un superávit en la balanza de pagos. Este aumento de la tasa de interés ocasiona, por otro lado, una reducción de la demanda agregada y recesión. La merma de la demanda interna contrae las importaciones y provoca un superávit en la balanza de pagos. Para restablecer el equilibrio en esta balanza será necesario reducir el superávit fiscal, lo cual significa que habrá que aumentar el gasto público para combatir la recesión. Por otro lado el aumento del gasto elevará las importaciones hasta que el saldo de la balanza de pagos sea igual a cero.

Nótese que genera cualquier punto a la derecha y arriba de la línea FF indica que habrá un superávit en la balanza de pagos y cualquier punto a la izquierda y abajo de esta línea significa que habrá un déficit en esta balanza.

Si la economía se encuentra en cualquiera de los puntos de la línea FF esto significa que habrá logrado el equilibrio externo y el saldo de la balanza de pagos será igual a cero (véase la Gráfica 1.1).

[5] *Ibid.*, p. 72.

[6] A fin de mantener lo más fidedigno posible su análisis, en el resto de la sección 1.2 se hará alusión a la balanza de reservas como a la balanza de pagos.



Gráfica 1.1 El análisis de Mundell

La recta XX representa combinaciones de la tasa de interés y del superávit fiscal que mantienen a la economía en balance interno y la economía se encontrará en equilibrio con pleno empleo en el mercado de bienes y servicios. En esta recta la demanda agregada interna es igual a la producción con pleno empleo menos las exportaciones. Esto significa que sólo hay un nivel de demanda interna de bienes producidos en el país congruente con la producción de pleno empleo y un volumen dado de exportaciones. El gasto interno es constante a lo largo de la recta XX y una tasa de interés mayor —que reduciría el gasto interno— debe ser compensada con un superávit fiscal menor para mantener el gasto interno constante, de aquí que la pendiente de la recta XX sea negativa.

Para una tasa de interés dada, en un punto sobre XX, si el superávit fiscal aumenta, el gasto interno se reducirá y el producto caerá por debajo del nivel de pleno empleo, lo cual provocará una recesión.

Si la tasa de interés aumenta y el superávit fiscal se mantiene constante, se provocará una recesión a causa de una demanda insuficiente por el producto interno y por lo tanto en los puntos que aparecen a la derecha y arriba de la recta XX habrá recesión debido a que la demanda por el producto interno disminuirá por debajo del nivel de producción de pleno empleo menos las exportaciones.

De manera similar los puntos a la izquierda y por debajo de la recta XX representarán situaciones en las que habrá inflación, ya que la demanda por el producto interno será mayor a la producción de pleno empleo menos las exportaciones.

Con base en la Gráfica 1.2 se analizará, a continuación, el principio de clasificación efectiva de mercado.

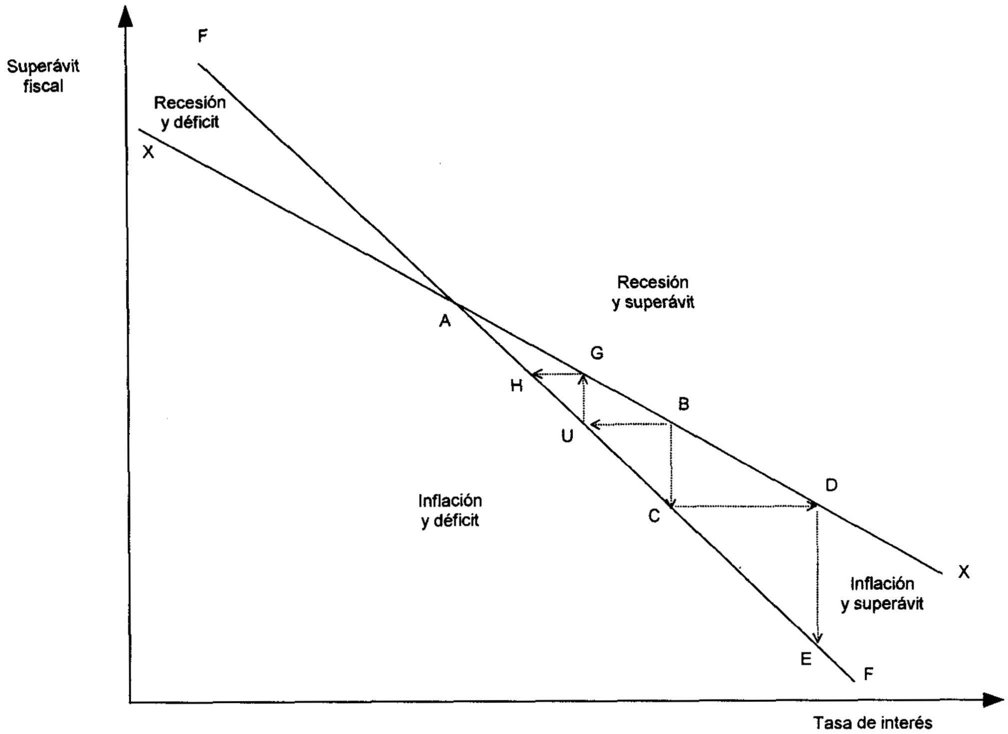
Supongamos que después de un choque exógeno la economía está en el punto B, con equilibrio interno y superávit en la balanza de pagos.

Si para corregir este desequilibrio el tomador de decisiones aumenta el gasto público, se reducirá el superávit fiscal y la economía llegará al punto C, donde alcanzará el equilibrio externo pero con presiones inflacionarias, es decir, con desequilibrio interno. Si para eliminar este desequilibrio se aumenta la tasa de interés esto provocará un superávit en la balanza de pagos.

De esta manera si la política monetaria se usa para lograr el equilibrio interno y la fiscal para alcanzar el equilibrio externo, la economía se alejará cada vez más del punto A. Es decir, este conjunto de respuestas de política al choque exógeno generará una situación de inestabilidad.

En cambio si cuando la economía está en el punto B se utiliza la política monetaria —a través de la tasa de interés— para lograr el equilibrio externo, que es el objetivo para el cual tiene ventaja relativa de acuerdo al análisis de Mundell, y a la política fiscal para el equilibrio interno, que es el objetivo para el cual tiene ventaja relativa, entonces la economía llegará al equilibrio en el punto A.

¿Cómo ocurriría este proceso? En el punto B el tomador de decisiones reduciría la tasa de interés, con lo cual eliminaría el superávit en la balanza de pagos y la economía se desplazaría hasta el punto U, donde se mantendría el equilibrio externo, aunque con inflación.



Gráfica 1.2 El principio de clasificación efectiva de mercado

Si en U se redujera el gasto público, entonces aumentaría el superávit fiscal, con lo cual se eliminaría el desequilibrio interno y la economía se desplazaría hasta el punto G. De manera similar la economía podría ser guiada hasta el punto H y posteriormente hasta el A, donde se alcanzarían los balances interno y externo. De esta manera al aplicarse el principio de clasificación efectiva de mercado utilizando la política monetaria para el equilibrio externo y la fiscal para el equilibrio interno se garantizaría que la economía llegara al punto de equilibrio y que éste fuera estable.[7]

[7] *Ibid.*

1.3 La contribución de William Brainard: Introducción de las incertidumbres multiplicativa y aditiva

En un artículo publicado en 1967: *Uncertainty and the Effectiveness of Policy,*[8] William Brainard, de la Universidad de Yale aplicó el análisis de portafolio de James Tobin y William Markowitz y mostró en un modelo estático de dos instrumentos y un objetivo donde introduce las incertidumbres multiplicativa y aditiva, que las autoridades necesitan ambos instrumentos de política para conseguir el objetivo único. Si sólo utilizan uno de los instrumentos para lograr el objetivo, éste no se alcanzará y la economía se alejará cada vez más de él.

La introducción de la incertidumbre en el marco de Tinbergen es una contribución interesante. La incertidumbre ha sido un concepto central en macroeconomía en los últimos 20 años. La manera en que los agentes económicos, forman sus expectativas, ya sean racionales, adaptativas o de otro tipo, en una situación de certidumbre o de incertidumbre es fundamental para determinar cuáles van a ser los efectos de la política macroeoconómica.

En un análisis similar al realizado por Tobin y Markowitz, en el que un agente tiene que diversificar su portafolio para minimizar el riesgo, Brainard señala que el tomador de decisiones también tiene que diversificar su portafolio de instrumentos utilizando todos los instrumentos a su alcance, en este caso dos, para alcanzar el objetivo único.

En el modelo de Brainard la existencia de incertidumbre multiplicativa es condición suficiente para que el principio de Tinbergen no se aplique.

1.4 Generalización del modelo de Brainard

Para generalizar el modelo de Brainard elaboraremos un modelo con un número ilimitado de instrumentos M y con un número irrestricto de objetivos N, que será el primero que expondremos en esta sección; después lo reduciremos a uno de M instrumentos y un objetivo y finalmente presentaremos el de dos instrumentos y un objetivo.

---

[8] Brainard, William (1967), "Uncertainty and the Effectiveness of Policy", *American Economic Review*, Proceedings, número 57, pp. 411-425.

Es interesante observar que cuando se amplía el modelo de Brainard de dos instrumentos y un objetivo introduciendo M instrumentos y N objetivos, las autoridades deben usar todos los instrumentos a su alcance, esto es, deben diversificar completamente su portafolio de instrumentos para minimizar el valor esperado de la desviación cuadrática del valor actual de los objetivos respecto a sus valores deseados, ya que en la solución aparecen todos los instrumentos con sus impactos esperados y sus covarianzas.

La conclusión del modelo que desarrollo Brainard de dos instrumentos y un objetivo se mantiene tanto en el de M instrumentos y un objetivos como en el más general de M por N.

La incertidumbre multiplicativa es, en términos generales, una condición muy poderosa que lleva a la proliferación en el uso de los instrumentos. Cuando está presente y es la fuerza predominante en el sistema, por ejemplo en una situación en la que la economía esté a punto de caer en una hiperinflación el tomador de decisiones tendrá que emplear todos los instrumentos disponibles para alcanzar el objetivo que tiene la más alta prioridad, en este caso el abatimiento de la inflación.

1.4.1 El modelo de M instrumentos y N objetivos

En este modelo postulamos las relaciones entre los instrumentos y objetivos de política de la siguiente manera:

La incertidumbre multiplicativa se introduce a través de los elementos a_{ij} — La incertidumbre aditiva se introduce a través de los elementos u_i

$$\begin{aligned}
y_1 &= \overbrace{a_{11}}x_1 + \overbrace{a_{12}}x_2 + \cdots + \overbrace{a_{1M}}x_M + \overbrace{u_1} \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2M}x_M + u_2 \\
&\vdots \\
y_N &= a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \cdots + a_{NM}x_M + u_N,
\end{aligned}$$

que en forma matricial se pueden expresar como $y = Ax + u$, donde A es la matriz que relaciona linealmente los instrumentos con los objetivos, x es el vector de instrumentos y y es el vector de objetivos.

La incertidumbre multiplicativa hace que la matriz A sea estocástica,[9] de aquí que al modificarse este tipo de incertidumbre en el sistema se alterará la relación entre objetivos e instrumentos.

Para ilustrar en qué consiste la incertidumbre multiplicativa supongamos que una matriz A (con ciertos valores de a_{11}, $a_{12}, \ldots, a_{NM}$) está asociada con algún régimen comercial. Supongamos además que este régimen consiste en la aplicación de una tarifa uniforme sobre las importaciones y que no existen restricciones cuantitativas a las mismas. Si la tarifa uniforme se modifica tendremos una matriz A diferente, es decir, los valores de a_{11}, $a_{12}, \ldots, a_{NM}$ cambiarán para unas u determinadas y valores particulares dados de los instrumentos.

En este caso la relación entre instrumentos y objetivos se altera debido a la modificación del régimen comercial, pero también puede variar si el régimen cambiario se modifica o si se lleva a cabo una mayor desregulación de la economía. Además A puede variar debido a cambios en las reglas de la política económica y en las expectativas de los agentes económicos.

Por otra parte u representa a la incertidumbre aditiva del sistema. Cuando varía la relación entre instrumentos y objetivos se mantiene, pero a un nivel distinto. Por esta razón se le llama incertidumbre aditiva. Este tipo de incertidumbre puede ser provocada por choques externos sobre la economía doméstica, como cambios mínimos en las tasas de interés internacionales o aumentos muy insignificantes en los precios del petróleo.

En el modelo de M instrumentos y N objetivos con ambos tipos de incertidumbre: aditiva y multiplicativa, maximizar la función de bienestar social implica minimizar la función de costos o minimizar el valor esperado de la desviación cuadrática entre los objetivos y_i y los valores óptimos y_i^* definidos por la sociedad.

Si lo analizamos en forma gráfica, lo que deseamos es que mediante las x_j las y_i tiendan a las y_i^*, de tal forma que el valor esperado de las desviación cuadrática entre el vector de los valores actuales de los objetivos y y el vector de los valores óptimos de los objetivos y^* sea el mínimo:

9 Las a_{ij} y las u_i están definidas por funciones de distribución probabilísticas de alguna clase. Éstas pueden ser de ruido blanco [con distribución normal y son independientes entre sí: $N(0,\sigma^2)$], Poisson, binomial o de otro tipo.

$$\underbrace{\mathrm{E}}_{\substack{\text{Operador}\\ \text{de valor}\\ \text{esperado}}}\overbrace{(\underbrace{y-y^*}_{\substack{\text{Desviación entre}\\ \text{el vector de los}\\ \text{valores actuales de}\\ \text{los objetivos y el}\\ \text{vector de sus}\\ \text{valores deseados}}})^2}^{\text{Desviaciones cuadráticas}}$$

La función objetivo es el valor esperado de $(y-y^*)^2 = {}^t(y-y^*)(y-y^*)$, en la que y es el vector de los valores actuales de los objetivos y y^* es el vector de los valores óptimos de los objetivos.

La t como superíndice izquierdo representa la transpuesta de la matriz. Las matrices A, x y u son de dimensiones $N \times M$, $M \times 1$ y $N \times 1$, respectivamente.

Las dimensiones de los vectores y las matrices contenidas en la expresión del valor esperado de la desviación cuadrática entre el vector de los valores actuales de los objetivos y el vector de los valores deseados de los objetivos implican que este valor es una cantidad escalar que se puede calcular mediante las siguientes operaciones:

$$\mathrm{E}\left[{}^t(y-y^*)(y-y^*)\right] = \mathrm{E}\left[{}^t(Ax+u-y^*)(Ax+u-y^*)\right] =$$

$$\mathrm{E}\left[{}^t(Ax+u-y^*)(Ax+u) - {}^t(Ax+u-y^*)y^*\right] =$$

$$\mathrm{E}\left[{}^tx{}^tAAx + {}^tx{}^tAu + {}^tuAx + {}^tuu - {}^ty^*Ax - {}^ty^*u - {}^tx{}^tAy^* - {}^tuy^* + {}^ty^*y^*\right] =$$

$${}^tx\mathrm{E}\left[{}^tAA\right]x + {}^tx\mathrm{E}\left[{}^tAu\right] + \mathrm{E}\left[{}^tuA\right]x + \mathrm{E}\left[{}^tuu\right] - {}^ty^*\mathrm{E}[A]x - {}^ty^*\mathrm{E}[u] -$$

$${}^tx\mathrm{E}\left[{}^tA\right]y^* - \mathrm{E}\left[{}^tu\right]y^* + {}^ty^*y^* \tag{1}$$

En esta expresión se puede observar que sólo es necesario calcular la mitad de los términos que aparecen en (1) debido a la simetría de los mismos. Con las fórmulas para la varianza V, la covarianza Cov y el factor de correlación ρ para variables aleatorias p y q tenemos que:

$$\mathrm{V}[q] = \mathrm{E}\left[(q-\mathrm{E}[q])^2\right] = \mathrm{E}\left[q^2\right] - (\mathrm{E}[q])^2 = \sigma^2 \tag{2}$$

$$\mathrm{E}\left[q^2\right] = \mathrm{V}[q] + (\mathrm{E}[q])^2$$

$$\mathrm{Cov}[q,p] = \mathrm{E}\left[(q-\mathrm{E}[q])(p-\mathrm{E}[p])\right] = \mathrm{E}[qp] - \mathrm{E}[q]\mathrm{E}[p]$$

$$\rho(q,p)=\frac{\mathrm{E}[qp]-\mathrm{E}[q]\mathrm{E}[p]}{\sigma(q)\sigma(p)} \tag{3}$$

$$\mathrm{E}[qp]=\sigma(q)\sigma(p)\rho(q,p)+\mathrm{E}[q]\mathrm{E}[p] \tag{4}$$

Si representamos los valores esperados de las variables aleatorias con una barra superior podemos obtener una expresión de la componente ik del producto $\mathrm{E}[{}^{t}AA]$ en el primer término de (1); además, si usamos (4) tenemos que:

$$\mathrm{E}\left[\left({}^{t}AA\right)_{ik}\right]=\sum_{j=1}^{N}\mathrm{E}\left[a_{ji}a_{jk}\right]=\sum_{j=1}^{N}\left[\sigma\left(a_{ji}\right)\sigma\left(a_{jk}\right)\rho\left(a_{ji},a_{jk}\right)+\bar{a}_{ji}\bar{a}_{jk}\right]$$

de donde:

$${}^{t}x\mathrm{E}\left[{}^{t}AA\right]x=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}\left[\sigma\left(a_{ji}\right)\sigma\left(a_{jk}\right)\rho\left(a_{ji},a_{jk}\right)+\bar{a}_{ji}\bar{a}_{jk}\right]x_i x_k \tag{5}$$

El segundo y tercer términos en (1) son simétricos, por lo que

$$2\mathrm{E}\left[{}^{t}uA\right]x=2\mathrm{E}\left[\begin{pmatrix}u_1, & u_2, & \cdots, & u_N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1M}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2M}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NM}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_M\end{pmatrix}=$$

$$2\mathrm{E}\left[\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{N}u_j a_{j1}, & \sum\limits_{j=1}^{N}u_j a_{j2}, & \cdots, & \sum\limits_{j=1}^{N}u_j a_{jM}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_M\end{pmatrix}=2\mathrm{E}\left[\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}u_j a_{jk}x_k\right]=$$

$$2\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{E}\left[u_j a_{jk}\right]x_k=2\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\left[\sigma\left(u_j\right)\sigma\left(a_{jk}\right)\rho\left(u_j,a_{jk}\right)+\bar{u}_j\bar{a}_{jk}\right]x_k \tag{6}$$

Como puede observarse en la ecuación (1), el cuarto, sexto, octavo y noveno términos no dependen de x_l. El quinto y séptimo términos son simétricos, por lo que podemos sumar sus valores esperados para simplificar el álgebra:

$$2\left(\sum_{j=1}^{N} y_j^* \bar{a}_{j1},\quad \sum_{j=1}^{N} y_j^* \bar{a}_{j2},\quad \cdots,\quad \sum_{j=1}^{N} y_j^* \bar{a}_{jM}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix} = 2\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} y_j^* \bar{a}_{jk} x_k \tag{7}$$

Con base en las expresiones (5), (6) y (7) la desviación cuadrática media del vector de objetivos puede escribirse como

$$\mathrm{E}\left[{}^{t}(y-y^*)(y-y^*)\right] =$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}\left[\sigma(a_{ji})\sigma(a_{jk})\rho(a_{ji},a_{jk})+\bar{a}_{ji}\bar{a}_{jk}\right]x_i x_k +$$

$$2\sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\left[\sigma(u_j)\sigma(a_{jk})\rho(u_j,a_{jk})+\bar{a}_{jk}\left(\bar{u}_j-y_j^*\right)\right]x_k+\sum_{j=1}^{N}\left[\overline{u_j^2}-2\overline{u_j}y_j^*+y_j^{*2}\right] \tag{8}$$

Por una parte el proceso de minimización requiere que se derive (8) respecto a cada uno de los instrumentos x_l. Por otra requiere que cada una de estas derivadas se iguale a cero,

$$\frac{\partial \mathrm{E}\left[{}^{t}\left(y-y^*\right)\left(y-y^*\right)\right]}{\partial x_l} =$$

$$2\sum_{j=1}^{N}\left\{\sum_{i=1}^{M}\left[\sigma(a_{ji})\sigma(a_{jl})\rho(a_{ji},a_{jl})+\bar{a}_{ji}\bar{a}_{jl}\right]x_i+\left[\sigma(u_j)\sigma(a_{jl})\rho(u_j,a_{jl})+\bar{a}_{jl}\left(\bar{u}_j-y_j^*\right)\right]\right\}=0 \tag{9}$$

para $l = 1, 2,.., M$.

Si en (9) hacemos las sustituciones,

$$p_{li}=\sum_{j=1}^{N}\left[\sigma(a_{ji})\sigma(a_{jl})\rho(a_{ji},a_{jl})+\bar{a}_{ji}\bar{a}_{jl}\right] \quad \text{y} \quad q_l=\sum_{j=1}^{N}\left[\bar{a}_{jl}\left(y_j^*-\bar{u}_j\right)-\sigma(u_j)\sigma(a_{jl})\rho(u_j,a_{jl})\right]$$

las ecuaciones en (9) pueden expresarse de una forma más simple:

$$\begin{aligned} p_{11}x_1+p_{12}x_2+\cdots+p_{1M}x_M &= q_1 \\ p_{21}x_1+p_{22}x_2+\cdots+p_{2M}x_M &= q_2 \\ \vdots \\ p_{M1}x_1+p_{M2}x_2+\cdots+p_{MM}x_M &= q_M \end{aligned} \tag{10}$$

o en forma abreviada,

$$\sum_{i=1}^{M} p_{li} x_i = q_l \tag{11}$$

A partir de los coeficientes del sistema de ecuaciones (10) se forma la matriz $P = (p_{li})$ de dimensión $M \times M$, el vector columna $Q = (q_l)$ de dimensión $M \times 1$ y el vector columna $X = (x_i)$ de instrumentos, de dimensión $M \times 1$.

En notación matricial (11) se puede escribir como

$$PX = Q \tag{12}$$

de donde puede obtenerse una solución si la matriz $P = (p_{li})$ no es singular; es decir, si su inversa existe, o sea, si P^{-1} existe. En este caso (12) puede pre-multiplicarse por P^{-1} y con ello se puede obtener una solución de la forma:

$$X = P^{-1}PX = P^{-1}Q \tag{13}$$

De esta manera el sistema puede resolverse para *M* instrumentos y *N* objetivos.

Por lo tanto en la solución que minimiza el valor esperado de la desviación cuadrática del vector de valores actuales de los objetivos y sus valores deseados intervienen todos los efectos esperados de los instrumentos, además de las covarianzas entre ellos y las covarianzas entre los efectos de los instrumentos y la incertidumbre aditiva y el valor esperado de la incertidumbre aditiva.

1.4.2 El modelo de M instrumentos y un objetivo

De acuerdo con este modelo la relación entre el objetivo y los instrumentos se define de la siguiente manera:

La incertidumbre multiplicativa se introduce a través de los elementos a_{ij}

La incertidumbre aditiva se introduce a través de los elementos u_i

$$y = \overbrace{a_1} x_1 + \overbrace{a_2} x_2 + \cdots + \overbrace{a_M} x_M + \overbrace{u}$$

La función que queremos minimizar es el valor esperado de la desviación cuadrática entre el vector de los valores actuales de los objetivos y y el vector de los valores deseados de los objetivos y^*.

$$\underbrace{\mathrm{E}}_{\text{Operador de valor esperado}}\ \overbrace{(\ \underbrace{y-y^{*}}_{\text{Desviación entre el vector de los valores actuales de los objetivos y el vector de sus valores deseados}}\ )^{2}}^{\text{Desviaciones cuadráticas}}$$

Con los mismos pasos algebraicos que en el caso de M instrumentos y N objetivos se obtiene un sistema de ecuaciones similar al de la expresión (9),

$$2\left\{\sum_{i=1}^{M}\left[\sigma(a_i)\sigma(a_l)\rho(a_i,a_l)+\bar{a}_i\bar{a}_l\right]x_i+\left[\sigma(u)\sigma(a_l)\rho(u,a_l)+\bar{a}_l\left(\bar{u}-y^{*}\right)\right]\right\}=0 \qquad (14)$$

para $l = 1, 2,.., M.$

Este sistema de ecuaciones puede escribirse de una manera más sencilla si se sustituyen los términos

$$p_{li}=\sigma(a_i)\sigma(a_l)\rho(a_i,a_l)+\bar{a}_i\bar{a}_l \qquad \text{y} \qquad q_l=\bar{a}_l\left(y^{*}-\bar{u}\right)-\sigma(u)\sigma(a_l)\rho(u,a_l)$$

en (14), con lo que resulta un sistema de M ecuaciones lineales con M incógnitas:

$$\begin{aligned}
&p_{11}x_1+p_{12}x_2+\cdots+p_{1M}x_M=q_1\\
&p_{21}x_1+p_{22}x_2+\cdots+p_{2M}x_M=q_2\\
&\vdots\\
&p_{M1}x_1+p_{M2}x_2+\cdots+p_{MM}x_M=q_M
\end{aligned} \qquad (15)$$

Para llegar a la solución del modelo se tiene que encontrar la inversa de la matriz $P=(p_{li})$ formada con los coeficientes de (15).

Si la inversa existe, la solución será un conjunto de valores x_1^{*}, x_2^{*}, …, x_M^{*}, expresados en términos de los coeficientes p_{li} y q_l que minimizan el valor esperado de la desviación cuadrática entre el valor actual del objetivo y y su valor óptimo deseado y^{*}.

Una expresión explícita de x_1^{*}, x_2^{*}, …, x_M^{*} en términos de p_{li} y q_l no es una expresión sencilla pero la inspección de (14) y (15) nos permite afirmar que en la solución óptima aparecerán todos los efectos esperados de los instrumentos, además de las covarianzas entre ellos y las covarianzas entre la incertidumbre aditiva y los efectos esperados de los instrumentos.

De esta manera para obtener la solución óptima que minimice el valor esperado de la desviación cuadrática entre el valor actual del objetivo y su valor deseado, el tomador de decisiones tendrá que usar todos los instrumentos que tenga a su alcance. En este sentido se aplica el criterio de asignación óptima de Brainard y en el modelo de M instrumentos y un objetivo se necesitará de una política de proliferación en el uso de los instrumentos para alcanzar el objetivo único.

Si reducimos este modelo a uno de dos instrumentos y un objetivo, la conclusión será idéntica a la que obtuvo Brainard, como se verá a continuación.

1.4.3 El modelo de dos instrumentos y un objetivo

Consideremos ahora un modelo como el de Brainard en el que $M = 2$ y $N = 1$ para analizar el criterio de asignación óptima de los instrumentos. En este caso particular la expresión (10) [o (15)] sería:

$$\begin{aligned} &\left(\sigma_1^2 + \bar{a}_1^2\right)x_1 + \left(\sigma_2\sigma_1\rho_{21} + \bar{a}_2\bar{a}_1\right)x_2 = \bar{a}_1\left(y^* - \bar{u}\right) - \sigma_u\sigma_1\rho_{u,1} \\ &\left(\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \bar{a}_1\bar{a}_2\right)x_1 + \left(\sigma_2^2 + \bar{a}_2^2\right)x_2 = \bar{a}_2\left(y^* - \bar{u}\right) - \sigma_u\sigma_2\rho_{u,2} \end{aligned} \tag{16}$$

Si se supone como lo hace Brainard[10] que no hay correlación entre las perturbaciones aleatorias multiplicativas y aditivas de los instrumentos, esto implica que $\rho_{u,1} = \rho_{u,2} = 0$ y entonces las ecuaciones (16) pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} &\left(\sigma_1^2 + \bar{a}_1^2\right)x_1 + \left(\sigma_2\sigma_1\rho_{21} + \bar{a}_2\bar{a}_1\right)x_2 = \bar{a}_1\left(y^* - \bar{u}\right) \\ &\left(\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \bar{a}_1\bar{a}_2\right)x_1 + \left(\sigma_2^2 + \bar{a}_2^2\right)x_2 = \bar{a}_2\left(y^* - \bar{u}\right), \end{aligned} \tag{17}$$

que es el resultado al que llegó Brainard. Las soluciones de (17) son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\left(y^* - \bar{u}\right)\left[\bar{a}_1\left(\sigma_2^2 + \bar{a}_2^2\right) - \bar{a}_2\left(\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \bar{a}_1\bar{a}_2\right)\right]}{\left(\sigma_1^2 + \bar{a}_1^2\right)\left(\sigma_2^2 + \bar{a}_2^2\right) - \left(\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \bar{a}_1\bar{a}_2\right)^2} \\ x_2 &= \frac{\left(y^* - \bar{u}\right)\left[\bar{a}_2\left(\sigma_1^2 + \bar{a}_1^2\right) - \bar{a}_1\left(\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \bar{a}_1\bar{a}_2\right)\right]}{\left(\sigma_1^2 + \bar{a}_1^2\right)\left(\sigma_2^2 + \bar{a}_2^2\right) - \left(\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \bar{a}_1\bar{a}_2\right)^2} \end{aligned} \tag{18}$$

De esta manera el tomador de decisiones puede determinar los valores que los instrumentos deben tener a fin de minimizar el valor esperado de la desviación cuadrática del valor actual del objetivo único respecto a su valor deseado y^*. La solución dada por (18) indica, además, que debe utilizar ambos instrumentos para lograrlo, porque en esta solución intervienen ambos instrumentos con sus respectivos impactos esperados y covarianzas.

1.5 William Poole: Interdependencia entre instrumentos de política monetaria

William Poole analizó un modelo con interdependencia entre dos instrumentos de una misma política: la tasa de interés y la oferta monetaria y en él demuestra que la elección del mejor instrumento de política depende del origen del choque o perturbación que afecte a la economía.

Poole supone que los precios son fijos y utiliza el análisis IS-LM para la determinación de los niveles del producto y de la tasa de interés. Supone, además, que hay choques aleatorios que afectan a la demanda agregada y a la demanda de dinero[11] y que el objetivo que el tomador de decisiones trata de alcanzar es la estabilización del producto al nivel de pleno empleo tanto como sea posible.

Esto implica que se deberá minimizar $(y - y^*)^2$, donde y^* representa al producto de pleno empleo y y es el producto actual.

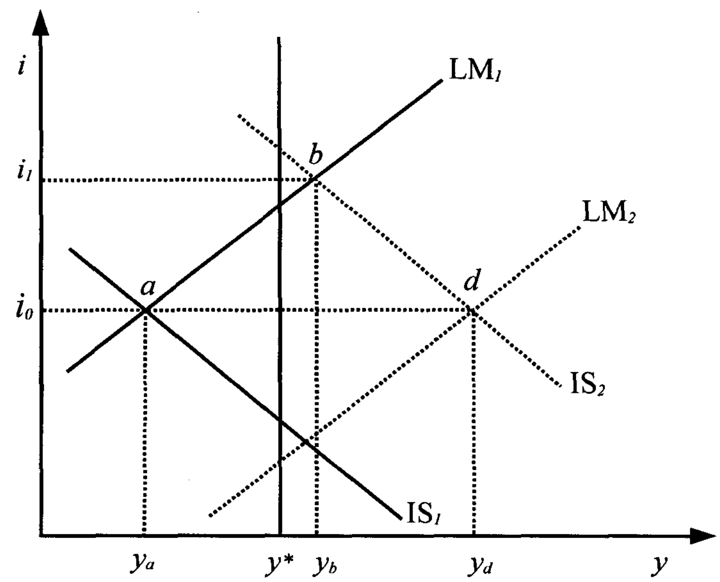
En el modelo se utiliza el análisis IS-LM de Hicks-Hansen y se consideran dos políticas. En la primera la autoridad monetaria determina la oferta monetaria y la mantiene fija y en la segunda establece la tasa de interés y ésta se mantiene fija. En ambos casos la política se selecciona antes de que se conozca el choque específico, es decir antes de que se conozcan los saltos de las curvas IS o LM.

La situación inicial de la economía es el punto a de la gráfica 1.3. La IS recibe un choque y se mueve de IS_1 a IS_2.

---

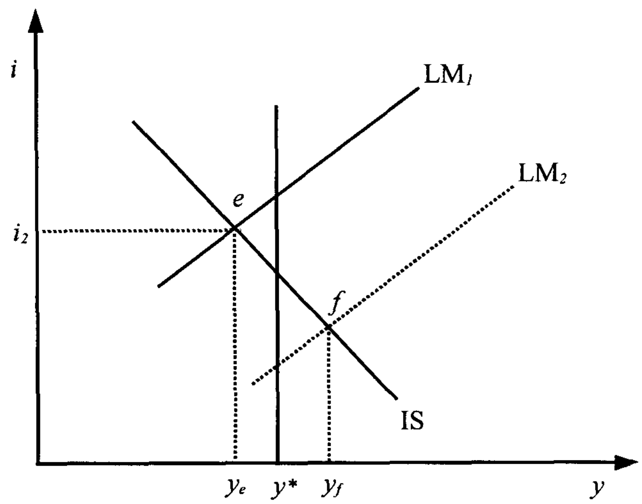
[10] Brainard, William (1967), *op. cit.*
[11] Poole, William (1970), "Optimal Choice of Monetary Policy Instruments in a Simple Stochastic Macro Model", *Quarterly Journal of Economics*, mayo de 1970.

La demanda agregada aumenta y el equilibrio de corto plazo de la economía se localiza en el punto b si la oferta monetaria se mantiene fija, ya que el exceso de demanda de dinero ocasionada por un mayor ingreso será eliminada a través de un aumento de la tasa de interés de i_0 a i_1. De esta manera si la IS se desplaza y se utiliza la oferta monetaria como instrumento, el ingreso variará del nivel y_a al y_b.



Gráfica 1.3 Choque a la IS. Análisis IS-LM

Ahora supongamos que las autoridades usan la tasa de interés i como instrumento de política y la fijan en i_o. Debido a que la IS se desplaza de IS_1 a IS_2 se produce un aumento del ingreso que provoca un exceso de demanda de dinero en el mercado monetario. Como las autoridades deben mantener fija la tasa de interés, esto significa que aumentarán la oferta monetaria hasta que el exceso de demanda sea eliminado, lo que ocurre en el punto *d*. Por lo tanto si se usa la tasa de interés como instrumento, el producto fluctuará entre y_a y y_d.



Gráfica 1.4 Choque a la demanda de dinero. Análisis IS-LM

Debido a que y_d menos y_a es mayor que y_b menos y_a, el producto fluctuará menos si en presencia de choques a la demanda agregada se utiliza la oferta monetaria como instrumento, en lugar de utilizar la tasa de interés.

Ahora supongamos que hay un choque a la demanda de dinero y que ésta se reduce. Si la oferta monetaria se mantiene fija esto significa que habrá un exceso de oferta de dinero a la tasa de interés que prevalecía antes del choque, lo cual equivale a que LM_1 se desplace a LM_2, por lo que el equilibrio se moverá de y_e a y_f (véase la Gráfica 1.4).

Si se usa la tasa de interés como instrumento, los cambios en la demanda de dinero provocarán variaciones equivalentes en la oferta monetaria, LM_1 no se desplazará y el equilibrio del ingreso permanecerá en y_e. De esta forma el producto fluctuará menos en presencia de choques a la demanda de dinero cuando se use la tasa de interés como instrumento, que cuando se utilice la oferta monetaria.

De esta manera podemos concluir que en el modelo de instrumentos interdependientes entre sí analizado por Poole la elección del instrumento que minimiza la varianza del producto dependerá del origen del choque.

Finalmente podemos señalar que el análisis de Poole es aplicable a una economía abierta, sin embargo se requieren dos políticas adicionales para que funcione: una de tipo de cambio fijo y otra de regulación de movimientos de capital. Esto se debe a que con esta regulación la tasa de interés doméstica se podrá ajustar incluso en economías pequeñas y abiertas y el tipo de cambio fijo, por su parte, permitirá que la oferta monetaria se ajuste cuando la tasa de interés esté fija.

1.6 Henderson y Turnovsky: Costos variables derivados del uso de los instrumentos

En un artículo publicado en 1972, *Optimal Macroeconomic Policy Adjustment Under Conditions of Risk*,[12] Henderson y Turnovsky demostraron que la incertidumbre es una condición suficiente pero no necesaria para que el principio de Tinbergen no se aplique. Para ello introdujeron un nuevo elemento en el análisis de W. Brainard: la existencia de costos variables derivados del uso de los instrumentos.

La presencia de estos costos se refleja en el hecho de que es marginalmente costoso —y este costo varía— ajustar los instrumentos para que alcancen sus valores óptimos. Por ejemplo en el caso hipotético de un cambio en la política fiscal, si al aumentar un impuesto los costos que se generan se elevan a medida que el aumento sea mayor, esto significa que hay costos variables derivados de la utilización de este instrumento fiscal.

Más aún, si al usar un instrumento los costos variables son cuadráticos y por lo tanto crecientes, será mejor ajustar varios instrumentos al mismo tiempo, que ajustar uno sólo en una forma más intensa en el mismo periodo y es por esto que el tomador de decisiones necesitará, de acuerdo con Henderson y Turnovsky de la proliferación en el uso de los instrumentos para poder minimizar los costos del ajuste. De esta forma la presencia de costos variables crecientes es condición suficiente pero no necesaria para que el principio de Tinbergen no se aplique.

Henderson y Turnovsky establecieron las condiciones para asegurar la existencia del equilibrio y comprobaron que en la solución de su sistema las raíces características negativas garantizaban la estabilidad del mismo. De esta manera estos autores, al igual que Mundell, no sólo encontraron la solución para que el sistema llegara al equilibrio, sino también el criterio de asignación de los instrumentos para que el sistema retornara al equilibrio cuando se hubiera alejado de él.

[12] Henderson, Dale W. y Stephen J. Turnovsky (1972), "Optimal Macroeconomic Policy Adjustment Under Conditions of Risk", *Journal of Economic Theory*, núm. 4, pp. 58-71.

A continuación se presentará la generalización de un modelo similar al de Henderson-Turnovsky y se demostrará que el tomador de decisiones necesitará todos los instrumentos que estén a su alcance para conseguir de manera óptima un objetivo específico.

1.7 Generalización de un modelo basado en el de Henderson-Turnovsky: Implicaciones de costos variables crecientes derivados del ajuste de los instrumentos en un marco de *M* instrumentos y un objetivo

Basándome en un modelo desarrollado por Stephen J. Turnovsky,[13] transformé uno de Henderson y Turnovsky de dos instrumentos y un objetivo con costos variables crecientes derivados del ajuste de los instrumentos en un modelo más general, con un número irrestricto de instrumentos y un objetivo, en una situación de certidumbre.

La conclusión central del análisis es que ante la presencia de estos costos se necesitará de la proliferación en el uso de los instrumentos para alcanzar el objetivo. Ésta es la misma conclusión a la que arribaron Henderson y Turnovsky en un modelo con incertidumbre multiplicativa, por lo que su existencia es una condición suficiente pero no necesaria para que la política óptima sea la proliferación en el uso de los instrumentos.

Es importante reconocer lo costoso que es usar los instrumentos. Por ejemplo en los países democráticos se necesita la aprobación del Congreso para modificar un impuesto y en general cuanto mayor sea el cambio del instrumento más costoso será ajustarlo. En este caso podría ser más costoso aumentar un impuesto en 20% que aumentarlo en 1% si suponemos que el público y el Congreso se opondrán más al primer ajuste que al segundo.

El costo de aumentar el impuesto puede ser creciente. A fin de modelar esta idea se introdujeron costos variables crecientes derivados del uso de los instrumentos.

[13] Turnovsky, Stephen J. (1977), *Macroeconomic Analysis and Stabilization Policy*, Cambridge University Press, Cambridge, Londres, Nueva York, Melbourne, p. 316. Henderson y Turnovsky propusieron una función objetivo de costos con dos términos más; éstos eran de la forma $mx_i - \frac{1}{2}x_i^2$. Henderson, Dale W. y Stephen J. Turnovsky (1972), op. cit., pp. 59, 60 y 66.

En el modelo que desarrollamos a continuación las x_i representan a los instrumentos y la y al objetivo.

El tomador de decisiones establece como objetivo alcanzar el valor y^*. Al ajustar los instrumentos el objetivo se acerca a su valor óptimo, sin embargo el costo de este ajuste es positivo y creciente y está representado por los valores cuadráticos del cambio de los instrumentos en un instante: $\dot{x}_i$.

Para lograr la minimización de la función de costos $H(t, x_i, \dot{x}_i)$ con los instrumentos x_i es necesario minimizar la función

$$W = \int_0^\infty H(t, x_i, \dot{x}_i)dt = \int_0^\infty \left[b(y - y^*)^2 + c_1\dot{x}_1^2 + c_2\dot{x}_2^2 + \cdots + c_M\dot{x}_M^2\right]e^{-rt}dt \qquad (1)$$

donde r es la tasa de descuento en el tiempo y asume valores en el intervalo entre cero y uno: $0 \leq r \leq 1$ y c_j es un ponderador que refleja el peso relativo de los instrumentos en la función de costos y asume valores mayores que cero: $c_j > 0$ para j = 1, 2, ... , M. La variable c_j también tiene la importante función de convertir las unidades en las que están expresados los instrumentos en la unidad en la que está expresado el objetivo único.

A través de todas las posibles trayectorias de minimización, los instrumentos están sujetos a la siguiente restricción:

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_Mx_M \qquad (2)$$

La función de costos $H(t, x_i, \dot{x}_i)$ depende del tiempo, de los valores de los instrumentos x_i, y de las velocidades $\dot{x}_i$ (i = 1, 2, ... , M) a las que los instrumentos se ajustan a través del tiempo.

El término $\ddot{x}_i$ que aparecerá más adelante representa la tasa de cambio de las velocidades de ajuste de los instrumentos a través del tiempo.

El análisis se hace en tiempo continuo sobre la trayectoria de ajuste al equilibrio y una vez que se encuentran los valores óptimos de los instrumentos x_i^* se analiza el equilibrio estacionario y se identifica la forma en que los términos que aparecen en la solución, esto es, los costos de ajuste u otros, afectan a las x_i^*. De esta forma podremos establecer cuáles políticas son mejores en diferentes situaciones específicas.

Respecto de las $\dot{x}_i$ podemos señalar que dado que en general ninguno de los instrumentos cambia continuamente entonces $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ sería cero la mayor parte del tiempo e infinito siempre que el instrumento cambiara, independientemente del tamaño del cambio. A fin de no caer en esta situación podemos interpretar la derivada como el cambio absoluto de x_i, Δx_i, sobre el cambio en el tiempo, Δt, es decir, como el cambio de x_i en el siguiente periodo dividido por el intervalo en que ocurra el cambio. En este sentido en nuestro análisis no se producen saltos en una trayectoria de ajuste particular y se analizan la convergencia hacia los valores de equilibrio de los instrumentos, así como los factores que afectan a esos valores de equilibrio.

En lo referente a las unidades de medida de las variables podríamos expresar por ejemplo los valores de los objetivos en tasas de crecimiento o en porcentajes respecto al PIB.

Si las ponderaciones de los distintos objetivos en la función de bienestar social son las mismas para todos y cada uno de los ellos, una desviación de 1% del valor deseado en uno de ellos será penalizado de igual manera que la desviación de 1% en el valor deseado de cualquiera de los demás objetivos y lo mismo ocurriría si las desviaciones estuvieran definidas en términos de puntos porcentuales del PIB: una desviación de 1% del PIB del valor deseado de uno de los objetivos sería tan costosa para la sociedad como la desviación de 1% del PIB del valor deseado de cualquiera de los demás objetivos.

Consideremos ahora un ejemplo en donde el tomador de decisiones establezca tres objetivos: una tasa de crecimiento del PIB, una tasa de inflación y un déficit en el saldo de la balanza de la cuenta corriente, como porcentaje del PIB.

Si las ponderaciones de la función de costos respecto de cada una de las tres desviaciones en relación con las metas deseadas son las mismas, un aumento de 1% en términos del PIB del déficit en el saldo de la balanza de la cuenta corriente será penalizado de la misma manera que un aumento de 1% en la inflación.

Aquí es importante hacer notar la simetría de la función cuadrática de costos en relación con las desviaciones de los valores deseados de los objetivos en términos de sus tasas de crecimiento o de porcentajes del PIB. Esta función tiene la característica de que las desviaciones positivas o negativas respecto de los objetivos son equivalentes, de tal manera que un aumento de un punto porcentual del PIB en el déficit o en el superávit de la balanza de la cuenta corriente es equivalente, en términos de la pérdida de bienestar social, a un aumento o a una disminución de un punto porcentual en la tasa de crecimiento del PIB.

En las restricciones que relacionan linealmente los objetivos con los instrumentos se define cómo los instrumentos afectan de manera directa a las tasas de crecimiento de algunos objetivos y de manera indirecta a la tasa de crecimiento de otros.

Los instrumentos que aparecen en las restricciones poseen en general diferentes unidades de medida, por ejemplo la tasa de interés es adimensional y el gasto público, un indicador de la política fiscal, puede medirse en millones de pesos nominales o reales, mientras que el tipo de cambio real o nominal pueden expresarse en términos de un índice.

Los coeficientes que miden el efecto que tienen los instrumentos sobre los objetivos constan de diferentes unidades que convierten las unidades de los instrumentos en unidades de los objetivos.

La función exponencial de la ecuación (1) nos permite expresar la función objetivo en su valor presente. De acuerdo con los valores que puede tomar r, se pueden analizar tres casos:

El primero, cuando r es igual a cero y los costos futuros en la función objetivo $H(t, x_i, \dot{x}_i)$ se valoran igual que los costos presentes.

El segundo, cuando r es mayor que cero y los costos presentes se valoran más que los futuros.

Y el tercero, cuando r es menor que cero y los costos futuros se valoran más que los presentes en la función objetivo $H(t, x_i, \dot{x}_i)$.

Para el tomador de decisiones el segundo caso será, en términos generales, el más relevante.

De la sustitución de (2) en (1) resulta que:

$$W = \int_0^\infty \left[b(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_M x_M - y^*)^2 + c_1 \dot{x}_1^2 + c_2 \dot{x}_2^2 + \cdots + c_M \dot{x}_M^2 \right] e^{-rt} dt \tag{3}$$

El proceso de minimización necesita que la integral en (3) satisfaga las ecuaciones de Euler para cada instrumento con índice $i = 1, 2, ..., M$, esto es, que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \tag{4}$$

Es necesario encontrar las derivadas que aparecen en las ecuaciones de Euler. La primera de las derivadas respecto al tiempo de $\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}$ en la ecuación (4) se aplica solamente a los términos que dependen de $\dot{x}_i^2$.

De esta manera

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left[c_1\dot{x}_1^2 + c_2\dot{x}_2^2 + \cdots + c_M\dot{x}_M^2\right]e^{-rt}\right) = \frac{d}{dt}\left(2c_i\dot{x}_i e^{-rt}\right) = 2c_i\left(\ddot{x}_i - r\dot{x}_i\right)e^{-rt} \tag{5}$$

y la segunda parte de la expresión (4) se aplica sólo a aquellos términos que contienen x_i:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b\left[a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_Mx_M - y^*\right]^2 e^{-rt}\right) \\ &= 2a_ib\left[a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_Mx_M - y^*\right]e^{-rt} \end{aligned} \tag{6}$$

Si sustituimos (5) y (6) en (4) obtendremos M ecuaciones diferenciales de segundo orden, que relacionan dinámicamente el uso de los instrumentos y el valor deseado de los objetivos:

$$\begin{aligned} &c_1\ddot{x}_1 - c_1r\dot{x}_1 - a_1b\left(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_Mx_M - y^*\right) = 0 \\ &c_2\ddot{x}_2 - c_2r\dot{x}_2 - a_2b\left(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_Mx_M - y^*\right) = 0 \\ &\vdots \\ &c_M\ddot{x}_M - c_Mr\dot{x}_M - a_Mb\left(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_Mx_M - y^*\right) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

De acuerdo con Turnovsky[14] la solución estacionaria puede obtenerse del conjunto de ecuaciones (7) haciendo la primera y la segunda derivadas respecto al tiempo iguales a cero, con lo que se anula cada término entre paréntesis en (7).

Si etiquetamos cada instrumento x_k con un asterisco para representar esta solución estacionaria obtenemos

[14] Turnovsky, Stephen J. (1977), *op. cit.*, p. 316.

$$y^* = a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + \cdots + a_M x_M^* \tag{8}$$

Podría parecer que la solución estacionaria (8) no es única, pero en el proceso mostraremos que el valor óptimo de los instrumentos, esto es, de cada una de las x_i^* ($i = 1, 2, ..., M$) depende de los valores iniciales de los instrumentos y de su tasa de cambio en $t = 0$.

Para encontrar una solución de (7) expresaremos el conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo orden no homogéneas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= r\dot{x}_1 + \frac{a_1 a_1 b}{c_1} x_1 + \frac{a_1 a_2 b}{c_1} x_2 + \cdots + \frac{a_1 a_M b}{c_1} x_M - \frac{a_1 b y^*}{c_1} \\
\ddot{x}_2 &= r\dot{x}_2 + \frac{a_2 a_1 b}{c_2} x_1 + \frac{a_2 a_2 b}{c_2} x_2 + \cdots + \frac{a_2 a_M b}{c_2} x_M - \frac{a_2 b y^*}{c_2} \\
&\vdots \\
\ddot{x}_M &= r\dot{x}_M + \frac{a_M a_1 b}{c_M} x_1 + \frac{a_M a_2 b}{c_M} x_2 + \cdots + \frac{a_M a_M b}{c_M} x_M - \frac{a_M b y^*}{c_M}
\end{aligned} \tag{9}$$

Observemos que el conjunto de ecuaciones diferenciales (9) está acoplado: en cada una de las ecuaciones aparecen todos los instrumentos.

Definamos ahora la siguiente transformación para encontrar una solución del conjunto completo de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
u_1 &= x_1 \\
u_2 &= x_2 \\
&\vdots \\
u_M &= x_M \\
u_{M+1} &= \dot{x}_1 = \dot{u}_1 \\
u_{M+2} &= \dot{x}_2 = \dot{u}_2 \\
&\vdots \\
u_{2M} &= \dot{x}_M = \dot{u}_M ,
\end{aligned} \tag{10}$$

con la cual se genera el siguiente conjunto de $2M$ ecuaciones diferenciales no homogéneas de primer orden:

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= u_{M+1} \\
\dot{u}_2 &= u_{M+2} \\
&\vdots \\
\dot{u}_M &= u_{2M} \\
\dot{u}_{M+1} &= \frac{a_1 a_1 b}{c_1} u_1 + \frac{a_1 a_2 b}{c_1} u_2 + \cdots + \frac{a_1 a_M b}{c_1} u_M + r u_{M+1} - \frac{a_1 b y^*}{c_1} \\
\dot{u}_{M+2} &= \frac{a_2 a_1 b}{c_2} u_1 + \frac{a_2 a_2 b}{c_2} u_2 + \cdots + \frac{a_2 a_M b}{c_2} u_M + r u_{M+2} - \frac{a_2 b y^*}{c_2} \\
&\vdots \\
\dot{u}_{2M} &= \frac{a_M a_1 b}{c_M} u_1 + \frac{a_M a_2 b}{c_M} u_2 + \cdots + \frac{a_M a_M b}{c_M} u_M + r u_{2M} - \frac{a_M b y^*}{c_M};
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Si expresamos (11) en forma matricial obtenemos

$$
\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_M \\ \dot{u}_{M+1} \\ \dot{u}_{M+2} \\ \vdots \\ \dot{u}_{2M} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
\frac{a_1 a_1 b}{c_1} & \frac{a_1 a_2 b}{c_1} & \cdots & \frac{a_1 a_M b}{c_1} & r & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{a_2 a_1 b}{c_2} & \frac{a_2 a_2 b}{c_2} & \cdots & \frac{a_2 a_M b}{c_2} & 0 & r & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{a_M a_1 b}{c_M} & \frac{a_M a_2 b}{c_M} & \cdots & \frac{a_M a_M b}{c_M} & 0 & 0 & \cdots & r
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \\ u_{M+1} \\ u_{M+2} \\ \vdots \\ u_{2M} \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{-a_1 b y^*}{c_1} \\ \frac{-a_2 b y^*}{c_2} \\ \vdots \\ \frac{-a_M b y^*}{c_M} \end{pmatrix}
\tag{12}
$$

Ahora bien, para obtener la solución tenemos que encontrar las raíces del polinomio de valores propios[15] definido por el siguiente determinante

[15] El término eigenvalor se aplica a la raíz de una ecuación característica que resuelve una ecuación diferencial particular o a las raíces de una ecuación matricial. Este concepto proviene del alemán *eigenwert*, término usado por autores europeos; sin embargo algunos autores utilizan como sinónimos de este concepto raíz característica, raíz propia, valor propio, valor característico y autovalor. Intuitivamente representa alguna propiedad intrínseca del sistema, por ejemplo el periodo de un fenómeno repetitivo. En la teoría de las ecuaciones diferenciales de segundo orden el valor propio proviene de la sustitución de una solución general de forma exponencial en la ecuación diferencial original [como la (9)], de donde se obtiene la ecuación característica para las lambdas.

$$|\mathrm{L}-\lambda \mathrm{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{a_1 a_1 b}{c_1} & \frac{a_1 a_2 b}{c_1} & \cdots & \frac{a_1 a_M b}{c_1} & r-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_2 a_1 b}{c_2} & \frac{a_2 a_2 b}{c_2} & \cdots & \frac{a_2 a_M b}{c_2} & 0 & r-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_M a_1 b}{c_M} & \frac{a_M a_2 b}{c_M} & \cdots & \frac{a_M a_M b}{c_M} & 0 & 0 & \cdots & r-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

donde L es la matriz de dimensión $2M \times 2M$ en (12) e I la matriz identidad de la misma dimensión.

Para el caso $M = 2$ el determinante (13) no ofrece problema, sin embargo para valores mayores de M el cálculo se dificulta. Por esta razón vamos a resolverlo por inducción parcial. Los casos $M = 2, 3, 5, 8$, fueron calculados por computadora,[16] comprobándose que el polinomio de valores propios tiene la siguiente forma

$$\lambda^{M-1}(r-\lambda)^{M-1}\left[\lambda(r-\lambda)+b\left(\frac{a_1^2}{c_1}+\frac{a_2^2}{c_2}+\cdots+\frac{a_M^2}{c_M}\right)\right]=0 \tag{14}$$

al menos en un intervalo de nuestro interés.

Es evidente que (14) se satisface si

$$\lambda^{M-1}(r-\lambda)^{M-1}=0 \text{ o } \lambda(r-\lambda)+b\left(\frac{a_1^2}{c_1}+\frac{a_2^2}{c_2}+\cdots+\frac{a_M^2}{c_M}\right)=0,$$

de donde las $2M$ raíces características son:

$\lambda = 0$, $\lambda = r$, ambas con multiplicidad M - 1,

$$\lambda = \frac{r}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{r^2+4b\left(\frac{a_1^2}{c_1}+\frac{a_2^2}{c_2}+\cdots+\frac{a_M^2}{c_M}\right)} \tag{15}$$

[16] Con *Mathematica*, versión 2.0 de Wolfram Research Inc., y *MathCad Plus*, versión 6.0 de Math Soft Inc.

$$\lambda = \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + 4b\left(\frac{a_1^2}{c_1} + \frac{a_2^2}{c_2} + \cdots + \frac{a_M^2}{c_M}\right)}$$

La última es la única raíz característica que tiene sentido desde el punto de vista económico, ya que hace que cada instrumento x_i (i = 1, 2, ..., M) tienda a su valor óptimo en el transcurso del tiempo porque como puede observarse, es negativa.

Las soluciones generales son funciones exponenciales de la forma $A_i e^{\lambda t}$, con λ como factor de ajuste, más una solución particular, que para este caso es la solución estacionaria x_i^* que encontramos en (8),

$$x_i(t) = A_i e^{\lambda t} + x_i^* \qquad (16)$$

La tasa de cambio en el tiempo del instrumento i se puede expresar como:

$$\dot{x}_i(t) = \lambda A_i e^{\lambda t} \qquad (17)$$

El valor óptimo del instrumento i se encuentra igualando $t = 0$ en las ecuaciones (16) y (17).

Si los valores iniciales de los instrumentos son $x_{0i} = x_i(t=0)$ y sus tasas de cambio iniciales son $\dot{x}_{0i} = \dot{x}_i(t=0)$, entonces

$$\begin{aligned} x_{0i} - x_i^* &= A_i \\ \dot{x}_{0i} &= \lambda A_i \end{aligned} \qquad (18)$$

de donde

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\dot{x}_{0i}}{\lambda} \\ x_i^* &= x_{0i} - \frac{\dot{x}_{0i}}{\lambda} \end{aligned} \qquad (19)$$

Este par de ecuaciones determina unívocamente el valor de x_i^* y A_i para cada instrumento i, debido a lo cual el conjunto de valores x_i^* (i = 1, 2, ..., M) definido en (8) es único, como se había señalado anteriormente.

Por otra parte el análisis de la raíz característica (15) indica que la solución óptima para cada instrumento requiere de la proliferación en el uso de los mismos.

De esta manera cuando el modelo de Henderson-Turnovsky de dos instrumentos y un objetivo bajo una situación de incertidumbre se transforma en uno muy similar pero con un mayor nivel de generalidad de M instrumentos y un objetivo con certidumbre, ocurre algo interesante: se mantiene la conclusión de Henderson-Turnovsky de que la asignación óptima de los instrumentos es la proliferación en el uso de los mismos.

La expresión (16) significa que la diferencia existente entre los valores iniciales de los instrumentos y sus valores óptimos tiende a cero en el transcurso del tiempo.

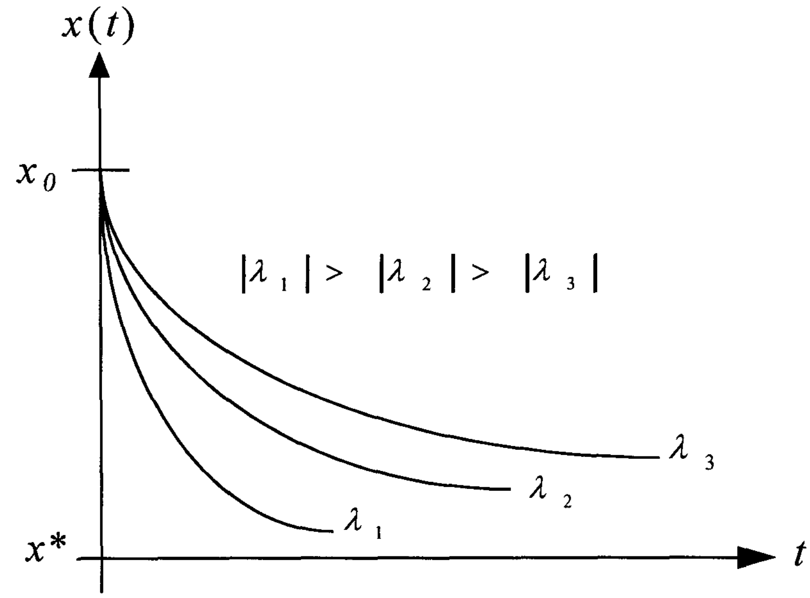
Cambios en el valor absoluto del valor propio λ que es el factor de ajuste implicarán cambios en el tiempo requerido para que los instrumentos alcancen sus valores óptimos.

Según la ecuación (15) el tiempo de ajuste se reducirá si el valor absoluto de λ aumenta y viceversa, el tiempo de ajuste aumentará si el valor absoluto de λ disminuye.[17]

Estos efectos se podrían lograr mediante la incorporación o eliminación de algunos instrumentos de política. Si por ejemplo al agregar más instrumentos λ se hace más negativa, el tiempo de ajuste se reducirá y si al eliminar algunos instrumentos λ se hace menos negativa, entonces el tiempo de ajuste aumentará.

En la Gráfica 1.5 podemos observar cómo al aumentar λ la convergencia del instrumento a su valor óptimo será más rápida.

[17] Consideramos que el tomador de decisiones establece desde el principio que se ha conseguido un objetivo económico si la variable económica asociada a este objetivo alcanza una vecindad del valor deseado. Si esto no estuviera definido podría pensarse que el tiempo de ajuste es infinito, sin importar el valor de las lambdas.



Gráfica 1.5 El tiempo de ajuste del instrumento a través del tiempo: Su relación con el factor de ajuste λ y la convergencia a su valor óptimo

Otros hallazgos interesantes en el análisis del modelo son los siguientes:

1. Cuando existen costos variables crecientes generados por el ajuste de los instrumentos es más costoso ajustar mucho un solo instrumento que modificar ligeramente varios de ellos en el mismo periodo de tiempo.

2. Si desde el principio un instrumento se encuentra en su valor óptimo permanecerá en él y el formulador de política necesitará ajustar únicamente los instrumentos que no estén en sus valores óptimos.

3. En condiciones normales cuando la economía no está sujeta a cambios drásticos y los instrumentos no varían de manera significativa la variación de los costos variables tenderá a minimizarse.

1.8 Ali y Greenbaum: Política de estabilización, incertidumbres multiplicativa y aditiva e introducción de costos fijos generados por el uso de los instrumentos

Ali y Greenbaum[18] generalizaron un modelo de Henderson-Turnovsky e introdujeron un nuevo elemento de análisis en el marco de objetivos e instrumentos: los costos fijos de ajuste derivados del uso de los instrumentos.

En su modelo también incorporaron incertidumbre y costos variables.

Estos autores concluyeron en su análisis que el tomador de decisiones necesitará de sólo un subconjunto de los instrumentos para alcanzar el objetivo. De esta manera el criterio de asignación óptima que se derivaba de su análisis era el de la especialización en el uso de los instrumentos, por lo cual el tomador de decisiones debe introducir los instrumentos uno por uno, según la "intensidad" con la que contribuyan para alcanzar la meta. Esto tiene una gran similitud con el principio de clasificación efectiva de mercado de Mundell.

Otro resultado interesante del modelo de Ali y Greenbaum es que no sería conveniente que las autoridades introdujeran nuevos instrumentos una vez que se alcanzara el valor óptimo de la función objetivo con sólo un subconjunto de ellos.

[18] Ali, Mukhtar M. y Stuart I. Greenbaum (1976), "Stabilization Policy, Uncertainty and Instrument Proliferation", *Economic Inquiry*, núm. 14, pp. 105-115.

CAPÍTULO

2

Desarrollo de nuevos modelos. El modelo general de M instrumentos y N objetivos bajo incertidumbres multiplicativa y aditiva con costos fijos y variables y la introducción de un nuevo elemento: costos de oportunidad crecientes generados por el uso de los instrumentos y el modelo general de M instrumentos y N objetivos con certidumbre, costos de oportunidad crecientes y costos variables y fijos

Los dos modelos que se presentan en este capítulo se desarrollaron con base en elementos aportados por J. Tinbergen, R. Mundell, W. Brainard, Henderson y Turnovsky, y Ali y Greenbaum. Sin embargo además de aglutinar estos elementos en los modelos, éstos se postulan sin restricciones en cuanto al número de instrumentos y objetivos y se introduce un elemento nuevo, que no fue considerado por estos autores: los costos de oportunidad crecientes, generados por el uso de los instrumentos.

Cuando las autoridades utilizan uno o más instrumentos no sólo se pueden generar costos fijos, sino también costos variables y de oportunidad.

Los costos fijos son independientes del nivel de utilización de los instrumentos; los segundos están asociados al nivel al que éstos se usen y los de oportunidad estarán presentes si al utilizar un instrumento para alcanzar un objetivo en particular se sacrifican otro u otros objetivos. Por ejemplo la política de anclar el tipo de cambio puede ser útil en el corto plazo para reducir la inflación, pero si se persiste en esta política podría surgir un fenómeno de sobrevaluación que provocara el sacrificio del equilibrio externo o la agudización del desequilibrio externo. El costo de oportunidad de usar el tipo de cambio para lograr el abatimiento de la inflación sería, en este caso, el sacrificio del equilibrio o el empeoramiento del desequilibrio externo.

2.1 Modelo I: En un contexto de incertidumbres multiplicativa y aditiva con costos fijos, variables y costos de oportunidad crecientes

En este caso la función objetivo $H(t,x_i,\dot{x}_i)$ está asociada al uso de los instrumentos y se puede expresar como:

$$H=\left(\sum_{i=1}^{N}\left\{\underbrace{b_i\left[y_i-y_i^{*}\right]^2}_{\substack{\text{costo ponderado de}\\ \text{la desviación cuadrática de}\\ \text{los valores de los objetivos}\\ \text{respecto a sus valores}\\ \text{deseados}}}+\sum_{j=1}^{M}\underbrace{c_{ij}\dot{x}_j^2}_{\substack{\text{costos de}\\ \text{oportunidad}\\ \text{de los}\\ \text{instrumentos}}}\right\}+\sum_{j=1}^{M}\underbrace{\left(c_j\dot{x}_j^2+2d_jx_j\right)}_{\substack{\text{costos variables y fijos de los}\\ \text{instrumentos}}}\right)e^{-rt} \qquad (1)$$

donde r es la tasa de descuento en el tiempo y asume valores en el intervalo $0 \le r \le 1$.

El parámetro b_i representa la importancia o ponderación que tiene el objetivo i en la función-objetivo *H*. Como $\sum_{i=1}^{N} b_i = 1$ los objetivos pueden tener igual o diferente ponderación y tomarán un valor mayor que cero y menor que uno. La desviación respecto a un objetivo deseado como una tasa de crecimiento del PIB podría ser penalizada más, igual o menos, que la desviación respecto a una meta inflacionaria.

La función *H* contiene, asimismo, los objetivos y_i y los valores socialmente deseados de éstos: los y_i^{*}.

Las incertidumbres multiplicativa y aditiva se introducen mediante las *N* condiciones entre los *M* instrumentos x_j y los *N* objetivos y_i, que pueden depender de uno, varios o todos los instrumentos: Además $a_{ij} \geq 0$ para toda i (i = 1, 2, …, N) y para toda j (j = 1, 2, …, M) y $a_{ij} > 0$ para al menos una j y para toda i. Esto implica que $\bar{a}_{ij} \geq 0$ para toda i (i = 1, 2, …, N) y para toda j (j = 1, 2, …, M) y $\bar{a}_{ij} > 0$ para al menos una j y para toda i.

$$y_i = \sum_{j=1}^{M} a_{ij} x_j + u_i \text{ donde } i = 1, 2, ..., N. \tag{2}$$

La variable aleatoria a_{ij} representa el efecto que tiene el instrumento j (x_j) sobre el objetivo i (y_i) y transforma las unidades de los instrumentos en unidades de los objetivos, mientras que u_i representa la incertidumbre aditiva.

Algunas situaciones en las cuales se presenta el fenómeno de incertidumbre multiplicativa son, por ejemplo, cuando se modifica la tasa de interés doméstica y no se conoce con certeza cuál va a ser su efecto sobre el ahorro, o cuando se lleva a cabo un cambio en la política fiscal y no se conoce con certeza cuál va a ser su efecto sobre la inversión (aumentar los impuestos al capital puede desestimular la inversión, sin embargo no se sabe con certeza cuánto va a desestimularla).

Con incertidumbre aditiva la relación entre los instrumentos y los objetivos de política se mantiene, pero cambia de nivel si esta incertidumbre se altera en el sistema. Cambios muy insignificantes en los precios del petróleo o en las tasas de interés internacionales pueden producir choques de incertidumbre aditiva en una economía como la de México y alteraciones muy importantes en estas variables le pueden provocar choques de incertidumbre multiplicativa.

Si intercambiamos el orden en la doble sumatoria que contiene los términos de los costos de oportunidad, tenemos que $\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{M} c_{ij}\dot{x}_j^2\right) = \sum_{j=1}^{M}\left(\sum_{i=1}^{N} c_{ij}\dot{x}_j^2\right)$.

Agrupando los términos en el segundo paréntesis, se obtiene la siguiente expresión:

$$H = \sum_{i=1}^{N} b_i\left[y_i - y_i^*\right]^2 e^{-rt} + \sum_{j=1}^{M}\left(c_j\dot{x}_j^2 + \sum_{i=1}^{N} c_{ij}\dot{x}_j^2 + 2d_j x_j \right)e^{-rt} \tag{3}$$

que puede interpretarse como una función de costo social en la cual los elementos de c_j representan a los costos variables generados por el uso de los instrumentos y son no negativos y los c_{ij} se identifican como los costos de oportunidad generados por el uso de los instrumentos j (j = 1, 2, ..., M) para alcanzar los objetivos i (i = 1, 2, ..., N). Se asume que los costos de oportunidad son cero o positivos, esto es, se supone que $c_{ij} \geq 0$ para toda i y para toda j, y por lo menos uno de ellos es positivo; $d_j \geq 0$ para toda j. Los supuestos establecidos respecto a los costos variables y de oportunidad implican que $\left[c_j + \sum_{i=1}^{N} c_{ij} \right] > 0$.

En el sistema de equilibrio general [véanse ecuaciones (1) y (2)] es posible identificar los efectos cruzados o colaterales de los instrumentos en los objetivos a través de las relaciones que se postulan entre ellos, con los coeficientes de las restricciones en las N ecuaciones que relacionan linealmente a los instrumentos con los objetivos.

Sin embargo en este sistema no se capturan costos de oportunidad crecientes.

En el Modelo I con incertidumbre y en el Modelo II con certidumbre de este capítulo incorporaremos costos de oportunidad derivados del uso de los instrumentos.

Para ilustrar el contraste entre los diferentes tipos de costos derivados del uso de los instrumentos en la función H consideremos que:

a) El *costo de oportunidad* (de un instrumento en la expresión $c_{ij}\dot{x}_j^2$) puede interpretarse como el costo en que se incurre cuando se dirige uno de los instrumentos para lograr un objetivo, pero a la vez se provoca un efecto indeseado que es creciente, en otro u otros objetivos alternativos. Por ejemplo si al utilizar el tipo de cambio para lograr el equilibrio en la balanza de la cuenta corriente los precios aumentan en forma creciente a través del tiempo, éste sería un fenómeno de costo de oportunidad crecientes derivados del uso del tipo de cambio.

   Es conveniente destacar que en los modelos I y II de este capítulo cada uno de los elementos de c_{ij} es mayor o igual a cero y los costos de oportunidad tienen una característica especial, ya que son positivos y crecientes, excepto cuando son nulos.

Los costos de oportunidad derivados del uso de los instrumentos se modelan en los modelos I y II como una función cuadrática de la derivada de los instrumentos respecto al tiempo.

Los efectos cruzados o colaterales incorporados en el sistema de ecuaciones de equilibrio general que se obtienen de las ecuaciones (1) y (2) de este capítulo relacionan linealmente a los instrumentos con los objetivos y son los coeficientes de efecto a_{ij} considerados como parámetros conocidos en el modelo con certidumbre y como variables aleatorias, cuyos valores esperados son conocidos, en el modelo con incertidumbre.

En los modelos I y II de este capítulo consideraremos no sólo los efectos colaterales positivos y lineales o nulos (las a_{ij}) contenidos en el sistema de ecuaciones de equilibrio general (1) y (2) sino también efectos colaterales positivos y crecientes y al incluirlos tomamos en cuenta la posibilidad de que exista un intercambio (*trade-off*) creciente entre los objetivos o posibilidad de que al acercarnos a uno de ellos esto provoque el sacrificio de otro u otros, en forma creciente. Esto da lugar a la posibilidad de que exista lo que denominamos dilema en el uso de un instrumento, cuando existen costos de oportunidad positivos y crecientes derivados de su uso.

En la función general de costos (H) los costos de oportunidad están representados por los términos $\sum_{j=1}^{M} c_{ij}\dot{x}_j^2$.

b) El *costo variable* [de un instrumento en la expresión $c_j\dot{x}_j^2$ en la función general de costos H] es una función de la derivada respecto al tiempo, de ese instrumento. Por ejemplo al modificar un impuesto se pueden generar costos variables. Cuando un impuesto al consumo aumenta 10% en un año, se puede generar un costo diferente al que se produce si éste aumenta 100% en el mismo periodo. Si suponemos que la oposición al aumento en este impuesto genera un costo creciente y se comporta como una función cuadrática respecto al tiempo, entonces éste podría expresarse como un costo variable o un $c_j\dot{x}_j^2$ en la función H.

c) El *costo fijo* (de uno de los instrumentos en la expresión $d_j x_j$) está asociado al costo que se mantiene invariable cuando cambia el nivel al que se utiliza el instrumento.

De esta manera podemos puntualizar que en los modelos I y II habría:

- Costos variables, que son costos directos.
- Costos de oportunidad, que se generan a través de efectos indirectos o efectos cruzados de los instrumentos sobre los objetivos. Existen además otros efectos cruzados representados por coeficientes que relacionan a los instrumentos con los objetivos. En una situación de certidumbre éstos son efectos representados por parámetros constantes y en una de incertidumbre son variables aleatorias cuyos valores esperados son conocidos.
- Las a_{ij} son mayores o iguales que cero y por lo menos una es mayor que cero. Las $\bar{a}_{ij}$ o valores esperados de las a_{ij} también serían mayores o iguales a cero y al menos una mayor que cero.
- Costos fijos, que son nulos o positivos y son independientes de los cambios en los instrumentos, ya que no se alteran al modificar el nivel al que éstos se utilizan.

Con la sustitución de (2) en (3) la función H se transforma en:

$$H = \sum_{i=1}^{N} b_i \left[\sum_{j=1}^{M} a_{ij} x_j + u_i - y_i^* \right]^2 e^{-rt} + \sum_{j=1}^{M} \left(c_j x_j^2 \quad + \quad \sum_{i=1}^{N} c_{ij} x_j^2 \quad + 2 d_j x_j \right) e^{-rt}$$

Si sumamos y restamos los valores esperados $\bar{a}_{ij} x_j$ (para cada *j*) y $\bar{u}_i$ en los corchetes, el valor de la función H no cambia, lo cual nos permite obtener expresiones simétricas en términos de cantidades estadísticas conocidas como varianzas, covarianzas y coeficientes de correlación. Con esto la función H adopta la siguiente forma:

$$H=\sum_{i=1}^{N}b_i\left[\sum_{j=1}^{M}\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)x_j+\left(u_i-\bar{u}_i\right)+\sum_{j=1}^{M}\bar{a}_{ij}x_j+\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)\right]^2 e^{-rt}$$
$$+\sum_{j=1}^{M}\left(c_j\dot{x}_j^2+\sum_{i=1}^{N}c_{ij}\dot{x}_j^2+2d_jx_j\right)e^{-rt}$$

El término entre corchetes que está elevado a la segunda potencia puede expresarse como el producto de dos polinomios. Para ello es necesario introducir otro índice k a fin de tomar en cuenta los términos cruzados del producto, como puede verse en la siguiente expresión:

$$\left[\sum_{j=1}^{M}\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)x_j+\left(u_i-\bar{u}_i\right)+\sum_{j=1}^{M}\bar{a}_{ij}x_j+\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)\right]^2=$$
$$=\left[\sum_{j=1}^{M}\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)x_j+\left(u_i-\bar{u}_i\right)+\sum_{j=1}^{M}\bar{a}_{ij}x_j+\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)\right]\times$$
$$\times\left[\sum_{k=1}^{M}\left(a_{ik}-\bar{a}_{ik}\right)x_k+\left(u_i-\bar{u}_i\right)+\sum_{k=1}^{M}\bar{a}_{ik}x_k+\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{M}\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)\left(a_{ik}-\bar{a}_{ik}\right)x_jx_k+\left(u_i-\bar{u}_i\right)^2+2\left(u_i-\bar{u}_i\right)\sum_{j=1}^{M}\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)x_j$$
$$+\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{M}\bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}x_jx_k+\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)^2+2\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)\sum_{j=1}^{M}\bar{a}_{ij}x_j+2\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{M}\bar{a}_{ik}\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)x_jx_k$$
$$+2\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)\sum_{j=1}^{M}\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)x_j+2\left(u_i-\bar{u}_i\right)\sum_{j=1}^{M}\bar{a}_{ij}x_j+2\left(u_i-\bar{u}_i\right)\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{M}\left[\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)\left(a_{ik}-\bar{a}_{ik}\right)+2\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)\bar{a}_{ik}+\bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]x_jx_k+$$
$$+2\sum_{j=1}^{M}\left[\left(u_i-\bar{u}_i\right)\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)+\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)+\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)\bar{a}_{ij}+\left(u_i-\bar{u}_i\right)\bar{a}_{ij}\right]x_j+$$
$$+\left(u_i-\bar{u}_i\right)^2+2\left(u_i-\bar{u}_i\right)\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)+\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)^2$$

Ahora la función H puede escribirse como

$$
\begin{aligned}
H=\sum_{i=1}^{N} b_i \{ & \sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{M}\left[\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)\left(a_{ik}-\bar{a}_{ik}\right)+2\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)\bar{a}_{ik}+\bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]x_j x_k + \\
& +2\sum_{j=1}^{M}\left[\left(u_i-\bar{u}_i\right)\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)+\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)+\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)\bar{a}_{ij}+\left(u_i-\bar{u}_i\right)\bar{a}_{ij}\right]x_j + \\
& +\left(u_i-\bar{u}_i\right)^2+2\left(u_i-\bar{u}_i\right)\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)+\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)^2\}e^{-rt}+\sum_{j=1}^{M}\left(c_j\dot{x}_j^2+\sum_{i=1}^{N}c_{ij}\dot{x}_j^2+2d_jx_j\right)e^{-rt}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Siguiendo el método de Henderson y Turnovsky[1] calculamos el valor esperado de (4). Para esto es necesario usar el coeficiente de correlación y la varianza y covarianza definidos por las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\left(a_{ij}\right)=\mathrm{E}\left[\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)^2\right]=\sigma^2\left(a_{ij}\right) \\
&\mathrm{Cov}\left(a_{ij},a_{ik}\right)=\mathrm{E}\left[\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)\left(a_{ik}-\bar{a}_{ik}\right)\right]=\sigma\left(a_{ij}\right)\sigma\left(a_{ik}\right)\rho\left(a_{ij},a_{ik}\right)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

El valor esperado de H se obtiene de (4) usando (5) pero sin pasar por alto que el momento central de primer orden es igual a cero para toda función de distribución —expresiones como $\mathrm{E}\left[\left(a_{ij}-\bar{a}_{ij}\right)\right]$—;[2]

$$
\begin{aligned}
\bar{H}=\sum_{i=1}^{N} b_i & \left\{\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{M}\left[\sigma\left(a_{ij}\right)\sigma\left(a_{ik}\right)\rho\left(a_{ij},a_{ik}\right)+\bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]x_j x_k\right. \\
& \left.+2\sum_{j=1}^{M}\left[\sigma\left(u_i\right)\sigma\left(a_{ij}\right)\rho\left(u_i,a_{ij}\right)+\bar{a}_{ij}\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)\right]x_j+\sigma^2\left(u_i\right)+\left(\bar{u}_i-y_i^*\right)^2\right\}e^{-rt} \\
& +\sum_{j=1}^{M}\left(c_j\dot{x}_j^2+\sum_{i=1}^{N}c_{ij}\dot{x}_j^2+2d_jx_j\right)e^{-rt}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

donde $\sigma\left(u_i\right)$ es la desviación estándar de la incertidumbre aditiva u_i; $\sigma\left(a_{ik}\right)$ es la desviación estándar de a_{ik}, y $\rho\left(u_i,a_{ik}\right)$ es el factor de correlación entre la incertidumbre aditiva u_i y el instrumento *k* dirigido al objetivo *i*; $\sigma\left(u_i\right)\sigma\left(a_{ik}\right)\rho\left(u_i,a_{ik}\right)$ es la covarianza entre la incertidumbre aditiva u_i y el instrumento *k* dirigido al objetivo *i*; $\bar{a}_{ik}$ es el impacto esperado del instrumento *k* sobre el objetivo *i;* $\bar{u}_i$ es el valor esperado de la incertidumbre aditiva u_i;

[1] Henderson, Dale W. y Stephen J. Turnovsky (1972), art. cit.
[2] Gnedenko, B. V. (1968), *The Theory of Probability*, 4ª ed., Chelsea, Nueva York, p. 225.

$\sigma(a_{ij})\sigma(a_{ik})\rho(a_{ij},a_{ik})$ es la covarianza entre los instrumentos k y j cuando ambos se usan para alcanzar el objetivo i; y_i^* es el valor del objetivo i deseado por la sociedad; b_i refleja la importancia relativa del objetivo i, y d_k es el costo fijo que se genera al utilizar el instrumento k.

La condición necesaria y suficiente para minimizar la función objetivo $\overline{H}$ es que ésta debe satisfacer las ecuaciones de Euler para cada instrumento x_k ($k = 1, 2, ..., M$),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial \overline{H}}{\partial x_k} = 0 \tag{7}$$

La primera parte de (7) opera sólo sobre los términos de (6) que dependen de la tasa de cambio del instrumento en el tiempo, $\dot{x}_j$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial \dot{x}_k}\right) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}\left\{\sum_{j=1}^{M}\left[c_j\dot{x}_j^2 + \sum_{i=1}^{N} c_{ij}\dot{x}_j^2\right]\right\}e^{-rt}\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left[\left(2c_k\dot{x}_k + 2\sum_{i=1}^{N} c_{ik}\dot{x}_k\right)e^{-rt}\right] = 2\left[c_k\ddot{x}_k + \sum_{i=1}^{N} c_{ik}\ddot{x}_k - r\left(c_k\dot{x}_k + \sum_{i=1}^{N} c_{ik}\dot{x}_k\right)\right]e^{-rt} \\
&= 2\left[\left(c_k + \sum_{i=1}^{N} c_{ik}\right)\ddot{x}_k - r\left(c_k + \sum_{i=1}^{N} c_{ik}\right)\dot{x}_k\right]e^{-rt}
\end{aligned} \tag{8}$$

La segunda parte de (7) opera sólo sobre los términos de (6) que dependen de los instrumentos x_j:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{H}}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\left[\sigma(a_{ij})\sigma(a_{il})\rho(a_{ij},a_{il}) + \bar{a}_{ij}\bar{a}_{il}\right]x_j x_l\right. \\
&\left. + 2\sum_{j=1}^{M}\left[\sigma(u_i)\sigma(a_{ij})\rho(u_i,a_{ij}) + \bar{a}_{ij}(\bar{u}_i - y_i^*)\right]x_j\right\}e^{-rt} + \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{j=1}^{M} 2d_j x_j e^{-rt} \\
&= 2\sum_{i=1}^{N} b_i\left\{\sum_{j=1}^{M}\left[\sigma(a_{ij})\sigma(a_{ik})\rho(a_{ij},a_{ik}) + \bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]x_j + \left[\sigma(u_i)\sigma(a_{ik})\rho(u_i,a_{ik}) + \bar{a}_{ik}(\bar{u}_i - y_i^*)\right]\right\}e^{-rt} \\
&+ 2d_k e^{-rt}
\end{aligned} \tag{9}$$

Con las expresiones (8) y (9) divididas entre $2e^{-rt}$ se pueden escribir las M ecuaciones de Euler de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}&\left(c_k+\sum_{i=1}^{N}c_{ik}\right)\ddot{x}_k-r\left(c_k+\sum_{i=1}^{N}c_{ik}\right)\dot{x}_k\\&\quad-\sum_{i=1}^{N}b_i\left\{\sum_{j=1}^{M}\left[\sigma(a_{ij})\sigma(a_{ik})\rho(a_{ij},a_{ik})+\bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]x_j+\left[\sigma(u_i)\sigma(a_{ik})\rho(u_i,a_{ik})+\bar{a}_{ik}(\bar{u}_i-y_i^*)\right]\right\}\\&\quad-d_k=0\end{aligned}\tag{10}$$

para $k = 1, 2, ..., M$.

Distribuyendo la suma en los corchetes y cambiando el orden de los sumandos obtenemos

$$\begin{aligned}&\left(c_k+\sum_{i=1}^{N}c_{ik}\right)\ddot{x}_k-r\left(c_k+\sum_{i=1}^{N}c_{ik}\right)\dot{x}_k\\&\quad-\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}b_i\left[\sigma(a_{ij})\sigma(a_{ik})\rho(a_{ij},a_{ik})+\bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]x_j\\&\quad-\sum_{i=1}^{N}b_i\left[\sigma(u_i)\sigma(a_{ik})\rho(u_i,a_{ik})+\bar{a}_{ik}(\bar{u}_i-y_i^*)\right]-d_k=0\end{aligned}\tag{11}$$

para $k = 1, 2, ..., M$.

2.1.1 La solución estacionaria

Los niveles óptimos de los instrumentos —soluciones estacionarias— se obtienen de (11) para cada $k = 1, 2, ..., M$, igualando a cero la primera y segunda derivadas de los instrumentos respecto al tiempo, $\dot{x}_k = 0$, $\ddot{x}_k = 0$. De esta manera (11) se reduce a

$$\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}b_i\left[\sigma(a_{ij})\sigma(a_{ik})\rho(a_{ij},a_{ik})+\bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]x_j=-\sum_{i=1}^{N}b_i\left[\sigma(u_i)\sigma(a_{ik})\rho(u_i,a_{ik})+\bar{a}_{ik}(\bar{u}_i-y_i^*)\right]-d_k$$

En esta expresión se puede observar que la incertidumbre aditiva y los costos fijos influyen sobre los valores óptimos de los instrumentos. Por otra parte si la correlación entre las incertidumbres multiplicativa y aditiva es nula y el valor esperado $\bar{u}_i$ de la incertidumbre aditiva también es cero, esta última no afectará los valores óptimos de los instrumentos y éste es un resultado interesante.

Si hacemos la sustitución:

$p_{kj} = \sum_{i=1}^{N} b_i \left[\sigma(a_{ij})\sigma(a_{ik})\rho(a_{ij}, a_{ik}) + \bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]$ y $q_k = -\sum_{i=1}^{N} b_i \left[\sigma(u_i)\sigma(a_{ik})\rho(u_i, a_{ik}) + \bar{a}_{ik}(\bar{u}_i - y_i^*)\right] - d_k$, se obtiene una forma más simple:

$$\sum_{j=1}^{M} p_{kj} x_j = q_k$$

para $k = 1, 2, \ldots, M$.

Desplegando la expresión anterior tenemos que

$$\begin{aligned} p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \cdots + p_{1M}x_M &= q_1 \\ p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{2M}x_M &= q_2 \\ &\vdots \\ p_{M1}x_1 + p_{M2}x_2 + \cdots + p_{MM}x_M &= q_M, \end{aligned} \tag{12}$$

el cual es un sistema lineal no homogéneo de M ecuaciones con M incógnitas, que tiene una solución única si el determinante de la matriz $P = (p_{kj})$ no es nulo, esto es, si

$$|P| = |p_{kj}| = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{1M} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1M} & p_{2M} & \cdots & p_{MM} \end{vmatrix} \neq 0$$

De esta manera, marcando esta solución con un asterisco obtenemos la solución estacionaria:

$$x_j^* = \frac{\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1,j-1} & q_1 & p_{1,j+1} & \cdots & p_{1M} \\ p_{21} & \cdots & p_{2,j-1} & q_2 & p_{2,j+1} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & \cdots & p_{M,j-1} & q_M & p_{M,j+1} & \cdots & p_{MM} \end{vmatrix}}{|P|} \tag{13}$$

para $j = 1, 2, \ldots, M$.

2.1.2 La solución general

Para simplificar la ecuación (11) primero llevaremos acabo la siguiente sustitución[3]

$$h_k = \left(c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk} \right) \tag{14}$$

$$f_{kj} = \sum_{i=1}^{N} b_i \left[\sigma(a_{ij}) \sigma(a_{ik}) \rho(a_{ij}, a_{ik}) + \bar{a}_{ij} \bar{a}_{ik} \right] \tag{15}$$

$$g_{kj} = \frac{\sum_{i=1}^{N} b_i \left[\sigma(a_{ij}) \sigma(a_{ik}) \rho(a_{ij}, a_{ik}) + \bar{a}_{ij} \bar{a}_{ik} \right]}{c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}} = \frac{f_{kj}}{h_k} \tag{16}$$

$$s_k = \frac{\sum_{i=1}^{N} b_i \left[\sigma(u_i) \sigma(a_{ik}) \rho(u_i, a_{ik}) + \bar{a}_{ik} (\bar{u}_i - y_i^*) \right] + d_k}{c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}} \tag{17}$$

Agrupemos los términos de (11) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_k = {} & \sum_{j=1}^{M} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} b_i \left[\sigma(a_{ij}) \sigma(a_{ik}) \rho(a_{ij}, a_{ik}) + \bar{a}_{ij} \bar{a}_{ik} \right]}{c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}} \right) x_j + r\dot{x}_k \\ & + \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} b_i \left[\sigma(u_i) \sigma(a_{ik}) \rho(u_i, a_{ik}) + \bar{a}_{ik} (\bar{u}_i - y_i^*) \right] + d_k}{c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}} \right) \end{aligned} \tag{18}$$

a fin de obtener el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales de segundo grado para $k = 1, 2, \ldots, M$,

$$\ddot{x}_k = \sum_{j=1}^{M} g_{kj} x_j + r\dot{x}_k + s_k \tag{19}$$

---

[3] Para evitar que se confundan los índices de las sumatorias, cambiamos la i por la l en la expresión de h_k.

Este sistema de M ecuaciones diferenciales (19) está acoplado, porque en cada una de ellas aparecen todos los instrumentos. Para encontrar una solución de este sistema, definamos la transformación

$$\begin{aligned}
u_1 &= x_1 \\
u_2 &= x_2 \\
&\vdots \\
u_M &= x_M \\
u_{M+1} &= \dot{x}_1 = \dot{u}_1 \\
u_{M+2} &= \dot{x}_2 = \dot{u}_2 \\
&\vdots \\
u_{2M} &= \dot{x}_M = \dot{u}_M ,
\end{aligned} \tag{20}$$

que produce el siguiente sistema de $2M$ ecuaciones diferenciales no homogéneas de primer orden:

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= u_{M+1} \\
\dot{u}_2 &= u_{M+2} \\
&\vdots \\
\dot{u}_M &= u_{2M} \\
\dot{u}_{M+1} &= g_{11}u_1 + g_{12}u_2 + \cdots + g_{1M}u_M + ru_{M+1} + s_1 \\
\dot{u}_{M+2} &= g_{21}u_1 + g_{22}u_2 + \cdots + g_{2M}u_M + ru_{M+2} + s_2 \\
&\vdots \\
\dot{u}_{M+M} &= g_{M1}u_1 + g_{M2}u_2 + \cdots + g_{MM}u_M + ru_{M+M} + s_M
\end{aligned} \tag{21}$$

En forma matricial, (21) se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_M \\ \dot{u}_{M+1} \\ \dot{u}_{M+2} \\ \vdots \\ \dot{u}_{M+M} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1M} & r & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2M} & 0 & r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{M1} & g_{M2} & \cdots & g_{MM} & 0 & 0 & \cdots & r \end{array}\right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \\ u_{M+1} \\ u_{M+2} \\ \vdots \\ u_{M+M} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_M \end{pmatrix} \tag{22}$$

donde hemos hecho la partición de la matriz para esclarecer las relaciones expresadas en (21).

La solución del sistema (22) requiere encontrar las raíces del polinomio característico definido por el determinante

$$
|L-\lambda I| = \left|\begin{array}{cccc:cccc}
-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
\hdashline
g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1M} & r-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\
g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2M} & 0 & r-\lambda & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
g_{M1} & g_{M2} & \cdots & g_{MM} & 0 & 0 & \cdots & r-\lambda
\end{array}\right| = 0, \tag{23}
$$

donde L es la matriz de $2M \times 2M$ en (22) e I es la matriz identidad de la misma dimensión. Para facilitar el cálculo del determinante (23), podemos multiplicar las columnas $M+1$, $M+2$, ..., $2M$ por λ y obtener

$$
|L-\lambda I| = \frac{1}{\lambda^M}\left|\begin{array}{cccc:cccc}
-\lambda & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & \lambda \\
\hdashline
g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1M} & \lambda(r-\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\
g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2M} & 0 & \lambda(r-\lambda) & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
g_{M1} & g_{M2} & \cdots & g_{MM} & 0 & 0 & \cdots & \lambda(r-\lambda)
\end{array}\right| = 0 \tag{24}
$$

Si sumamos la columna 1 a la columna $M+1$, la columna 2 a la columna $M+2$, ..., la columna M a la columna $2M$, el determinante característico que se obtiene es el siguiente:

$$
\frac{1}{\lambda^M}\left|\begin{array}{cccc:cccc}
-\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hdashline
g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1M} & \lambda(r-\lambda)+g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1M} \\
g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2M} & g_{21} & \lambda(r-\lambda)+g_{22} & \cdots & g_{2M} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
g_{M1} & g_{M2} & \cdots & g_{MM} & g_{M1} & g_{M2} & \cdots & \lambda(r-\lambda)+g_{MM}
\end{array}\right| = 0, \tag{25}
$$

que resuelto por menores es

$$|L - I\lambda| = \frac{(-\lambda)^M}{\lambda^M} \begin{vmatrix} \lambda(r-\lambda) + g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1M} \\ g_{21} & \lambda(r-\lambda) + g_{22} & \cdots & g_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{M1} & g_{M2} & \cdots & \lambda(r-\lambda) + g_{MM} \end{vmatrix} = 0 \qquad (26)$$

Recuperando la fórmula (16), $g_{kj} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} b_i\left[\sigma(a_{ij})\sigma(a_{ik})\rho(a_{ij}, a_{ik}) + \bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]}{c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}} = \dfrac{f_{kj}}{h_k}$, el determinante (26)

puede expresarse de la siguiente forma:

$$|L - I\lambda| = (-1)^M \begin{vmatrix} \lambda(r-\lambda) + \dfrac{f_{11}}{h_1} & \dfrac{f_{12}}{h_1} & \cdots & \dfrac{f_{1M}}{h_1} \\ \dfrac{f_{21}}{h_2} & \lambda(r-\lambda) + \dfrac{f_{22}}{h_2} & \cdots & \dfrac{f_{2M}}{h_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{f_{M1}}{h_M} & \dfrac{f_{M2}}{h_M} & \cdots & \lambda(r-\lambda) + \dfrac{f_{MM}}{h_M} \end{vmatrix} = 0 \qquad (27)$$

Se requiere de una última operación para escribir el determinante característico en forma simétrica.

Factorizando h_1 del primer renglón, h_2 del segundo renglón, ..., h_M del renglón M, se obtiene la siguiente expresión:

$$|L - I\lambda| = \frac{(-1)^M}{h_1 h_2 \cdots h_M} \begin{vmatrix} \lambda(r-\lambda)h_1 + f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1M} \\ f_{21} & \lambda(r-\lambda)h_2 + f_{22} & \cdots & f_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{M1} & f_{M2} & \cdots & \lambda(r-\lambda)h_M + f_{MM} \end{vmatrix} = 0 \qquad (28)$$

Este determinante es de suma importancia, ya que con él se define el polinomio característico y se obtienen las raíces con las que el sistema puede caracterizarse en términos de sus parámetros: los efectos esperados de los instrumentos sobre los objetivos, los costos de usar los instrumentos, la correlación entre los efectos de los instrumentos sobre los objetivos, las desviaciones estándar de los coeficientes que relacionan los instrumentos con los objetivos, las brechas entre los valores iniciales de los instrumentos y sus valores óptimos y las ponderaciones de cada uno de los objetivos.

Las soluciones que se proponen para el sistema de ecuaciones de (11) son de la forma $x_i^* + A_i e^{\lambda_i t}$ para $i = 1, 2, ..., M$. Sin embargo no es sencillo obtener una solución del polinomio característico cuando el número de instrumentos es muy grande, debido a que el determinante (28) define un polinomio en λ de grado $2M$ que sólo es fácil de resolver para valores de M pequeños o para formas especiales de los coeficientes del polinomio.

Las raíces características asociadas a las soluciones propuestas están dadas por la siguiente expresión:

$$\lambda_k = \frac{r}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + \frac{4\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} A_j b_i \left[\sigma(a_{ij})\sigma(a_{ik})\rho(a_{ij}, a_{ik}) + \bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]}{A_k\left(c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}\right)}} \tag{29}$$

Escogiendo el signo negativo del radical de (29) a fin de garantizar que el sistema converja al equilibrio y que éste sea estable tenemos que:

$$\lambda_k = \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + \frac{4\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} A_j b_i \left[\sigma(a_{ij})\sigma(a_{ik})\rho(a_{ij}, a_{ik}) + \bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]}{A_k\left(c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}\right)}} \tag{30}$$

Las soluciones propuestas tienen como solución particular los valores estacionarios de los instrumentos x_j^* de (13), de tal forma que

$$x_j(t) - x_j^* = A_j e^{\lambda_j t} \tag{31}$$

La caracterización completa de las soluciones para cada instrumento se obtiene determinando las constantes A_j que se encuentran a partir del valor del instrumento en $t = 0$ en la expresión (31):

$$A_j = x_{0j} - x_j^*, \tag{32}$$

donde $j = 1, 2, ..., M$ y $x_{0j} = x_j(t = 0)$. De esta forma todas las constantes en (30) y (31) estarán determinadas, lo que significa que las soluciones estarán completamente caracterizadas.

2.1.3 Análisis de las soluciones

Hay tres elementos en las soluciones cuyo significado conviene resaltar:

- Las x_j^* son los niveles óptimos de los instrumentos que el tomador de decisiones trata de alcanzar.
- Las A_j representan las diferencias entre los valores iniciales de los instrumentos y sus valores óptimos x_j^*.

  Si $A_j > 0$ en (32), esto significa que el nivel óptimo del instrumento j será menor al que tenía inicialmente. Si en cambio $A_j < 0$ el nivel óptimo del instrumento j será mayor al que tenía inicialmente.
- Las λ_k están relacionadas con el tiempo de ajuste de los instrumentos, es decir, con el tiempo que se requiere para que los instrumentos alcancen sus valores óptimos.

  Existen dos tipos de raíces de λ_k, cada uno con implicaciones distintas en términos de la convergencia del sistema al equilibrio.

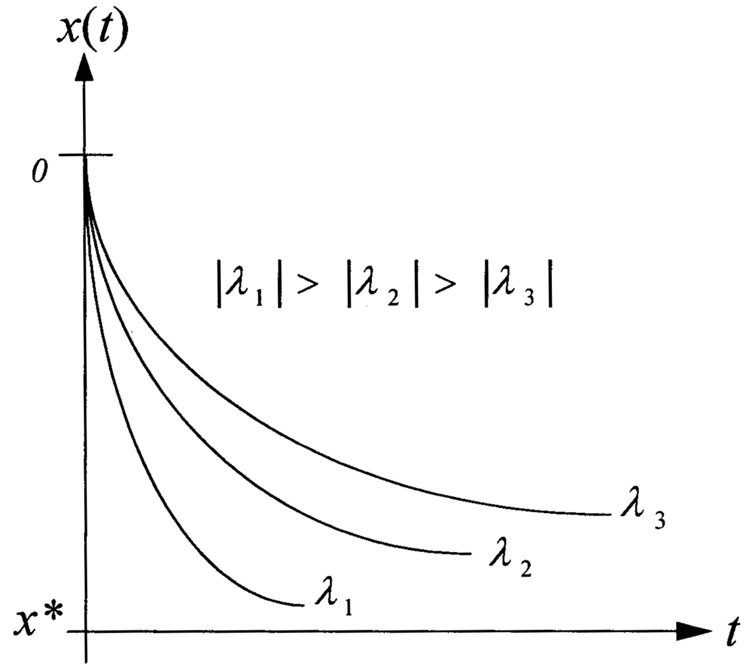
2.1.4 Estabilidad e inestabilidad del equilibrio

Con la expresión (30) podemos analizar la estabilidad e inestabilidad del equilibrio.

- Si las raíces características dadas por (30) son positivas y una perturbación desequilibra el sistema, las brechas entre los valores iniciales de los instrumentos y sus valores óptimos en la expresión (31) aumentarán sin límite a medida que transcurra el tiempo, lo cual impedirá que se alcancen los valores óptimos de los instrumentos. En este caso el sistema se alejará cada vez más del equilibrio y éste será inestable.

Las raíces características o factores de ajuste que nos interesan en (30) son las que tienen valores negativos, ya que las trayectorias asociadas con raíces negativas harán que el sistema converja al equilibrio, cuando una perturbación lo saque de él y las brechas entre los valores iniciales de los instrumentos y sus valores óptimos disminuirán con el transcurso del tiempo.

Nótese que a medida que el valor absoluto de λ es mayor, el instrumento converge más rápido hacia su valor óptimo (véase Gráfica 2.1).



Gráfica 2.1 Convergencia de los instrumentos hacia su valor óptimo

Tomando la derivada de λ_k respecto a r en (30) obtenemos

$$\frac{d\lambda_k}{dr} = \frac{1}{2} - \frac{r}{2\left(r^2 + K\right)^{1/2}}, \tag{33}$$

donde hemos hecho la sustitución

$$K = \frac{4\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} A_j b_i \left[\sigma\left(a_{ij}\right)\sigma\left(a_{ik}\right)\rho\left(a_{ij}, a_{ik}\right) + \bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]}{A_k\left(c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}\right)}$$

Debido a que $0 < r < 1$, si suponemos que

$$K > 0, \tag{34}$$

entonces $r^2 + K > r^2$. Después de dividir la desigualdad entre su lado izquierdo $1 > \frac{r^2}{(r^2+K)}$.

Tomando la raíz cuadrada y multiplicando por $\frac{1}{2}$ obtenemos $\frac{1}{2} > \frac{r}{2(r^2+K)^{1/2}}$, de donde resulta que

$$\frac{1}{2} - \frac{r}{2(r^2+K)^{1/2}} > 0 \tag{35}$$

Usando (34) y tomando en cuenta (35) en la derivada (33), resulta que

$$\frac{d\lambda_k}{dr} > 0 \tag{36}$$

Lo anterior significa que si la tasa de descuento r aumenta, entonces el tiempo del ajuste de los instrumentos para que lleguen a sus valores óptimos aumentará porque λ_k se hará menos negativa, lo cual puede intuirse fácilmente: si r aumenta significa que se valorarán menos las desviaciones futuras de los valores deseados de los objetivos que las desviaciones en el presente y por lo tanto el ajuste hacia el equilibrio será más lento.

2.1.5 Condiciones para la existencia de raíces características negativas

El análisis del modelo con incertidumbre que se llevó a cabo en la sección 2.1 nos lleva a concluir que para asegurarnos de la existencia de raíces características negativas en la expresión (30)

$$\lambda_k = \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + \frac{4\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} A_j b_i\left[\sigma(a_{ij})\sigma(a_{ik})\rho(a_{ij},a_{ik}) + \bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]}{A_k\left(c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}\right)}}$$

es necesario que el radicando de esta expresión, esto es, que $\frac{4\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} A_j b_i\left[\sigma(a_{ij})\sigma(a_{ik})\rho(a_{ij},a_{ik}) + \bar{a}_{ij}\,\bar{a}_{ik}\right]}{A_k\left(c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}\right)}$ sea positivo. Dado que los términos $\sigma(a_{ij})$ y $\sigma(a_{ik})$

son positivos, y que se hicieron los supuestos de que $0 < r < 1$, $0 < b_i < 1$ para toda *i*, y que $\left[c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}\right] > 0$, entonces los signos de A_j, A_k, $\bar{a}_{ij}$ $\bar{a}_{ik}$ y $\rho(a_{ij}, a_{ik})$ para toda *i* y toda *j* deben ser tales que el radicando de la expresión (30) sea positivo. Además, los impactos de los instrumentos sobre los objetivos representados por las a_{ij} deben estar distribuidos independientemente a través del tiempo.

2.1.6 Costos de oportunidad e incertidumbre multiplicativa

Considerando únicamente las λ_k negativas procederemos ahora al análisis de la ecuación (30). Como se puede observar en esta ecuación hay dos elementos claves que determinan los factores de ajuste de los instrumentos (λ_k): por una parte los costos de oportunidad derivados del uso de los instrumentos que afectan de manera inversa el valor absoluto de las λ_k y por otra parte la incertidumbre multiplicativa, que lo afecta de manera directa.

Suponiendo que A_j y A_k tienen el mismo signo y que $\rho(a_{ij}, a_{ik}) > 0$, dado que establecimos que $0 < r < 1$, $0 < b_i < 1$, $\left[c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}\right] > 0$ para toda *k* y que $\bar{a}_{ij}$ y $\bar{a}_{ik}$ son positivos, procederemos a analizar cuál es el papel que tienen los costos de oportunidad y la incertidumbre multiplicativa en la determinación de los factores de ajuste de los instrumentos de política.

Si tenemos una situación inicial de equilibrio en el sistema y *r*, b_i, A_j, A_k, c_k y $\bar{a}_{ij}$ y $\bar{a}_{ik}$ permanecen constantes, si la incertidumbre multiplicativa aumenta de manera excepcional el criterio de asignación óptima de los instrumentos es el de la proliferación. En cambio si los costos de oportunidad constituyen la fuerza relativa predominante en el sistema, *vis à vis* la incertidumbre multiplicativa, el criterio de asignación óptima de los instrumentos es el de la especialización.

2.1.7 Independencia de los instrumentos

A continuación analizaremos dos condiciones que aseguran la independencia entre los instrumentos. Supongamos que las a_{ij} en la ecuación (2) son funciones de distribución normal de la forma $N\left(\bar{a}_{ij}, \sigma_{ij}^2\right)$, sin correlaciones cruzadas entre los instrumentos. De esta manera

$$\rho\left(a_{ij}, a_{ik}\right) = \rho_{ij,ik} = \begin{cases} 1, & \text{para } j = k \\ 0, & \text{para } j \neq k \end{cases}$$

Entonces la raíz característica (30) tomará la forma

$$\lambda_k = \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + \frac{4\sum_{i=1}^{N} A_k b_i \left[\sigma_{ik}^2 \rho_{ik,ik} + \sum_{j=1}^{M} \bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]}{A_k\left(c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}\right)}} = \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + \frac{4\sum_{i=1}^{N} b_i \left[\sigma_{ik}^2 + \sum_{j=1}^{M} \bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]}{\left(c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}\right)}} \quad (37),$$

El tiempo de ajuste de los instrumentos para que éstos lleguen a sus valores óptimos se reducirá o $|\lambda_k|$ aumentará si *ceteris paribus* los costos de oportunidad de los instrumentos aumentan.

2.2 Modelo II: En un contexto de certidumbre con costos fijos, costos variables y costos de oportunidad crecientes

La función objetivo está dada por

$$H = \left(\sum_{i=1}^{N} \left\{ \underbrace{b_i\left(y_i - y_i^{*}\right)^2}_{\substack{\text{costo ponderado de} \\ \text{la desviación cuadrática} \\ \text{de los valores de los} \\ \text{objetivos respecto a sus} \\ \text{valores deseados}}} + \sum_{j=1}^{M} \underbrace{c_{ij}\dot{x}_j^2}_{\substack{\text{costos de} \\ \text{oportunidad de} \\ \text{los instrumentos}}} \right\} + \sum_{j=1}^{M} \underbrace{c_j\dot{x}_j^2}_{\substack{\text{costos} \\ \text{variables de los} \\ \text{instrumentos}}} + 2\sum_{j=1}^{M} \underbrace{d_j x_j}_{\substack{\text{costos fijos} \\ \text{de los} \\ \text{instrumentos}}} \right) e^{-rt} \quad (38)$$

Los términos en (38) tienen el mismo significado que en el modelo inserto en un contexto de incertidumbre, excepto por las relaciones entre los M instrumentos x_j y los N objetivos y_i:

$$y_i = \sum_{j=1}^{M} a_{ij} x_j \quad (39)$$

A diferencia del modelo I, en el modelo II la relación entre instrumentos y objetivos es conocida con certeza y las incertidumbres aditiva y multiplicativa no están presentes en el sistema. También se supone que $0 \leq r \leq 1$, $0 < b_i < 1$, $\Sigma b_i = 1$ (i = 1, 2, …, N), $a_{ij} \geq 0$ para toda i (i = 1, 2, …, N) y para toda j (j = 1, 2, …, M) y $a_{ij} > 0$ para al menos una j y para toda i, $c_j \geq 0$ para toda j (j = 1, 2, …, M), $c_{ij} \geq 0$ i (i = 1, 2, …, N) y j (j = 1, 2, …, M) y $c_{ij} > 0$ para al menos una j y para toda i, $d_j \geq 0$ (j = 1, 2, …, M).

Con el cambio en el orden de la doble sumatoria de los términos que representan los costos de oportunidad y agrupando éstos en el segundo paréntesis, se obtiene

$$H = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{b_i \left[y_i - y_i^* \right]^2} e^{-rt} + \sum_{j=1}^{M} \left(c_j \dot{x}_j^2 + \sum_{i=1}^{N} c_{ij} \dot{x}_j^2 + 2 d_j x_j \right) e^{-rt} \tag{40}$$

Sustituyendo (39) en (40) la función H se puede expresar como

$$H = \sum_{i=1}^{N} b_i \left[\sum_{j=1}^{M} a_{ij} x_j - y_i^* \right]^2 e^{-rt} + \sum_{j=1}^{M} \left(c_j \dot{x}_j^2 + \sum_{i=1}^{N} c_{ij} \dot{x}_j^2 + 2 d_j x_j \right) e^{-rt} \tag{41}$$

Las M ecuaciones de Euler (k = 1, 2, ... , M) se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\left(c_k + \sum_{i=1}^{N} c_{ik} \right) \left(\ddot{x}_k - r \dot{x}_k \right) - \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} a_{ik} a_{ij} b_i x_j + \sum_{i=1}^{N} a_{ik} b_i y_i^* - d_k = 0 \tag{42}$$

2.2.1 La solución estacionaria

Los valores óptimos de los instrumentos —soluciones estacionarias— se obtienen de (42) igualando a cero la primera y segunda derivadas de los instrumentos respecto al tiempo, haciendo $\dot{x}_k = \ddot{x}_k = 0$. Con ello

$$\sum_{j=1}^{M} \left(\sum_{i=1}^{N} a_{ik} a_{ij} b_i \right) x_j - \sum_{i=1}^{N} a_{ik} b_i y_i^* + d_k = 0 \tag{43}$$

La sustitución $p_{kj} = \sum_{i=1}^{N} a_{ik} a_{ij} b_i$ y $q_k = \sum_{i=1}^{N} a_{ik} b_i y_i^* - d_k$ ayuda a expresar (43) como

$$\sum_{j=1}^{M} p_{kj} x_j = q_k, \tag{44}$$

que es un sistema lineal de M ecuaciones con M incógnitas, con una solución única si el determinante de $P = \left(p_{kj}\right)$ es diferente de cero.

Al igual que en la sección 2.1 podemos resolver para x_j:

$$x_j^* = \frac{\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1,j-1} & q_1 & p_{1,j+1} & \cdots & p_{1M} \\ p_{21} & \cdots & p_{2,j-1} & q_2 & p_{2,j+1} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & \cdots & p_{M,j-1} & q_M & p_{M,j+1} & \cdots & p_{MM} \end{vmatrix}}{|P|} \tag{45}$$

2.2.2 Cálculo de soluciones

La ecuación (42) se puede expresar como:

$$\ddot{x}_k - r\dot{x}_k - \sum_{j=1}^{M} g_{kj} x_j - s_k = 0, \tag{46}$$

si consideramos que:

$$g_{kj} = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_{ik} a_{ij} b_i}{c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}}, \qquad s_k = \frac{-\sum_{i=1}^{N} a_{ik} b_i y_i^* + d_k}{c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}},$$

$$f_{kj} = \sum_{i=1}^{N} a_{ik} a_{ij} b_i, \qquad h_k = c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk} \tag{47}$$

entonces las soluciones son funciones exponenciales como las expresadas en (31) y las raíces características negativas garantizarán trayectorias convergentes del sistema al equilibrio. Los factores de ajuste en el tiempo de los instrumentos o raíces características con signo negativo estarán dadas por:

$$\lambda_k = \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + 4\sum_{j=1}^{M} g_{kj}\frac{A_j}{A_k}}$$

$$= \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + \frac{4\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} A_j b_i a_{ik} a_{ij}}{A_k\left(c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}\right)}} \qquad (48)$$

De esta expresión podemos derivar, para propósitos de ilustración, las primeras dos raíces características negativas:

$$\lambda_1 = \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + \frac{4a_{11}b_1\left(A_1a_{11} + A_2a_{12} + \cdots + A_Ma_{1M}\right)}{A_1\left(c_1 + c_{11} + c_{21} + \cdots + c_{N1}\right)} + \frac{4a_{21}b_2\left(A_1a_{21} + A_2a_{22} + \cdots + A_Ma_{2M}\right)}{A_1\left(c_1 + c_{11} + c_{21} + \cdots + c_{N1}\right)} + \cdots \frac{4a_{N1}b_N\left(A_1a_{N1} + A_2a_{N2} + \cdots + A_Ma_{NM}\right)}{A_1\left(c_1 + c_{11} + c_{21} + \cdots + c_{N1}\right)}}$$

$$\lambda_2 = \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + \frac{4a_{12}b_1\left(A_1a_{11} + A_2a_{12} + \cdots + A_Ma_{1M}\right)}{A_2\left(c_2 + c_{12} + c_{22} + \cdots + c_{N2}\right)} + \frac{4a_{22}b_2\left(A_1a_{21} + A_2a_{22} + \cdots + A_Ma_{2M}\right)}{A_2\left(c_2 + c_{12} + c_{22} + \cdots + c_{N2}\right)} + \cdots \frac{4a_{N2}b_N\left(A_1a_{N1} + A_2a_{N2} + \cdots + A_Ma_{NM}\right)}{A_2\left(c_2 + c_{12} + c_{22} + \cdots + c_{N2}\right)}}$$

Es conveniente destacar algunos puntos acerca de las soluciones del modelo II con certidumbre:

- Si un instrumento j no tiene costos variables ni de oportunidad, esto afectará la expresión $\sum_{j=1}^{M} c_j x_j + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij} x_j$ en la función H y la solución óptima para el instrumento j estará dada por la expresión (45).
- Si consideramos sólo las λ_k con valores negativos para garantizar que el sistema converja al equilibrio y que éste sea estable y suponemos a fin de simplificar el análisis que A_j y A_k tienen el mismo signo y que $b_i = 1$ (i = 1, 2, ... N), el valor absoluto de λ_k será mayor mientras mayores sean los impactos de los instrumentos en los objetivos en relación a los costos variables y de oportunidad derivados del uso de los instrumentos y éstos convergerán más rápido a sus valores óptimos.
- De la ecuación (48) se puede observar que si suponemos que A_j y A_k tienen el mismo signo, que $0 < r < 1$ y que los costos variables derivados del uso de los instrumentos son positivos y muy insignificantes, si los costos de oportunidad derivados del uso de los instrumentos son muy elevados en relación a los impactos de éstos sobre los objetivos, el

criterio de asignación óptima de los instrumentos será el de la especialización en el uso de los mismos.

2.3 Certidumbre e incertidumbre: El caso límite

En el límite, cuando la incertidumbre desaparece completamente, los resultados del análisis del modelo con incertidumbre son iguales a los del modelo bajo certidumbre.

A medida que la incertidumbre multiplicativa disminuye y tiende a cero, el entorno económico se hace menos incierto para los agentes económicos y con el transcurso del tiempo y las desviaciones estándares de los efectos de los instrumentos tienden a cero.

En el límite los valores de los efectos esperados de los instrumentos $\bar{a}_{ij}$ se convierten en valores conocidos a_{ij} y en consecuencia la matriz de incertidumbre multiplicativa se convierte en una matriz de parámetros conocidos.

Por otra parte si la incertidumbre aditiva tiende a cero, $\sigma(u_i)$, $\rho(u_i, a_{ik})$ y $\bar{u}_i$ también tenderán a cero y en el límite $\sigma(u_i) = 0$, $\rho(u_i, a_{ik}) = 0$ y los valores esperados $\bar{u}_i$ se convierten en valores conocidos u_i.

En la sección 2.2 de este capítulo se exploró el modelo general de M instrumentos y N objetivos en un contexto de certidumbre y se mostró que el valor del factor de ajuste en el tiempo del instrumento k era:

$$\lambda_k = \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + \frac{4\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} A_j b_i a_{ik} a_{ij}}{A_k\left(c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}\right)}} \tag{49}$$

y el nivel óptimo del mismo instrumento era:

$$x_k^* = \frac{\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1,k-1} & q_1 & p_{1,k+1} & \cdots & p_{1M} \\ p_{21} & \cdots & p_{2,k-1} & q_2 & p_{2,k+1} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & \cdots & p_{M,k-1} & q_M & p_{M,k+1} & \cdots & p_{MM} \end{vmatrix}}{|P|} \tag{50}$$

En el modelo general en un contexto de incertidumbres multiplicativa y aditiva, los eigenvalores eran:

$$\lambda_k = \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + \frac{4\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} A_j b_i \left[\sigma(a_{ij})\sigma(a_{ik})\rho(a_{ij}, a_{ik}) + \bar{a}_{ij}\bar{a}_{ik}\right]}{A_k\left(c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}\right)}} \tag{51}$$

con una expresión similar a (50) para el nivel óptimo de los instrumentos.

Ahora bien, si suponemos que las incertidumbres multiplicativa y aditiva disminuyen y tienden a cero, en la expresión (55) ocurre el siguiente fenómeno:

- $\bar{a}_{ij} \to a_{ij}$ y $\bar{a}_{ik} \to a_{ik}$ y los valores esperados de los efectos de los instrumentos sobre los objetivos tienden a valores conocidos.
- $\sigma(a_{ij}) \to 0$ y $\sigma(a_{ik}) \to 0$ y las desviaciones estándares de los efectos de los instrumentos sobre las variables objetivo tienden a cero. En el límite, cuando estas desviaciones estándar toman exactamente el valor de cero, los valores de los efectos de los instrumentos se transforman en cantidades conocidas y la incertidumbre multiplicativa que está asociada al uso de los instrumentos desaparece.
- $\rho(a_{ij}, a_{ik}) \to 0$ y la correlación entre los instrumentos *j* y *k* tiende a cero.

En el límite, cuando las incertidumbres ya no existen, los factores de ajuste del modelo general en un contexto de incertidumbre —véase la expresión (51)— se convierten en los factores de ajuste del modelo general en un contexto de certidumbre —véase la expresión (49)—.

De manera similar, si $\sigma(u_i) \to 0$, $\rho(u_i, a_{ik}) \to 0$ y $\bar{u}_i \to 0$ y en el límite alcanzan el valor de cero, la expresión algebraica para el nivel óptimo del instrumento k en un contexto de incertidumbre será la misma que la expresión algebraica para su nivel óptimo en un contexto de certidumbre.

Por lo tanto cuando los niveles de incertidumbre multiplicativa y aditiva en el entorno económico se reducen a cero, el tomador de decisiones podrá conocer la relación exacta entre los instrumentos y los objetivos y los resultados del análisis del modelo en un contexto de incertidumbre serán los mismos que los del modelo en un contexto de certidumbre.

CAPÍTULO

3

El principio de la ventaja comparativa en el uso de los instrumentos de política económica

De los dos modelos generales que se analizaron en las secciones 2.1 y 2.2 del capítulo anterior se deriva el principio de la ventaja comparativa en el uso de los instrumentos (PCAUI) o principio de asignación eficiente de mercado. Éste puede aplicarse tanto en una situación de certidumbre como en una de incertidumbre.

Con el propósito de ilustrar este principio y contrastarlo con el de clasificación efectiva de mercado de Mundell analizaremos el modelo general II del capítulo 2, para el caso de dos instrumentos y dos objetivos. La relación entre ellos está dada por el siguiente conjunto de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Aunque en este sistema haya cuatro raíces características, se analizarán únicamente las dos que tienen valores negativos con el propósito de garantizar que el sistema converja al equilibrio.

$$\lambda_1=\frac{r}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{r^2+\frac{4\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}A_jb_ia_{i1}a_{ij}}{A_1\left(c_1+\sum_{l=1}^{2}c_{l1}\right)}}$$

$$=\frac{r}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{r^2+\frac{4\left[A_1\left(b_1a_{11}^2+b_2a_{21}^2\right)+A_2\left(b_1a_{11}a_{12}+b_2a_{21}a_{22}\right)\right]}{A_1\left(c_1+c_{11}+c_{21}\right)}} \qquad (2)$$

$$\lambda_2=\frac{r}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{r^2+\frac{4\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}A_jb_ia_{i2}a_{ij}}{A_2\left(c_2+\sum_{l=1}^{2}c_{l2}\right)}}$$

$$=\frac{r}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{r^2+\frac{4\left[A_1\left(b_1a_{12}a_{11}+b_2a_{22}a_{21}\right)+A_2\left(b_1a_{12}^2+b_2a_{22}^2\right)\right]}{A_2\left(c_2+c_{12}+c_{22}\right)}} \qquad (3)$$

Para simplificar el análisis supongamos que los efectos de cada uno de los instrumentos sobre cada uno de los objetivos son positivos, que los costos variables y los de oportunidad también lo son, que la tasa de descuento es igual a cero ($r=0$), que las A_i tienen el mismo signo y son iguales, y que $b_i=1$ para $i=1,2$.

Con estos supuestos los factores de ajuste en el tiempo tendrán la siguiente forma:

$$\lambda_1=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\left[\left(a_{11}^2+a_{21}^2\right)+\left(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}\right)\right]}{\left(c_1+c_{11}+c_{21}\right)}}=-\sqrt{\frac{\left(a_{11}^2+a_{21}^2\right)+\left(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}\right)}{\left(c_1+c_{11}+c_{21}\right)}} \qquad (4)$$

$$\lambda_2=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\left[\left(a_{12}a_{11}+a_{22}a_{21}\right)+\left(a_{12}^2+a_{22}^2\right)\right]}{\left(c_2+c_{12}+c_{22}\right)}}=-\sqrt{\frac{\left(a_{12}a_{11}+a_{22}a_{21}\right)+\left(a_{12}^2+a_{22}^2\right)}{\left(c_2+c_{12}+c_{22}\right)}} \qquad (5)$$

El tomador de decisiones deberá asignar los instrumentos de acuerdo a su ventaja comparativa para alcanzar el equilibrio. Para ello se deben comparar los cocientes de (4) y (5) e identificar cuál de ellos es mayor. Supongamos que $|\lambda_1|>|\lambda_2|$ entonces

$$\frac{\left(a_{11}^2+a_{21}^2\right)+\left(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}\right)}{\left(c_1+c_{11}+c_{21}\right)}>\frac{\left(a_{12}a_{11}+a_{22}a_{21}\right)+\left(a_{12}^2+a_{22}^2\right)}{\left(c_2+c_{12}+c_{22}\right)} \qquad (6)$$

En particular si el numerador del cociente del lado izquierdo de la desigualdad (6) es por lo menos de igual magnitud que el numerador del cociente del lado derecho, el denominador del cociente del lado izquierdo debe ser menor que el del lado derecho para que se cumpla la desigualdad. Entonces si

$$\left[\left(a_{11}^2+a_{21}^2\right)+\left(a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}\right)\right]\geq\left[\left(a_{12}a_{11}+a_{22}a_{21}\right)+\left(a_{12}^2+a_{22}^2\right)\right]$$

es decir, si

$$\left(a_{11}^2+a_{21}^2\right)\geq\left(a_{12}^2+a_{22}^2\right), \tag{7}$$

los efectos del instrumento 1 sobre los objetivos 1 y 2 son mayores que los del instrumento 2 sobre los mismos objetivos. Se puede asegurar que (6) se satisfaga, si se cumple (7) y al mismo tiempo se cumple la siguiente condición: que la suma de los costos variables y de oportunidad asociados al instrumento 1 sea menor a la suma de los costos variables y de oportunidad asociados al instrumento 2, esto es, que

$$\left(c_1+c_{11}+c_{21}\right)<\left(c_2+c_{12}+c_{22}\right) \tag{8}$$

Un análisis similar se puede hacer para el caso en el que el numerador del cociente del lado izquierdo de la desigualdad (6) sea mayor que el numerador del cociente del lado derecho. En este caso el denominador del cociente del lado izquierdo de la desigualdad debe ser por lo menos de la misma magnitud que el denominador del cociente del lado derecho. La condición que se debe cumplir para que un instrumento tenga ventaja comparativa sobre otro —definida en relación a su factor de ajuste— es que el cociente del lado izquierdo de (6) sea diferente al del lado derecho. Más aún, el análisis se puede extender a más de dos instrumentos y a más de dos objetivos.

Por lo tanto en un modelo de dos instrumentos y dos objetivos en una situación de certidumbre un instrumento tendrá ventaja comparativa en relación a otro si por ejemplo sus efectos sobre los objetivos son de igual o superior magnitud que los del otro y al mismo tiempo tiene costos variables y de oportunidad menores que los del otro.

Es conveniente subrayar que el principio de Mundell está basado en un criterio que considera únicamente el efecto relativo de los instrumentos sobre los objetivos en un contexto de certidumbre sin analizar los costos derivados del uso de los instrumentos.[1]

En contraste el principio de la ventaja comparativa en el uso de los instrumentos que propongo se basa no sólo en la comparación de los efectos relativos de los instrumentos sobre los objetivos, sino también en la comparación de los costos relativos derivados de su uso en un contexto de certidumbre o incertidumbre, lo cual implica llevar a cabo un análisis no sólo de eficacia, sino de eficiencia. Por esta razón se identifica al PCAUI como principio de clasificación eficiente de mercado de la misma forma que el análisis de eficacia condujo a Mundell a establecer su principio de clasificación efectiva de mercado.

La ilustración del PCAUI en un modelo con incertidumbre es más compleja. En la expresión (30) podemos observar que en el numerador del cociente del radicando figuran, entre otros elementos, los efectos esperados de los instrumentos sobre los objetivos más las covarianzas de los mismos y en el denominador se encuentran la sumatoria de los costos variables y los de oportunidad. Si tomamos en consideración únicamente las λ_k con valores negativos y suponemos que solo hay dos objetivos y dos instrumentos, si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ entonces podemos señalar que el instrumento 1 tiene ventaja comparativa *vis à vis* el segundo.

En la Figura 3.1 se presentan los elementos que determinan los factores de ajuste de los instrumentos λ_k en el modelo general I con incertidumbres multiplicativa y aditiva y en el modelo II con certidumbre. Éstos determinan a su vez la ventaja comparativa de los instrumentos de política. Los elementos son: la tasa de descuento en el tiempo (r), la importancia o ponderación de cada uno de los objetivos económicos que se pretenden alcanzar, el signo y la magnitud de los efectos conocidos o esperados de los instrumentos en los objetivos, las varianzas

[1] En el modelo de Mundell la relación entre instrumentos y objetivos está definida por $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$, donde i = 1, 2. La y_i es el objetivo *i*, y x_j es el instrumento *j* (*j=1, 2*). El principio de clasificación efectiva de mercado establece que si $\frac{a_{11}}{a_{21}} > \frac{a_{12}}{a_{22}}$ entonces el instrumento 1 tiene ventaja relativa —en términos de eficacia— sobre el instrumento 2 para lograr el objetivo 1 y el instrumento 2 tiene ventaja relativa sobre el instrumento 1 para lograr el objetivo 2 y por lo tanto el instrumento 1 debe usarse para el objetivo 1 y el instrumento 2 para el objetivo 2 y en esto consiste la asignación efectiva de mercado de Mundell.

y covarianzas de los efectos de los instrumentos en los objetivos, los costos variables y de oportunidad derivados del uso de los instrumentos y las diferencias entre los valores iniciales de los instrumentos y sus valores óptimos.

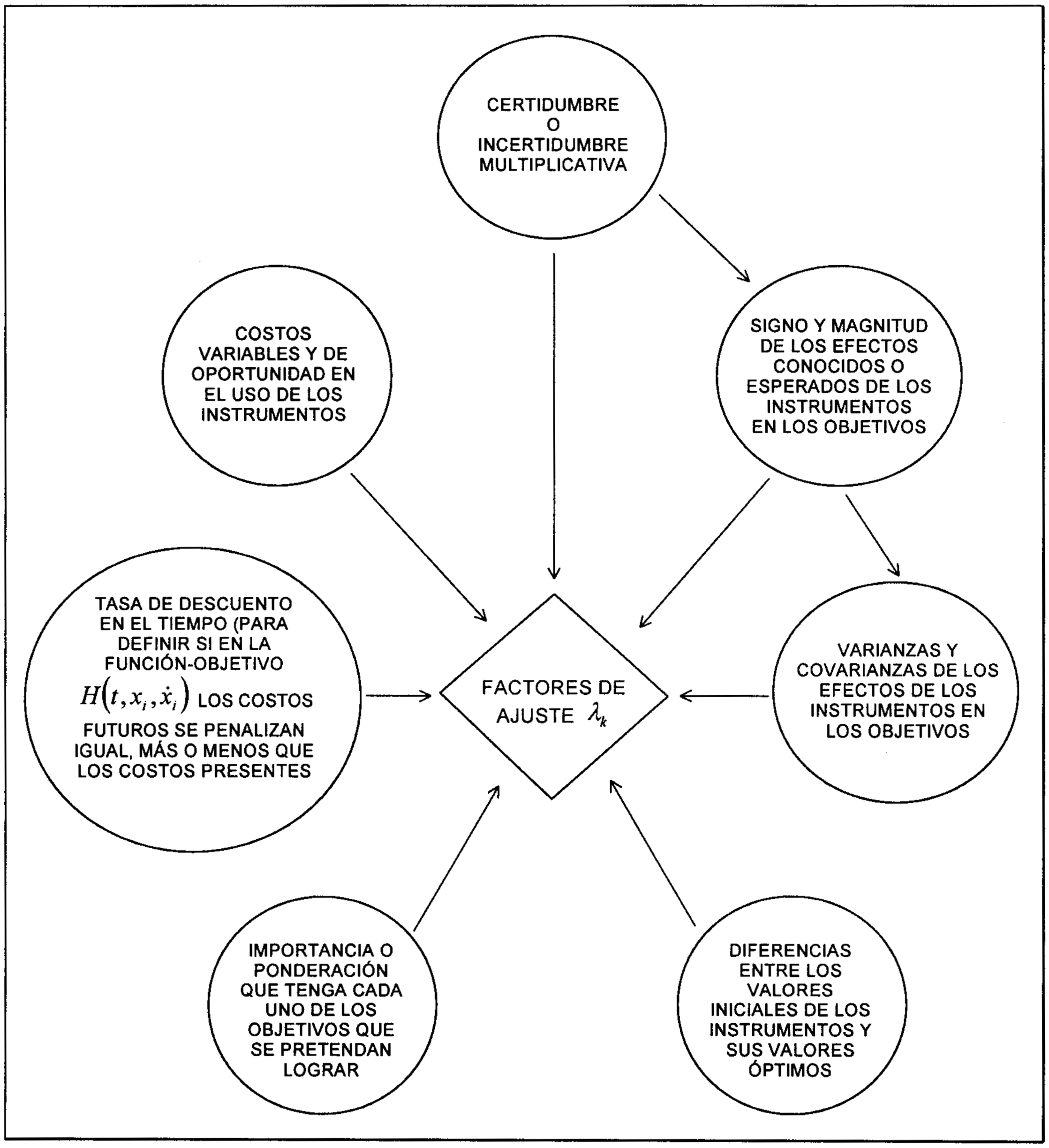


Figura 3.1 Elementos que inciden en los factores de ajuste en el tiempo (λ_k *)* de los instrumentos

CAPÍTULO

4

La contribución de Richard N. Cooper: Análisis de la interdependencia macroeconómica entre economías grandes y de la dependencia macroeconómica de una economía pequeña y abierta con el resto del mundo

Cooper analizó diversos modelos que contenían múltiples objetivos e instrumentos macroeconómicos. En ellos consideró economías grandes e interdependientes, e identificó diferentes tipos de interdependencia:[1]

- La estructural, en la que "dos o más economías son muy abiertas una respecto a la otra, de tal forma que los sucesos económicos de una influyen significativamente en los de la otra".[2]
- La interdependencia de políticas, que ocurre cuando las acciones de política de un país afectan a las de otro y viceversa. En esta situación si ambos países toman en cuenta las acciones de política del otro y las coordinan, esto favorecerá al bienestar económico mundial.

---

[1] Cooper, Richard N. (1984), "Economic Interdependence and Coordination of Economic Policies", *Handbook of International Economics*, vol. II, en R. W. Jones y P. B. Kenen [eds.], Elsevier Science Publishers B. V., Nueva York, pp. 1195-1234.

[2] *Ibid*, p. 1199.

- La interdependencia entre objetivos de política económica, que existe cuando los objetivos que alcanza un país son afectados por los objetivos que logre otro y viceversa. Este tipo de interdependencia suele presentarse, por ejemplo, si la distribución del ingreso de un país grande y desarrollado afecta a otro o más países del mismo tipo, o cuando un país de este tipo alcanza un superávit en la balanza de capitales y esto ocasiona que otro incurra en un déficit.
- Por último la interdependencia de dos o más países respecto a perturbaciones exógenas que los afectan simultáneamente. Este tipo de interdependencia fue experimentado por las economías más avanzadas cuando recibieron el impacto del aumento repentino y drástico de los precios del petróleo y también por las economías en desarrollo, cuando los flujos de capital provenientes de las economías más avanzadas disminuyeron significativamente y cuando sus términos de intercambio se modificaron por disminuciones substanciales en los precios de sus materias primas.

A continuación se presenta un modelo elaborado por Cooper en el que se ilustra el fenómeno de la interdependencia entre una economía grande y abierta y el resto del mundo. Se considera que una economía es grande porque afecta de manera significativa el nivel de ingreso, la tasa de interés y los precios del resto del mundo. A éste se le podría considerar como si fuera otra economía grande.

En su modelo Cooper demuestra que si se produce una mayor apertura económica entre las dos economías, a través de un mayor intercambio de bienes y/o activos financieros, esto debilitará, en general, los efectos de los instrumentos tradicionales de política macroeconómica sobre el ingreso y la tasa de interés.

Este modelo de dos economías grandes se puede generalizar y los resultados del análisis no se alteran, siempre y cuando las economías consideradas en el análisis tengan igual tamaño e idéntica estructura. Sin embargo si al analizar un modelo más general las economías tienen distinta estructura y tamaño, entonces se producirán lo que él llama efectos de composición y no se podrán derivar conclusiones de carácter general.

4.1 Modelos con interdependencia estructural y con interdependencia de políticas y de choques externos

Con base en el análisis de Meade, Mundell y Fleming, Cooper desarrolla un modelo macroeconómico en el que analiza las relaciones de una economía grande, que denominaremos Atlantis, con el resto del mundo.

$$
\begin{aligned}
Y &= E(Y,r) + T(Y,Y') + G \\
M &= H + R = L(Y,r) \\
F &= F(r - r'),
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

donde:
Y = producto nacional
Y' = producto del resto del mundo
G = gasto del gobierno
E = gasto doméstico del sector privado
T = exportaciones menos importaciones
R = reservas internacionales del banco central
B = balanza de pagos (balanza de reservas)
F = activos financieros en poder del sector privado doméstico
M = base monetaria: billetes y monedas más reservas del sistema bancario
r = tasa de interés de los bonos nacionales
r' = tasa de interés de los bonos extranjeros
H = bonos nacionales en poder del banco central
L = demanda de dinero por parte del público

Las variables con prima corresponden a las variables del resto del mundo.

En este modelo Cooper supone que los precios y el tipo de cambio están fijos y su análisis abarca un horizonte de corto plazo. La economía se encuentra inicialmente en equilibrio y el saldo de la balanza de pagos es igual a cero. Supone, además, que los cambios en las reservas internacionales originados por los desajustes de la balanza comercial son completamente esterilizados y se contrarrestan con operaciones de mercado abierto mediante la compra o venta de bonos del gobierno.

En el modelo denota a los cambios en las reservas originados por desajustes en la balanza comercial como dR_t y el cambio en los bonos nacionales empleados para esterilizar estos desequilibrios como dS. Si $dS = -dR_t$, entonces,

$$dM = dR_t + dH \tag{2}$$

donde dR_t es el cambio en las reservas internacionales debido a los movimientos en la cuenta de capitales y dH es el cambio de los bonos nacionales en poder del banco central por encima de la cantidad requerida para esterilizar el saldo de la balanza comercial. Se supone que las entradas de capital no se esterilizan completamente.

Nótese además que

$$dR_f = -F_r(dr' - dr)\,; \tag{3}$$

es decir, cuando la tasa de interés de Atlantis aumenta, y la tasa de interés externa está dada, se produce un flujo de capitales que aumenta las reservas internacionales del país.

Tomando en cuenta que los subíndices indican la variable de diferenciación, de (2) y (3) obtenemos que

$$L_y dY + \left(L_r - F_r\right)dr + F_r dr' = dH \tag{4}$$

para la economía nacional. Lo análogo para la economía externa es

$$L'_y dY' + \left(L'_r - F'_r\right)dr' + F'_r dr = dH' \tag{4'}$$

Si tomamos diferenciales en (1) y recordamos que $m = -T_y$, $s = 1 - E_y$, $m' = -T'_y$, $s' = 1 - E'_y$, con base en (2), (3), (4) y (4') se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
dG &= (s+m)dY - E_r dr - m' dY' \\
dH &= L_y dY + \left(L_r - F_r\right)dr + F_r dr' \\
dH' &= F'_r dr + \left(L'_r - F'_r\right)dr' + L'_y dY' \\
dG' &= -m dY - E'_r dr' + (s' + m')dY',
\end{aligned} \tag{5}$$

que en forma matricial se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} s+m & -E_r & 0 & -m' \\ L_y & L_r - F_r & F_r & 0 \\ 0 & F'_r & L'_r - F'_r & L'_y \\ -m & 0 & -E'_r & s'+m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY \\ dr \\ dr' \\ dY' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dG \\ dH \\ dH' \\ dG' \end{pmatrix} \tag{6}$$

o como $Ay = x$. F_r se debe interpretar como el cambio que ocurre en los activos financieros que Atlantis posee del resto del mundo, en respuesta a cambios en el diferencial de la tasa de intéres del resto del mundo y la suya propia. Se supone que en ambas economías se esterilizan los flujos de capital que financian los desequilibrios comerciales, pero no los que están relacionados con los ajustes instantáneos de portafolio que ocurren cuando el diferencial entre la tasa de interés de Atlantis y la del resto del mundo cambia.

Aplicando la regla de Cramer para resolver ecuaciones lineales se puede mostrar que si en la economía grande se aplican políticas fiscales o monetarias expansionistas, esto es, si $dG > 0$ o $dH > 0$ esto producirá un aumento en el producto, por lo que $\frac{dY}{dG} > 0$ y $\frac{dY}{dH} > 0$.

Si ahora se analiza el efecto que tendría una mayor interdependencia entre ambas economías en la efectividad de las políticas fiscal y monetaria se podría mostrar que si m y m' aumentan en la misma proporción k a fin de hacer a un lado los efectos de composición, una política fiscal expansionista en Atlantis provocará que su producto nacional disminuya a medida que k aumente, si ambas economías, la de Atlantis y la del resto del mundo tienen coeficientes estructurales marginales idénticos [ver sistema de ecuaciones (6)] o si F_r es lo suficientemente pequeña en el sistema.

En cambio si los coeficientes estructurales marginales son distintos en grado apreciable y F_r es lo suficientemente grande, entonces la efectividad de la política monetaria podría aumentar. Si $\frac{E_r'}{s'}$ es mayor que $\frac{E_r}{s}$, una política monetaria expansionista en Atlantis estimulará la inversión en el resto del mundo y esto a su vez provocará un aumento de las exportaciones netas de Atlantis y de su ingreso, si m' es mayor que m.

Para economías grandes que tengan igual tamaño y estructura, aumentos en F_r (si ésta tienen valores pequeños que sean menores a $-L_r$) provocarán aumentos en $\frac{dY}{dG}$. Si F_r tiene un valor lo suficientemente por encima de L_r, a medida que F_r aumente, $\frac{dY}{dG}$ disminuirá, independientemente de que los coeficientes estructurales de ambas economías sean iguales.

Una conclusión fundamental en este modelo es que una mayor interdependencia estructural entre las dos economías, a través de un mayor intercambio de bienes, servicios y/o activos financieros entre ellas reducirá la eficacia de los instrumentos tradicionales de política fiscal o monetaria en el producto nacional —y esta conclusión no se alterará en lo fundamental, si en vez de aumentar G hay una reducción de impuestos— aunque habrá algunas excepciones en caso de que haya diferencias significativas en las estructuras de las economías consideradas.

Cooper desarrolla, además, un modelo general dinámico —con base en el de la sección 4.1— en el que analiza la interdependencia macroeconómica estructural y la interdependencia de choques externos, considerando la relación entre un conjunto de variables objetivo y determinadas por la sociedad y un conjunto de variables exógenas z que son variables de política o choques que son exógenos al sistema y sin embargo influyen en él. Cooper define y como desviaciones respecto a los valores de los objetivos deseados por la sociedad y^* y a z como los choques externos que producen valores no nulos de y. Señala que es conveniente considerar a x como un subconjunto de z, en el que los elementos de x son variables de política.

Si el sistema es lineal alrededor de un valor de equilibrio y^* entonces

$$\frac{\delta y}{\delta t} = Ay + Bz(t), \qquad (7)$$

donde A y B son matrices que muestran la influencia de y y z sobre la tasa de cambio de y.

Si todos y cada uno de los elementos de A y B son diferentes de cero, entonces todos los elementos de y y de z también lo son y de esta manera tendremos un sistema económico interdependiente de muchos países.

Si los elementos de y y z se pueden ordenar de tal manera que las variables de los diferentes países se puedan agrupar como las del sistema de dos países descrito en (5), entonces las matrices en (6) se podrán utilizar para caracterizar al sistema económico mundial con múltiples países, como el descrito en (7).

Si A y B son matrices diagonales en bloque, cada economía nacional será independiente de las demás economías que integran el sistema económico mundial, pero si A y B son matrices completas, entonces todas las economías nacionales serán estructuralmente interdependientes y su grado de interdependencia se podrá medir a través de los elementos ubicados fuera de los elementos de las diagonales de A y B. Es conveniente resaltar que con un elemento diferente de cero en cualquiera de estas diagonales habrá algún grado de interdependencia en el sistema.

Nótese que un elemento fuera de los elementos de la diagonal de B, un b_{ij} para $i \neq j$ indica cómo una perturbación en el país i afecta de manera directa a un objetivo y_j del país j, en tanto que un elemento fuera de la diagonal de A, un a_{ij} para $i \neq j$ indica cómo una perturbación en el país i afecta indirectamente a través de su efecto sobre el objetivo y_j del país i, al objetivo y_j del país j por lo cual podemos observar que en este modelo la interdependencia es multidimensional y podría ocurrir que mientras ésta aumenta en algunos elementos —fuera de los elementos de las diagonales de A y B— la interdependencia puede estar disminuyendo a través de otros elementos, por lo que si se afirma que existe una mayor interdependencia macroeconómica entre los países, en realidad a lo que se estará haciendo referencia es a que ésta ha aumentado en promedio.

Como Cooper señala, aunque existan múltiples y variadas formas a través de las cuales las economías nacionales se pueden interrelacionar, las relaciones más obvias entre ellas se dan a través de los cambios en las demandas de productos o de activos financieros, o a través de cambios en los precios o en las tasas de interés, o por la manera en que se forman las expectativas económicas en un mundo donde ha habido grandes avances en la tecnología y la información se transmite más rápidamente que en el pasado. Señala, por otra parte, que una mayor interdependencia macroeconómica probablemente aumentará la correlación entre las perturbaciones. Esto ocurriría por ejemplo, si las prácticas sindicales de un país son emuladas por los sindicatos de los demás países.

En la actualidad es más fácil transmitir olas de optimismo o pesimismo entre los países, por lo que en la medida en que las perturbaciones estén correlacionadas y se transmitan con más rapidez, las decisiones de política de un país generarán con mayor rapidez perturbaciones en otro u otros países y al mismo tiempo una mayor apertura entre ellos provocará que los instrumentos nacionales de política pierdan eficacia para alcanzar los objetivos nacionales. Por ello los instrumentos tienen que usarse más intensivamente, lo cual podría aumentar el costo de su utilización.

Por último Cooper señala que si la economía es inestable en la vecindad cercana al equilibrio, la utilización de los instrumentos de política es fundamental no sólo para acelerar el ajuste del sistema al equilibrio, sino para que el sistema converja a éste. En el modelo general dinámico analizado es necesario que los *eigenvalores* de A sean negativos para que el sistema converja al equilibrio. De esta manera podríamos señalar que en el análisis hay dos elementos fundamentales que al autor le interesa destacar: uno es alcanzar la estabilidad y otro maximizar la velocidad de ajuste para que el sistema llegue al equilibrio. Considerar ambos elementos es relevante, porque aún con la estabilidad del sistema garantizada podría ocurrir que la convergencia al equilibrio fuera muy lenta y esto podría ser muy costoso para la sociedad.

4.2 Los intercambios (*trade-offs*) entre objetivos de política macroeconómica y la coordinación de políticas entre países grandes

En su modelo Tinbergen supone que los objetivos nacionales son independientes entre sí y que éstos se pueden alcanzar simultáneamente. Sin embargo en la realidad podría ocurrir que se dificultara o imposibilitara alcanzar los objetivos nacionales por los conflictos *(trade-offs)* entre ellos o bien por la incompatibilidad existente para lograr simultáneamente varios objetivos en dos o más países. Cooper amplía el marco de Tinbergen a un ámbito internacional y desarrollo un modelo en el que analiza este fenómeno en el caso de dos economías grandes, abiertas e interdependientes.

En su modelo supone que ambos países tienen una función de pérdida social idéntica[3] y se propone lograr dos objetivos: una tasa de crecimiento del producto nacional y una tasa de inflación y cuentan para ello con un solo instrumento: la creación de dinero en la economía. También supone que tanto las preferencias como las estructuras de ambas economías son idénticas y que cada país minimiza una función de pérdida social definida por

[3] Véase Hamada, Koichi (1979), "Macroeconomic Strategy and Coordination under Alternative Exchange Rates", en Dornbusch y Frenkel [eds.], *International Economic Policy*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

$$U = \left(q^2 + wp_c^2\right),$$

donde q representa la tasa de cambio porcentual del producto nacional, p_c denota la tasa de inflación y w es la ponderación o importancia relativa de la tasa de inflación respecto a la tasa de crecimiento del producto en la función de pérdida social.

La estructura de cualquiera de las dos economías cuando están ubicadas en la vecindad del equilibrio está dada por:

$$q = \gamma\left(e + p^* - p\right) - \lambda i \qquad (1)$$
$$m - p = \alpha q - \beta i \qquad (2)$$
$$p_c = \mu\left(p^* + e\right)\left(1 - \mu\right)p \qquad (3)$$
$$i = i^*, \qquad (4)$$

donde e representa al cambio porcentual del tipo de cambio o de la cantidad de dinero doméstico por unidad de moneda extranjera, p^* al cambio porcentual de los precios en el extranjero, p al cambio porcentual de los precios domésticos, i al cambio instantáneo de la tasa de interés doméstica y m es la variable que representa al cambio porcentual de la base monetaria.

Las variables con asterisco son las que representan al país extranjero. Los símbolos griegos representan a los coeficientes estructurales de las dos economías y se supone que son constantes y positivos.

La primera ecuación indica que la demanda del producto nacional es una función lineal de los cambios del tipo de cambio, del diferencial entre la inflación doméstica y la externa y de los cambios en la tasa de interés.

La segunda ecuación se refiere a la demanda real de dinero y depende positivamente del crecimiento del producto y negativamente de los cambios en la tasa de interés.

En la tercera ecuación el crecimiento de los precios al consumidor está expresado como un promedio ponderado de los cambios de los precios de los productos en el exterior, ajustados por la apreciación o depreciación del tipo de cambio y de los cambios de los precios de los productos nacionales.

La cuarta ecuación indica que existe perfecta movilidad de capitales. El análisis es de corto plazo y la tasa de cambio de los precios de los productos domésticos es positiva, está fija y es igual en ambos países. Por lo tanto $\overline{p} > 0$.

Debido a que se supone que los niveles iniciales de la tasa de interés así como los cambios en la misma son idénticos en ambos países, el cambio esperado del tipo de cambio es cero. Por lo anterior $pc = pc^* = \overline{p}$ y la función de pérdida social nacional U se minimiza si se define $q = q^* = 0$.

Cooper concluye que $m = m^* = \overline{p}$ sería la solución óptima para ambos países si existiera una coordinación óptima de políticas entre ellos. Sin embargo si ambos actuaran de manera independiente estimando que podrían estar mejor si no coordinaran sus políticas, ambos podrían llegar a un nivel de producto menor al que conseguirían en un equilibrio de tipo Cournot-Nash, si actuaran de manera coordinada.

Si ambos países actuaran de manera independiente tratarían de apreciar sus monedas para lograr una menor tasa de inflación. Sin embargo como en una situación de equilibrio el tipo de cambio y la tasa de inflación no variarían, el crecimiento de sus productos tendría que disminuir y esto los colocaría en una situación inferior, desde el punto de vista de un óptimo de Pareto.

Es interesante señalar que si ambos países actuaran en forma independiente la solución óptima sería idéntica a la solución donde ambos se coordinaran si cada uno supusiera que e (el cambio porcentual de su tipo de cambio) tiene un valor igual a cero. Esta situación sería muy similar a la que prevalecía bajo el Acuerdo de Bretton Woods, en el que los tipos de cambio eran fijos y con ello se evitaban modificaciones de tipo de cambio que tuvieran como propósito alcanzar objetivos nacionales a costa de un empeoramiento en la economía mundial. El sistema de Breton Woods, sin embargo, tenía sus propios problemas, aún cuando los tipos de cambio de los países fueran los de equilibrio.

Nótese que los problemas de la descoordinación de políticas existen aún analizando un número muy reducido de países. La política económica se conduce frecuentemente considerando las acciones de los otros países como dadas, además de que las políticas se deciden con cierta frecuencia tratando de lograr objetivos nacionales múltiples que son conflictivos entre sí.

El análisis de Cooper es relevante para la economía mundial ya que se consideran economías grandes y desarrolladas y las relaciones de interdependencia que existen entre ellas, lo cual afecta de manera significativa a la economía global en su conjunto

Algunos analistas consideran que la economía mundial estaría en una mejor situación si no existiera la coordinación de las políticas entre los diferentes países y hacen una analogía de esto con el paradigma de la competencia perfecta. Señalan que la economía mundial podría alcanzar el equilibrio si se le dejara sola, sin intervención y sujeta a las libres fuerzas del mercado.

Cooper señala que la forma en que funciona la economía mundial difícilmente se parece a la forma en que opera el paradigma competitivo. En lugar de competencia perfecta, en la economía mundial actúan fuerzas monopólicas que aunque limitadas son muy importantes y están en poder de los gigantes económicos y podrían llevar a la economía mundial —como en el ejemplo de los dos países analizado anteriormente— a un estado de sub-optimalidad desde el punto de vista de un óptimo de Pareto y a niveles de utilidad inferiores no sólo a los factibles, sino también a los deseables, aún para las potencias económicas de mayor tamaño.

La creciente interdependencia y globalización económica mundial en el siglo XX hace necesaria, en el siglo XXI una mayor coordinación de las políticas económicas de los países más avanzados, aunque también entre otros grupos de países —como los emergentes— para mejorar el bienestar mundial.

4.3 Dependencia macroeconómica de la economía pequeña y abierta con el resto del mundo

De acuerdo con un estudio de la Organización de las Naciones Unidas la población de 130 países en desarrollo representaba, en 1991, el 78% de la población mundial y generaba el 15% del PIB mundial en 1992 (véase el Cuadro 4.1). De aquí la importancia de analizar a la economía pequeña.

Cuadro 4.1

PARTICIPACIÓN DE LOS PAÍSES INDUSTRIALIZADOS Y DE LOS PAÍSES EN DESARROLLO EN LA PRODUCCIÓN Y EN LA POBLACIÓN MUNDIALES						
PAÍS	PIB[1]	PARTICIPACIÓN EN EL PIB		POBLACIÓN[2]	PARTICIPACIÓN DE LA POBLACIÓN	
		DE LOS PAÍSES INDUSTRIALIZADOS	TOTAL MUNDIAL		DE LOS PAÍSES INDUSTRIALIZADOS	TOTAL MUNDIAL
ESTADOS UNIDOS	5 610	33.00%	27.91%	255.20	21.09%	4.68%
JAPÓN	3 360	19.76%	16.72%	124.50	10.29%	2.28%
COMUNIDAD EUROPEA[3]	6 090	35.82%	30.30%	350.00	28.93%	6.42%
TOTAL[4]	15 060	88.59%	74.93%	729.70	60.31%	13.39%
PAÍSES INDUSTRIALIZADOS	17 000	100.00%	**84.58%**	1,210.00	100.00%	**22.20%**
PAÍSES EN DESARROLLO	3 100		**15.42%**	4,240.00		**77.80%**
TOTAL MUNDIAL	20 100		100.00%	5,450.00		100.00%

1 Datos de 1992 en miles de millones de dólares.
2 Datos de 1991 en millones de habitantes.
3 Incluye Alemania, Bélgica, Dinamarca, España, Francia, Grecia, Irlanda, Italia, Portugal, Holanda, Reino Unido y Luxemburgo.
4 Incluye a Estados Unidos, Japón y la Comunidad Económica Europea.
Fuente: Organización de las Naciones Unidas (1994), *Reporte sobre el Desarrollo Humano*, pp. 217-221.

Cooper lleva a cabo el análisis de una economía pequeña y abierta que es dependiente del resto del mundo. En su modelo se podría considerar al resto del mundo como si fuera una economía grande.

Su análisis es de corto plazo, los precios están dados, el tipo de cambio es fijo, no existe incertidumbre y no hay costos derivados del uso de los instrumentos. En su modelo hay dos instrumentos: gasto público y crédito interno y dos variables endógenas que son independientes entre sí: el producto y la tasa de interés.

En su modelo se pueden abordar las siguientes preguntas: ¿cuál debe ser el criterio de asignación óptima de los instrumentos de política macroeconómica de la economía pequeña para alcanzar los objetivos? Y, si aumentara su grado de apertura, ¿esto podría provocar una disminución de la eficacia de sus instrumentos de política?

El modelo está definido por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$Y = E(Y,r) + T(Y,Y') + G \quad (1)$$

$$M = H + R = L(Y,r) \quad (2)$$

$$B = \Delta R = T(Y,Y') - \Delta F, \quad (3)$$

y las variables se definen de la misma forma que en la sección 4.1 de este capítulo. Las variables con primas corresponden a las variables del resto del mundo.

Se supone que inicialmente hay equilibrio en la balanza de reservas en el corto plazo y por lo tanto $B = 0$, con un tipo de cambio adecuado. Diferenciando los objetivos respecto a los instrumentos, se obtiene

$$(s+m)dY - E_r dr = dG$$
$$L_y dY + L_r dr = dM,$$

que en forma matricial se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} s+m & -E_r \\ L_y & L_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dG \\ dM \end{pmatrix} \quad (4)$$

y los subíndices indican la derivada respecto al argumento; $m = -T_y$, $s = 1 - E_y$ y ambos son positivos. Se supone que $L_y > 0$, $L_r < 0$ y $E_r < 0$ y que si la balanza de reservas no está en equilibrio, es decir, si B es diferente de cero, las autoridades llevarán a cabo la esterilización completa de este cambio en las reservas y de esta manera $dM = dR + dS + dH$, donde dS indica la esterilización y $dS = -dR$ y así $dM = dH$.

Sin embargo aunque esta formulación es correcta en el corto plazo, tiene el serio inconveniente de que excluye la posibilidad de que las transacciones que lleve a cabo el sector privado en activos financieros internacionales tengan influencia en las variables domésticas. Debido a ello se supone que los residentes de la economía pequeña demandarán activos financieros internacionales y esta demanda dependerá del diferencial existente entre la tasa de interés doméstica y la del resto del mundo. Adicionalmente se supone que en el resto del mundo no hay demanda de activos financieros del país pequeño y los no residentes de ambas economías no mantienen saldos monetarios en moneda extranjera. De esta manera un cambio en el diferencial entre las tasas de interés del resto del mundo y de la economía pequeña provocará un cambio de una vez por todas en la adquisición de activos financieros internacionales en la economía pequeña.

Como el tipo de cambio se mantiene fijo, se supone que el cambio deseado de activos financieros internacionales por parte del público en la economía pequeña se satisfará instantáneamente. Se supone también que los cambios en el nivel de las reservas internacionales de la balanza de la cuenta de capitales del país pequeño no se esterilizan.

La demanda interna de activos financieros externos depende del diferencial de la tasa de interés doméstica r y de la del resto del mundo r' y por lo tanto $\Delta F = F_r(dr' - dr)$, donde $F_r > 0$.

En el balance del banco central tendríamos

$$dM = dR_f + dR_t + dS + dH = dR_f + dH, \tag{5}$$

donde dR_f representa el cambio en las reservas debido a variaciones en la cuenta de capitales, y dR_t es el cambio en las reservas por el déficit o superávit de la balanza comercial y $dS = -dR_t$. Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} s+m & -E_r \\ L_y & L_r - F_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dG \\ dH \end{pmatrix} \tag{6}$$

Aplicando la regla de Cramer

$$dY = \frac{Det\begin{pmatrix} dG & -E_r \\ dH & L_r - F_r \end{pmatrix}}{Det\begin{pmatrix} s+m & -E_r \\ L_y & L_r - F_r \end{pmatrix}}$$

$$dr = \frac{Det\begin{pmatrix} s+m & dG \\ L_y & dH \end{pmatrix}}{Det\begin{pmatrix} s+m & -E_r \\ L_y & L_r - F_r \end{pmatrix}}$$

de donde observamos que las variables de política G y H afectan a las variables objetivo Y y r de la siguiente manera:

$$\frac{dY}{dG} = \frac{L_r - F_r}{\Delta} > 0 \tag{7}$$

$$\frac{dY}{dH} = \frac{E_r}{\Delta} > 0 \qquad (8)$$

$$\frac{dr}{dG} = \frac{-L_y}{\Delta} > 0 \qquad (9)$$

$$\frac{dr}{dH} = \frac{s+m}{\Delta} < 0 \qquad (10)$$

donde $\Delta = (s+m)(L_r - F_r) + E_r L_y < 0$ es el determinante de (6). De esta forma las políticas fiscal o monetaria aumentarán el producto a través de un incremento de G o de H, pero en el primer caso la tasa de interés aumentará y en el segundo disminuirá.

Otra conclusión interesante es que en ambos casos el incremento del producto de la economía pequeña dependerá de sus coeficientes estructurales, lo cual implica que la asignación óptima de los instrumentos es utilizar todos los instrumentos disponibles.

Ahora bien, ¿qué sucedería con los instrumentos de política económica si aumentara la apertura de la economía pequeña con el resto del mundo? Cooper concluye que en general, disminuiría su eficacia.

Una mayor apertura de la economía pequeña con el resto del mundo conduciría a una mayor propensión a importar (m) o a una mayor F_r (esto es, a una mayor tasa de cambio de los activos financieros del exterior en poder del sector privado de la economía pequeña, respecto al diferencial entre la tasa de interés externa e interna), lo cual debilitaría en general los efectos de un aumento de su gasto público o de su base monetaria, en Y y r.

Cooper concluye que salvo en pocas excepciones una mayor apertura de la economía pequeña ocasionará un debilitamiento de los efectos de sus instrumentos ya que en general una "mayor dependencia externa reduce el efecto de las variables domésticas de política sobre las variables objetivo".[4]

[4] Cooper, Richard N. (1984), op. cit., p. 1204.

4.4 Modelos derivados del modelo de Cooper para una economía pequeña y abierta: Especialización completa en el uso de los instrumentos para lograr los equilibrios externo e interno

A continuación se desarrollan dos variantes del modelo de Richard N. Cooper. Éstos incluyen, asimismo, elementos considerados en los análisis de Tinbergen y Mundell.

4.4.1 Modelo I*

Los objetivos de política económica son lograr los equilibrios interno y externo, esto es, lograr la producción de pleno empleo y un saldo de la balanza comercial igual a cero. Los instrumentos disponibles son el tipo de cambio y el gasto público. Se supone que la tasa de interés está fija. Hay perfecta movilidad de capitales y los precios domésticos y externos son conocidos.

El conjunto de ecuaciones del modelo es:

$$Y = E(Y,r) + T(Y,Y',e) + G \qquad (1)$$

$$M = L(Y,r) \qquad (2)$$

$$r = r' \qquad (3)$$

$$T(Y,Y',e) = 0, \qquad (4)$$

y las variables se definen igual que en la sección 4.1.

Nótese que $\Delta F = 0$ debido a que uno de los objetivos es lograr el equilibrio en la balanza comercial.

Sustituyendo (3) en (1) obtenemos

$$Y = E(Y,r') + T(Y,Y',e) + G \qquad (5)$$

Por lo tanto G y e determinan el producto y el saldo de la balanza comercial. En este modelo la base monetaria congruente con los equilibrios interno y externo se obtiene de (2) y se pueden alcanzar ambos objetivos.

Es claro que en esta variante del modelo de Cooper se aplica el principio de clasificación efectiva de mercado de Mundell, porque la política fiscal tiene que asignarse para lograr el equilibrio interno y el tipo de cambio para lograr el externo, lo cual significa que la política de asignación óptima de los instrumentos sería el de la especialización.

4.4.2 Modelo II*

Los instrumentos son la tasa de interés y el tipo de cambio. Los objetivos son lograr los equilibrios interno y externo, esto es, lograr la producción de pleno empleo y un saldo de la balanza comercial igual a cero.

El modelo se caracteriza a través del siguiente conjunto de ecuaciones:

$$Y = C(Y,r) + I(r) + T(Y,Y',e) + G \tag{1}$$

$$M = L(Y,r) \tag{2}$$

$$T(Y,Y',e) = 0, \tag{3}$$

donde Y denota el producto de la economía pequeña, C la función consumo, r la tasa de interés, I la inversión, T el saldo de la balanza comercial, Y' el producto de la economía del resto del mundo, e el tipo de cambio, G el gasto público, M la base monetaria y L la demanda de dinero. Se supone que G está fijo a través del tiempo, debido a que hay presupuesto balanceado; además también se supone que los precios internos y externos están fijos.

Si diferenciamos (1), (2) y (3) y tomamos en cuenta que uno de los objetivos es que el saldo de la balanza comercial sea igual a cero, $T(Y,Y',e) = 0$, dado que suponemos que el gasto público G se mantiene fijo, tenemos que

$$dY = \left(\frac{\partial C}{\partial Y}\right)dY + \left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)dr + \left(\frac{\partial I}{\partial r}\right)dr = C_y dY + C_r dr + I_r dr \tag{4}$$

$$dM = \left(\frac{\partial L}{\partial Y}\right)dY + \left(\frac{\partial L}{\partial r}\right)dr = L_y dY + L_r dr \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)dY + \left(\frac{\partial T}{\partial e}\right)de = T_y dY + T_e de = 0 \tag{6}$$

Reacomodando términos en (4) y (5), obtenemos

$$(1-C_y)dY=(C_r+I_r)dr$$

$$-L_y dY+dM=L_r dr$$

que podemos expresar en forma matricial de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} 1-C_y & 0 \\ -L_y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dY \\ dM \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (C_r+I_r)dr \\ L_r dr \end{pmatrix} \qquad (7)$$

donde C_y es la propensión marginal a consumir y $0<C_y<1$, C_r es la sensibilidad del consumo respecto a la tasa de interés y $C_r<0$; I_r es la sensibilidad de la inversión privada respecto a la tasa de interés e $I_r<0$; L_y es la sensibilidad de la demanda de dinero respecto al ingreso y $L_y>0$; L_r es la sensibilidad de la demanda de dinero respecto a la tasa de interés y $L_r<0$; T_y es la propensión marginal a importar y $0<T_y<1$; T_e es la sensibilidad del saldo de la balanza comercial respecto al tipo de cambio y $T_e<0$ suponiendo que se cumplen las condiciones de Marshall-Lerner, esto es, que las elasticidades de importación y exportación suman en conjunto más que uno, lo cual significa que cuando el tipo de cambio se deprecie esto provocará un efecto favorable en el saldo de la balanza comercial.

Usando la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones (6) y (7), tenemos que

$$dY=\frac{Det\begin{pmatrix} (C_r+I_r)dr & 0 \\ L_r dr & 1 \end{pmatrix}}{Det\begin{pmatrix} 1-C_y & 0 \\ -L_y & 1 \end{pmatrix}}=\frac{(C_r+I_r)dr}{1-C_y}$$

$$dM=\frac{Det\begin{pmatrix} 1-C_y & (C_r+I_r)dr \\ -L_y & L_r dr \end{pmatrix}}{1-C_y}=\frac{L_r(1-C_y)+L_y(C_r+I_r)}{1-C_y}dr$$

$$de=-\frac{T_y}{T_e}dY$$

Las ecuaciones (4) y (5) determinan la variación del ingreso y el cambio de la base monetaria consistente con una modificación de la tasa de interés. Dado el nivel de producto de equilibrio la ecuación (6) determina el cambio requerido en el tipo de cambio para que saldo de la balanza comercial sea igual a cero.

La conclusión fundamental de este modelo es que la política de asignación óptima de los instrumentos es la especialización en el uso de los mismos. La tasa de interés debe utilizarse para alcanzar el equilibrio interno y el tipo de cambio para lograr el equilibrio externo o equilibrio en la balanza comercial.

4.5 La contribución de Aoki: Interdependencia macroeconómica entre economías grandes y abiertas. Un análisis dinámico

En su libro *Dynamic Analysis of Open Economies*,[5] Masanao Aoki presenta un conjunto de modelos donde analiza economías abiertas, desarrolladas y grandes para considerar los efectos que tendría la coordinación de sus políticas macroeconómicas en el bienestar mundial.

En uno de sus modelos Aoki considera un mundo de dos países, cada uno con múltiples objetivos y un solo instrumento de política. En su análisis concluye que se logrará la estabilidad de la economía mundial siempre y cuando haya una actitud cooperadora y se coordinen las políticas de ambos países o al menos uno de ellos decida sus acciones de política tomando en cuenta las del otro. Éste, concluye Aoki, es un asunto central, porque sin esta coordinación será imposible garantizar que el sistema económico mundial alcance un equilibrio estable. Sin embargo, como el propio autor señala, en la mayoría de los casos prácticos el equilibrio estable podrá lograrse a través de una selección adecuada de ajustes de política, siempre y cuando haya suficientes instrumentos de política y una actitud cooperadora en ambos países.

Aoki desarrolla un segundo modelo, también de dos países, pero en éste incluye dos objetivos y dos instrumentos de política. En él muestra cómo mediante cambios apropiados en las tasas de interés domésticas y en los déficits fiscales se puede lograr pleno empleo y una balanza comercial con un saldo igual a cero.

---

5 Aoki, Masanao J. (1981), *Dynamic Analysis of Open Economies*, Academic Press, Nueva York.

En un tercer modelo de dos países, en donde cada país opera con el mismo número de instrumentos y objetivos Aoki demuestra que una condición asintótica para alcanzar el equilibrio del sistema económico mundial es aquélla en la cual el tomador de decisiones debe asignar cada instrumento a uno y sólo uno de los objetivos.[6] En este caso él concluye que para lograr una asignación óptima de los instrumentos tiene que haber especialización completa.

En un modelo dinámico de dos países y múltiples objetivos e instrumentos[7] Aoki aplica una extensión del principio de clasificación efectiva de Mundell y establece las condiciones necesarias y suficientes para que cualquiera de las variables-objetivo se pueda alterar individualmente —a través de un ajuste en los instrumentos de política— en una forma no interactiva, esto es, sin modificar el valor de los demás objetivos.

Aoki también analiza la interdependencia de las políticas en un modelo de tres países, múltiples objetivos y un solo instrumento de política monetaria. Considera los efectos de diferentes políticas monetarias en los tres países, cuando éstos intercambian bienes y activos financieros y el conjunto de bienes y activos financieros que cada uno de ellos ofrece es distinto. Él concluye que cuando el equilibrio en el sistema es inestable, la coordinación de las políticas monetarias es absolutamente necesaria para acelerar el proceso de convergencia al equilibrio.

Finalmente Aoki estudia cómo el sistema económico mundial podría caer en la inestabilidad debido a la falta de coordinación de las acciones de política económica de los países económicamente más poderosos y señala que tal eventualidad podría suceder si por ejemplo al considerar sólo dos países la acción individual de uno aleja de sus objetivos al otro, y la respuesta de políticas de éste aleja al primero de sus propios objetivos y el proceso continúa formando un círculo vicioso en el que ambos países están cada vez más alejados de sus objetivos nacionales.

Para una visión de conjunto de los modelos que se analizaron en el Tomo I de la tesis véase el Cuadro 4.2 que se presenta a continuación.

---

[6] Aoki, Masanao J. (1976), *Optimal Control and System Theory in Dynamic Economic Analysis*, Elsevier, Nueva York.

[7] *Idem*, véase capítulo 6.

CUADRO 4.2 MODELOS DE OBJETIVOS E INSTRUMENTOS

	USO DE LOS INSTRUMENTOS SIN COSTO	COSTOS VARIABLES DEL USO DE LOS INSTRUMENTOS	COSTOS FIJOS Y VARIABLES EN UNA SITUACIÓN CON COSTOS DE OPORTUNIDAD	ECONOMÍAS GRANDES Y DESARROLLADAS	ECONOMÍAS PEQUEÑAS Y ABIERTAS
CERTIDUMBRE	**Tinbergen, MxN,** [1] M >N o M=N (1952) Análisis estático	**RR,**[2] **Mx1**[3] (1997) Análisis dinámico Generalizo un modelo similar al de Henderson-Turnovsky **H-T,**[4] **2x1**[5] (1972) Análisis dinámico	**RR,**[2] **MxN**[1] (1997) Análisis dinámico Introduzco costos de oportunidad en el uso de los instrumentos *Éste es el caso más general en un contexto de certidumbre donde introduzco múltiples elementos incorporados con anterioridad en el marco de instrumentos y objetivos*	**R. N. Cooper**[6] (1985) Modelos para múltiples países con diferentes tipos de interdependencia económica con certidumbre • Estructural • De objetivos • De políticas • Por choques externos **Aoki** (1981) Sistema con dos o tres economías grandes que interactúan en una situación de certidumbre. Aoki aisla el efecto de los instrumentos sobre los objetivos de una forma no interactiva, de tal manera que cualquier objetivo pueda ser afectado sin afectar a los demás	**Mundell, 2x2**[7] (1962) Análisis con dos instrumentos: superávit presupuestal y tasas de interés y dos objetivos: producción de pleno empleo y balanza de reservas en equilibrio **R. N. Cooper,**[6] **2x2**[7] (1985) Análisis estático con dos instrumentos: base monetaria y gasto público y dos objetivos: producción con pleno empleo y tasa de interés **RR,**[2] **2x2**[7] (1997) *Con base en el modelo de R.N. Cooper desarrollé dos modelos.* *Modelo I*, con dos instrumentos: gasto público y tasas de interés, y dos objetivos: producción de pleno empleo y balanza comercial en equilibrio.* *Modelo II*, con dos instrumentos: tipo de cambio y tasa de interés y dos objetivos: producción de pleno empleo y balanza comercial en equilibrio*

[1] MxN: M instrumentos y N objetivos, donde N es un número irrestricto de objetivos y M es un número irrestricto de instrumentos
[2] RR: Rocío Ramos de Villarreal
[3] Mx1: M instrumentos y un objetivo, donde M es un número irrestricto de instrumentos
[4] H-T: Henderson y Turnovsky
[5] 2x1: Dos instrumentos y un objetivo
[6] R. N. Cooper: Richard N. Cooper
[7] 2x2: Dos instrumentos y dos objetivos
[8] A-G: Ali y Greenbaum

CUADRO 4.2 MODELOS DE OBJETIVOS E INSTRUMENTOS (continuación)

	INSTRUMENTOS SIN COSTOS DERIVADOS DE SU USO	COSTOS VARIABLES EN EL USO DE LOS INSTRUMENTOS	COSTOS FIJOS Y VARIABLES EN UNA SITUACIÓN CON COSTOS DE OPORTUNIDAD	ECONOMÍAS GRANDES Y DESARROLLADAS	ECONOMÍAS PEQUEÑAS Y ABIERTAS
INCERTIDUMBRE	**Brainard, 1x1** (1967) Análisis estático *Introduce incertidumbres multiplicativa y aditiva* **Brainard, 2x1** (1967) Análisis estático. Introduce incertidumbres multiplicativa y aditiva **RR,[2] Mx1[3]** **RR,[2] MxN[1]** (1997) Análisis estático con incertidumbres multiplicativa y aditiva. Generalizo el modelo de Brainard a uno de MxN[1]	**H-T,[4] 1x1[5]** (1972) Análisis dinámico Incertidumbres multiplicativa y aditiva **H-T,[4] 2x1[5]** (1972) Análisis dinámico Incertidumbre multiplicativa No hay incertidumbre aditiva **A-G, MxN** (1976) Análisis dinámico con incertidumbres multiplicativa y aditiva. *Se introducen costos fijos*	**RR,[2] MxN[1]** (1997) Análisis dinámico. intoduzco incertidumbre multiplicativa y aditiva y costos de oportunidad crecientes derivados del uso de los instrumentos. *Éste es el caso general bajo incertidumbre donde introduzco múltiples elementos incorporados anteriormente al marco de instrumentos y objetivos*	**W. Poole 2x1** (1970) IS-LM Análisis estático con dos instrumentos: oferta monetaria y tasa de interés y un objetivo: estabilización del producto	

[1] MxN: M instrumentos y N objetivos, donde N es un número irrestricto de objetivos y M es un número irrestricto de instrumentos
[2] RR: Rocío Ramos de Villarreal
[3] Mx1: M instrumentos y un objetivo, donde M es un número irrestricto de instrumentos
[4] H-T: Henderson y Turnovsky
[5] 2x1: Dos instrumentos y un objetivo
[6] R. N. Cooper: Richard N. Cooper
[7] 2x2: Dos instrumentos y dos objetivos
[8] A-G: Ali y Greenbaum

CAPÍTULO

5

Consideraciones adicionales sobre el marco de objetivos e instrumentos

Existen algunos elementos que el tomador de decisiones debe considerar dentro del análisis general de objetivos e instrumentos de política, ya que éstos pueden tener efectos muy importantes en los resultados de la política. Entre ellos podemos destacar la forma en que se intenten lograr los objetivos, si éstos se tratan de alcanzar en forma secuencial o simultánea. Otros elementos importantes que se deben considerar son el grado de desequilibrio del que parte la economía y la información de los agentes económicos —qué y cuánto saben, quiénes lo saben y cuándo lo saben— y cómo forman sus expectativas.

A continuación se presentan algunas consideraciones sobre estos aspectos.

• Secuencialidad de objetivos

Existe controversia acerca de la forma en que se deben alcanzar los objetivos. Por ejemplo, si éstos se deben tratar de lograr simultáneamente o en forma secuencial, esto es, primero uno, luego otro, y así sucesivamente. Podría ocurrir que al emplear uno de los instrumentos disponibles para alcanzar uno de los objetivos se generaran uno o más efectos colaterales significativos no deseados que dificultaran el logro de otros objetivos. Esto sucedería, por ejemplo, cuando se produjeran intercambios (*trade-offs*) entre los objetivos, derivados del uso de los instrumentos de política. En este caso al tratar de alcanzar el primer objetivo, la economía se alejaría de otro u otros objetivos. Si esta desviación fuera muy importante, se correría el riesgo, incluso, de no alcanzar el primer objetivo. De esta manera una trayectoria en la que se pretendan alcanzar los objetivos de manera secuencial y no simultánea puede ser inadecuada.

La desviación del principio de la ventaja comparativa en el uso de los instrumentos puede ocasionar que la economía alcance uno de los objetivos pero se mueva lenta, moderada o incluso explosivamente fuera del nivel deseado de otro u otros objetivos considerados como importantes para la sociedad.

También podría suceder que para enfrentar una situación de incertidumbre multiplicativa las autoridades decidieran usar todos los instrumentos de política a su alcance, pero de manera desfasada, de tal forma que al ajustarlos no se consiguieran los efectos deseados.

• Grados de desequilibrio macroeconómico y la escala en el uso de los instrumentos

Un problema con la ejecución de las políticas de estabilización macroeconómica, como lo señala Edwards,[1] es que no establecen de manera precisa cuál debe ser la escala a la que se deben usar los diferentes instrumentos de acuerdo con los diferentes grados de desequilibrio macroeconómico que enfrente la economía. Éste es un asunto central porque el tiempo de ajuste requerido para que la economía llegue al equilibrio podría prolongarse innecesariamente si se utilizaran los instrumentos en una escala inadecuada.

• Expectativas racionales

Si los agentes económicos tuvieran expectativas racionales podrían anticipar de manera adecuada cuáles serían las políticas gubernamentales en el futuro y sus efectos, y actuarían en consecuencia, alterando la eficacia de las mismas.

[1] Edwards, Sebastian (1989), *Real Exchange Rate, Devaluation and Adjustment*, Cambridge University Press.

Las expectativas racionales son importantes en la nueva macroeconomía clásica. Quienes las introducen en el análisis tratan de mostrar que cualquier intento del gobierno por estabilizar el nivel de producción y empleo no restablecerá fácilmente el equilibrio macroeconómico en el corto plazo.

Si los agentes económicos se basan en expectativas racionales éstos fundamentan sus expectativas acerca del futuro en información adecuada y conocen el funcionamiento de la economía y anticipan las políticas gubernamentales en el futuro. Ello alterará su comportamiento en el presente y como consecuencia actuarán, modificando de manera significativa los resultados esperados de la política macroeconómica gubernamental efectuada en el presente.

Cuanto más oportunamente y mejor informados estén los agentes económicos y más conocimiento tengan acerca de las políticas macroeconómicas pasadas y sus efectos y anticipen correctamente las acciones futuras de política del gobierno, más relevante será el supuesto de expectativas racionales en una economía.

En ciertas circunstancias es más adecuado suponer que los agentes económicos tienen expectativas adaptativas en lugar de expectativas racionales, por ejemplo en las economías en vías de desarrollo, debido a que en este tipo de economías hay imperfecciones importantes en la fluidez y en el acceso a la información por parte de los agentes económicos privados y la información de la que disponen puede ser parcial e inoportuna. Por otra parte aunque ellos tengan expectativas racionales puede ocurrir —como es el caso— que en este tipo de economías haya rigideces salariales, por lo que las políticas fiscal y monetaria pueden tener efectos reales sobre la economía, en el corto plazo.

• Interdependencia intertemporal de las políticas

Thomas Sargent[2] analizó la interdependencia intertemporal de las políticas monetaria y fiscal. Señalaba que la economía no se podía modelar adecuadamente por medio de un juego de Ponzi, pues la deuda del sector público tenía que pagarse algún día, lo cual imponía una restricción intertemporal sobre la relación entre la políticas fiscal y la política monetaria.

---

[2] Sargent, Thomas (1993), *Rational Expectations and Inflation*, Harper Collins, Nueva York.

Señalaba, básicamente, que el tomador de decisiones se movía entre dos regímenes posibles de política: uno ricardiano y uno monetarista. En el primero, reducir los impuestos en el presente significaba que éstos se tendrían que aumentar en el futuro, suponiendo que el gobierno no utilizaría la monetización para financiar sus déficits actuales o futuros. En el segundo la única opción para el tomador de decisiones era la de monetizar los déficits en el presente o en el futuro, porque ni los impuestos ni el gasto público se usarían con el propósito de corregirlos.

Por supuesto que podría llevarse a cabo alguna combinación de monetización, aumento de impuestos y disminución de gasto para pagar la deuda pública; sin embargo lo importante aquí era, que en cualquier caso las selecciones intertemporales de las políticas fiscal y monetaria estarían interrelacionadas, lo cual influiría sobre la manera en que los instrumentos de política afectarían los objetivos. Dada la política fiscal futura, el tomador de decisiones no debería elegir una política monetaria cualquiera, sino una que fuera congruente con la política fiscal elegida en el presente y con la necesidad de pagar la deuda pública en el futuro.

• Estabilidad y velocidad de ajuste

Si el país enfrentara un choque externo y la economía se desestabilizara desviándose de la posición preferida por la sociedad, el tomador de decisiones tendría que considerar cómo regresar a esta posición. Sin embargo podría ocurrir que aunque la economía recuperara el equilibrio deseado por la sociedad, el proceso fuera lento y que esto resultara inaceptable para la sociedad.

Este problema ya ha sido analizado por varios autores, no obstante todavía podrían persistir algunos problemas que restarían eficacia a la política, por ejemplo, el que los agentes económicos contaran con información escasa y contradictoria y el tomador de decisiones no tuviera una idea precisa y clara de los coeficientes estructurales del sistema, de sus momentos estadísticos, su media y varianza, o no se pudieran identificar con un nivel adecuado de confianza los rezagos de los efectos de las acciones de política económica.

• Teoría del caos

Un problema del análisis original de Tinbergen es que suponía linealidad en la vecindad del equilibrio, lo cual puede ser una limitación. Bajo ciertas condiciones lo adecuado podría ser abordar el análisis de las relaciones entre los objetivos e instrumentos a través de un sistema no lineal, en lugar de uno lineal y en esta situación podría ser útil la teoría del caos.

• La función de bienestar social

En una sociedad plural pueden surgir dos problemas: los objetivos pueden no estar bien definidos y, por otra parte podría ser muy complejo transformar preferencias individuales en preferencias sociales. Esto significa que se necesitaría definir una función de bienestar social para que el tomador de decisiones pudiera maximizarla.

• Teoría de la elección pública

La escuela de la elección pública creada principalmente por James Buchanan, señala que como los funcionarios públicos tienen intereses y objetivos propios no es difícil imaginar que algunos utilizarán los instrumentos de política para alcanzar sus propios objetivos y no los de la sociedad. Esta situación podría crear un fenómeno de desconfianza de los ciudadanos para con sus gobiernos. En este sentido sería importante poner atención no sólo en la selección de los objetivos de política, sino también en los procesos de ejecución de las mismas y en la selección de las personas que van a llevarlas a cabo.

Por lo tanto, una pregunta relevante sería: ¿Es posible crear un mecanismo mediante el cual los funcionarios públicos responsables del diseño y ejecución de las políticas, por ejemplo, un gabinete económico y sus diferentes niveles de ejecución, actúan para alcanzar los objetivos que desea la sociedad? Aquí es donde un congreso o un parlamento democráticos pueden tener un efecto muy positivo en su función de aprobar, supervisar y controlar las iniciativas de política y la ejecución de las mismas a través del Poder Ejecutivo de un país. La función de supervisión de un parlamento o de un congreso es muy importante en las democracias modernas. Los medios de información pueden desempeñar también un papel importante porque pueden llamar la atención sobre lo que los funcionarios hacen cómo y cuándo lo hacen, y el público puede, de esta manera, tener otros puntos de vista independientes sobre las decisiones de política económica y sus resultados. Esto podría ayudar a cerrar la brecha entre lo que prefieren los funcionarios y las preferencias sociales. Una desviación de los objetivos sociales podría corregirse mediante la remoción de los funcionarios; sin embargo, aunque ésta sea una solución para atender casos específicos, sería fundamental crear contrapesos suficientemente fuertes al Poder Ejecutivo para que éste se dirija hacia el logro de los objetivos que prefiere la sociedad.

• Más objetivos que instrumentos

Se podría pensar que, debido a que los requisitos de la sociedad siempre aumentan, es usual tener más objetivos que instrumentos. Sin embargo, el tomador de decisiones siempre puede eliminar objetivos irrelevantes y/o establecer una clara prioridad intertemporal de los mismos.

CAPÍTULO

6

Verificación empírica: Análisis econométrico de las relaciones entre los instrumentos y objetivos de política económica en varios países

En el siglo veinte los economistas intensificaron los esfuerzos para avanzar en el análisis cuantitativo de los efectos de la política económica. Un desarrollo muy importante en esta línea de análisis fue el de los modelos econométricos, ya que éstos permiten evaluar operacional y cuantitativamente los efectos de los instrumentos sobre los objetivos de política.

Ragnar Frisch y Lawrence Klein hicieron aportaciones fundamentales a la econometría y posteriormente la Comisión Cowles de la Universidad de Yale promovió de manera especial su aplicación. Décadas más tarde los modelos econométricos de ecuaciones simultáneas fueron cuestionados debido a que como señaló Robert Lucas en su famosa crítica en estos modelos se suponía que los agentes económicos no cambiaban sus reglas de decisión cuando se modificaba la política económica del gobierno.

A manera de ejemplo de lo que se puede llevar a cabo en términos de la cuantificación de las relaciones entre objetivos e instrumentos de política podemos citar el trabajo de John B. Taylor,[1] de la Universidad de Stanford, publicado en 1993: "La Política Macroeconómica en la Economía Mundial: del Diseño Macroeconómico a la Operación en la Práctica," en el cual toma en cuenta la crítica de Lucas y supone que los agentes económicos tienen expectativas racionales.

En este trabajo Taylor analiza la interdependencia macroeconómica que hay entre las economías del G-7: Japón, Canadá, Italia, Reino Unido, Alemania, Francia y Estados Unidos. En su modelo Taylor no sólo simula los efectos cualitativos sino también las implicaciones cuantitativas de diferentes reglas de política económica en cada uno de estos países. Con base en modificaciones de variables de política monetaria, fiscal y cambiaria se calculó las trayectorias de los impactos que éstas tienen en los objetivos de política de cada uno de estos países. Es interesante subrayar que en el modelo de Taylor la estructura superpuesta de negociaciones salariales aún es capaz de producir resultados de tipo keynesiano.

Robert Lucas consideró que con esta obra Taylor establecía en ese momento la frontera de la simulación en política macroeconómica.

Otro trabajo que se consideraba en la frontera del análisis econométrico de esa época era el de Ralph C. Bryant, Peter Hooper y Catherine L. Mann,[2] de Brookings, quienes reunieron a varios grupos de investigadores para analizar cuáles políticas macroeconómicas llevarían a un grupo de economías nacionales consideradas individualmente, y a la economía mundial en su conjunto a situaciones superiores en términos de Pareto. En su estudio señalaban que al tratar de alcanzar ciertos objetivos macroeconómicos los tomadores de decisiones deben tomar muy en cuenta la existencia de incertidumbre que puede afectar la forma en que los instrumentos se relacionan con los objetivos en la esfera nacional e internacional, porque es un hecho que las economías nacionales sufren las consecuencias de diferentes tipos de choques externos e internos que dificultan el logro de sus objetivos de política. Las técnicas de simulación estocástica pueden revelar mucho más

---

1 John B. Taylor (1993), *Macroeconomic Policy in a World Economy: From Econometric Design to Practical Operation*, W. W. Norton, Nueva York.

2 Ralph C. Bryant, Peter Hooper y Catherine L. Mann (1993), *Evaluating Policy Regimes. New Research in Empirical Macroeconomics*, The Brookings Institution, Washington, D. C.

acerca de los efectos probables que se pueden derivar de una política cuando la economía recibe el impacto de una amplia variedad de choques que ocurren en el mundo real.[3]

Bryant, Hooper y Mann hicieron además particular hincapié en las consecuencias de la mayor interdependencia económica que se observa en el ámbito internacional. Como ellos mismos señalan: "La interdependencia económica creciente complica sustancialmente la toma de decisiones aún cuando los gobiernos tengan estimaciones confiables de los efectos que sus políticas tengan más allá de sus propias fronteras. Es típico que estos efectos reduzcan la efectividad de los instrumentos de política de un país sobre sus propios objetivos nacionales [...] Los impactos de las políticas que se llevan a cabo en el exterior restringen la habilidad de un gobierno para alcanzar sus propias metas disminuyendo el grado de control que los tomadores de decisiones de un país pueden ejercer sobre el logro de sus objetivos nacionales".[4] Con este análisis los autores retoman el tema de la interdependencia económica analizada por Cooper y lo hacen bajo un escenario de incertidumbre.

Subrayan por otra parte que los tomadores de decisiones deben tomar en cuenta la incertidumbre de los multiplicadores de política y que sería un error enfocarse únicamente en sus valores esperados, pasando por alto sus varianzas y covarianzas. Obsérvese que en los factores de ajuste de los instrumentos de nuestro modelo general bajo incertidumbre se están considerando no sólo los valores esperados de los instrumentos, sino también las covarianzas de los efectos de los mismos y los costos variables y de oportunidad derivados de su uso en la expresión (34) de la subsección 2.1.3 del capítulo 2 del Tomo I. Bryant, Hooper y Mann no toman en cuenta estos costos; sin embargo omitirlos en el análisis podría conducir a la adopción de decisiones erróneas respecto a las políticas a seguir.

En relación a los multiplicadores de política Bryant, Hooper y Mann recomiendan que cuanto más incierto sea el multiplicador de un instrumento de política menos agresivamente deberá usarse éste,[5] y nosotros señalaríamos que esto dependería del nivel y tipo de incertidumbre que existiera en la relación entre instrumentos y objetivos, de la existencia de costos fijos y variables derivados del uso de los instrumentos, de los efectos esperados de los instrumentos sobre los objetivos de política,

---

[3] *Ibid.*, p. 19.
[4] *Ibid.*, p. 16.
[5] *Ibid.*, p. 15.

de las covarianzas de los efectos de los instrumentos y de la interdependencia entre los objetivos macroeconómicos o los *trade-offs* entre ellos.

Una de las conclusiones más importantes del análisis de estos autores cuando consideran diferentes regímenes de política monetaria es que “ni los objetivos monetarios ni los de tipo de cambio funcionan tan bien como cuando el objetivo es una meta de crecimiento del PNB nominal, una tasa de crecimiento del PIB real o una tasa de inflación”.[6]

En el Tomo II de esta tesis aplicamos un análisis econométrico diferente al de Taylor y al de Bryant, Hooper y Mann ya que utilizamos vectores estructurales autorregresivos y vectores estructurales autorregresivos con corrección de errores. La aplicación de los vectores autorregresivos en el análisis del comportamiento y la dinámica de fenómenos económicos fue impulsada en los ochentas por Christopher Sims y este tipo de econometría permite analizar las eficacias relativas y absolutas y la ventaja comparativa de los instrumentos de política macroeconómica.

[6] *Ibid.*, p. 4.

CAPÍTULO

7

Conclusiones del Tomo I

En el primer tomo de la tesis se examinaron contribuciones fundamentales al marco teórico de instrumentos y objetivos de política económica y se desarrollaron nuevos modelos. En estos modelos se incorporaron múltiples instrumentos que actúan sobre múltiples objetivos, primero con análisis estático y después con análisis dinámico y se obtuvieron los siguientes resultados:

Al generalizar el modelo de William C. Brainard y un modelo basado en el de Henderson-Turnovsky se encontró que las conclusiones que se obtenían en un ámbito particular se sostenían en un ámbito general.

Se elaboraron dos modelos generales con un número irrestricto de instrumentos y objetivos en los cuales se incorporaron múltiples elementos que ya habían sido tratados en la literatura sobre este tipo de modelos. Entre estos elementos se consideraron: la certidumbre o la incertidumbre multiplicativa y aditiva, los efectos conocidos o esperados de los instrumentos sobre los objetivos, las covarianzas de los efectos de los instrumentos y los costos fijos y variables derivados del uso de los instrumentos. Se agregó además un nuevo elemento en el análisis: los costos de oportunidad crecientes asociados al uso de los instrumentos, que se modelaron como una función cuadrática de la derivada de los instrumentos respecto al tiempo.

La solución analítica que se propuso para estos modelos fue de forma exponencial y permitió explorar el papel que juegan las incertidumbres multiplicativa y aditiva así como los costos de oportunidad en el sistema.

La conjunción de elementos tradicionales y la incorporación de uno nuevo en la elaboración de los modelos generales I y II abren una nueva posibilidad para el análisis de los fenómenos de intercambios (<u>*trade-offs*</u>) crecientes entre objetivos de política económica, derivados del uso de los instrumentos.

El análisis de los modelos generales I y II ofrece algunos resultados interesantes:

Bajo incertidumbres multiplicativa y aditiva, suponiendo que $0 < r < 1$, A_j y A_k tienen el mismo signo, que $0 < b_i < 1$, $\sum_{i=1}^{N} b_i = 1$ (i = 1, 2, ... N), $\left[c_k + \sum_{l=1}^{N} c_{lk}\right] > 0$ y que las covarianzas de los efectos de los instrumentos son positivas, si la incertidumbre multiplicativa es la fuerza predominante en el sistema, *vis à vis* las fuerzas representadas por los efectos esperados de los instrumentos en los objetivos y los costos variables y/o los de oportunidad derivados del uso de los instrumentos [véase ecuación (30)] y se consideran sólo los factores negativos de ajuste de los instrumentos (λ_k negativas), el tomador de decisiones deberá decidir cuál es el objetivo más importante y la política óptima será la proliferación en el uso de los instrumentos para que el sistema llegue al equilibrio minimizando la función-objetivo de costo social *H.* Al considerar únicamente los factores negativos de ajuste de los instrumentos se está garantizando que el equilibrio sea estable.

Si en este escenario se elimina totalmente la incertidumbre, los instrumentos se deberán usar de acuerdo a su ventaja comparativa. En este caso prevalecerá la especialización como criterio de asignación óptima y se deberá observar el principio de la ventaja comparativa en el uso de los instrumentos, o principio de eficiencia —no eficacia— asignativa.

Si en el modelo general bajo certidumbre tomamos en consideración solamente los factores negativos de ajuste de los instrumentos y consideramos solo dos instrumentos y dos objetivos, un instrumento tendrá ventaja comparativa *vis à vis* el otro si el valor absoluto de su factor de ajuste es mayor al valor absoluto del factor de ajuste del otro instrumento. Esto ocurre, por ejemplo, si los efectos del instrumento sobre los objetivos de política económica son por lo menos de la misma magnitud que los del otro, pero simultáneamente su uso genera costos variables y de oportunidad menores que los del otro instrumento.

La ventaja comparativa de los instrumentos en una situación de certidumbre o en una de incertidumbres multiplicativa y aditiva está determinada por los siguientes factores:

- La certidumbre o incertidumbre multiplicativa en el sistema: con este tipo de incertidumbre en el sistema hay una relación aleatoria entre los instrumentos y los objetivos de política.
- Los efectos conocidos o esperados de los instrumentos sobre los objetivos, así como sus varianzas y covarianzas.
- Los costos variables generados por el uso de los instrumentos.
- La existencia de intercambios (*trade-offs*) crecientes entre los objetivos, derivados del uso de los instrumentos, o costos de oportunidad crecientes.
- Los ponderadores que reflejen la importancia de cada uno de los objetivos de política económica que se pretenden alcanzar.
- Las diferencias entre los valores iniciales de los instrumentos y sus valores óptimos.
- La tasa de descuento en el tiempo, para definir si los costos futuros se penalizan igual, más o menos que los costos presentes, en la función de costo social H.

Los elementos antes señalados intervienen en la determinación del tiempo de ajuste necesario para que los instrumentos de política alcancen sus valores óptimos.

Una diferencia de nuestro análisis respecto al de Mundell consiste en que este autor analiza las condiciones bajo las cuales se puede alcanzar el equilibrio y la estabilidad en éste, pero no toma en cuenta en su análisis ni la incertidumbre ni los costos fijos, variables o de oportunidad derivados del uso de los instrumentos y únicamente considera los efectos de los instrumentos sobre los objetivos de política económica. El análisis que realizamos en los modelos generales I y II se centra en definir las condiciones para alcanzar el equilibrio y la estabilidad de éste, considerando ambos tipos de incertidumbre —multiplicativa y aditiva— así como los costos de oportunidad, variables y fijos y los efectos conocidos y esperados de los instrumentos sobre los objetivos. Los modelos son dinámicos.

El elemento central en el análisis de Mundell fue el criterio que aplicó en su análisis. Este criterio fue el de eficacia, no el de eficiencia. Él mostró en su modelo de dos instrumentos y dos objetivos que la asignación óptima de los instrumentos era dirigir cada instrumento al objetivo sobre el cual tenía ventaja relativa en términos de eficacia, de lo cual derivó su principio de clasificación efectiva de mercado. El principio mundeliano no debe relacionarse con la idea de la ventaja comparativa en términos de eficiencia. Para ello debería haber incluido en su análisis además de los efectos de los instrumentos en los objetivos los costos derivados de su uso. Lo anterior es central para la economía normativa cuando la evaluación de la política económica se hace en términos de eficiencia y no de eficacia. De aquí que deriváramos el principio de eficiencia asignativa o principio de clasificación eficiente de mercado, tomando en cuenta los dos elementos.

Del análisis del modelo general I se concluye que bajo un conjunto de supuestos respecto a las variables del sistema y considerando únicamente los factores negativos de ajuste de los instrumentos (λ_k negativas), si la incertidumbre multiplicativa es lo suficientemente alta en relación a los costos de oportunidad y/o a los costos variables, la política de asignación óptima de los instrumentos desde el punto de vista de su eficiencia relativa será la proliferación, resultado contrario al de Mundell, quien deriva de su análisis que la asignación óptima desde el punto de vista del criterio de la eficacia relativa de los instrumentos es el de la especialización en el uso de los mismos. Si en cambio los costos de oportunidad y/o los costos variables son lo suficientemente elevados en relación a la incertidumbre multiplicativa, la política óptima será la especialización y éste es un resultado coincidente con el del análisis bajo certidumbre y sin costos de Mundell.

Respecto a la estabilidad del equilibrio en el modelo de Mundell el trastocamiento en la asignación óptima de los dos instrumentos para conseguir los dos objetivos conduce a la inestabilidad y el sistema se aleja del equilibrio.

Si en el modelo general II consideramos únicamente los factores negativos de ajuste de los instrumentos y una perturbación saca al sistema del equilibrio, será posible retornar a él —aunque no al mínimo costo social— aún si se trastoca temporalmente la asignación de los instrumentos, esto es, aún si éstos no se usan de acuerdo a su ventaja comparativa.

Si en el modelo general I se modifica el nivel de incertidumbre multiplicativa en el sistema o cambian los costos variables o los de oportunidad, o bien se alteran de manera significativa los efectos esperados de los instrumentos sobre los objetivos o las covarianzas de los efectos de los instrumentos, esto puede afectar el tiempo de ajuste para que el sistema llegue al equilibrio.

Si se parte de una situación de equilibrio en el sistema y los efectos esperados de los instrumentos aumentan lo suficiente respecto al resto de los elementos que aparecen en las λ_k negativas, *ceteris paribus*, el tiempo de ajuste para que los instrumentos alcancen sus valores óptimos puede disminuir [véase la ecuación (30)].

Los costos fijos y la incertidumbre aditiva son irrelevantes para determinar el tiempo de ajuste para que los instrumentos alcancen sus valores de equilibrio.

De los resultados del análisis del modelo general II se concluye que en condiciones normales, cuando hay certidumbre, si ésta es la fuerza dominante en el sistema y los costos de oportunidad y/o los costos variables son suficientemente altos en relación a los impactos de los instrumentos de política sobre los objetivos, se requerirá asignar los instrumentos aplicando el criterio de la especialización, de lo contrario los costos de oportunidad pueden alcanzar valores extraordinariamente altos si uno o más instrumentos se emplean de manera prolongada para alcanzar un objetivo en el que no tengan ventaja comparativa, ya que esta forma desventajosa de usar los instrumentos ocasiona un alejamiento de los valores deseados de uno o más objetivos de política.

La inflación en México en 1987 era significativamente alta y había riesgos de que la economía cayera en una hiperinflación. En esta situación era recomendable dirigir los instrumentos de política, incluyendo el tipo de cambio, hacia el objetivo de abatir la inflación. Sin embargo a partir de 1990 y antes de fines de 1994, cuando ese riesgo ya no existía, pero al mismo tiempo los costos de oportunidad de usar el tipo de cambio para combatir la inflación ya estaban presentes y eran significativamente altos en 1991, 1992, 1993 y 1994, era necesario que este instrumento se reorientara hacia el objetivo de reducir el desequilibrio externo y no al objetivo de disminuir aún más la inflación, aplicando, con ello, el principio de la ventaja comparativa en el uso de este instrumento.

A continuación se presentarán las conclusiones del primer tomo de la tesis para posteriormente explorar en el segundo tomo los costos de oportunidad derivados de usar el tipo de cambio y la eficacia de este instrumento para lograr diferentes objetivos de política macroeconómica en México.