

El problema de la constante cosmológica
en el contexto de las teorías
tenso-escalares

Tesis que presenta:

M. en C. Luz María Díaz Rivera
para obtener el grado de Doctor en Ciencias

Julio, 1999

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Departamento de Física

No nos preguntamos con qué propósito útil cantan
los pájaros, pues su canto es un placer y ellos
fueron creados para cantar.
Igualmente no deberíamos preguntarnos porqué
la mente humana se ocupa de sondear los cielos.
Los fenómenos de la naturaleza son tan grandes
y los tesoros escondidos en los cielos tan ricos,
precisamente para que a la mente humana
nunca le falte nuevo alimento.

J. Kepler

Dedicada a Antonio

Agradecimientos

Quiero expresar mi especial agradecimiento al Dr. L. Octavio Pimentel R. por su asesoría, paciencia y apoyo durante la realización de este trabajo.

Así mismo manifiesto mi profundo agradecimiento a todos mis familiares, amigos, compañeros y de manera muy especial a mi esposo, que de diferentes maneras, pero siempre en momentos importantes para mi, me han apoyado y alentado académica y personalmente.

Me es muy grato agradecer al departamento de física de UAM-I y en especial al área de gravitación por las facilidades prestadas para llevar a cabo el presente trabajo. De igual manera agradezco al grupo QTP de la universidad de Florida por las facilidades proporcionadas durante la escritura de esta tesis y por su calurosa acogida.

Deseo agradecer también a los sinodales, Dr. L. Urrutia, Dr. H. Morales, Dr. T. Matos y Dr. P. Chauvet por sus comentarios y sugerencias.

Finalmente agradezco a CONACyT el apoyo económico prestado durante parte del desarrollo de este trabajo a través de la beca crédito Registro 89452. Y de igual manera manifiesto mi agradecimiento al DAAD (Deutscher Akademischer Austauschdienst) por el apoyo económico prestado durante una importante etapa de mi formación académica y personal.

L. M. D. R.

Prefacio

El objetivo de este trabajo es presentar algunos aspectos del problema de la constante cosmológica en el contexto de las teorías tenso-escalares, las cuales en los últimos años han experimentado un renovado interés en base a sus implicaciones en cosmología.

Recientes progresos en el campo de la astrofísica y cosmología experimentales, como los llevados a cabo por el satélite COBE (“Cosmic Background Explorer”), por el telescopio espacial Hubble (HST) y de la observación de las estrellas Supernovas clase Ia, han hecho posible una determinación más confiable de parámetros cosmológicos, constituyendo una guía para la construcción de escenarios cosmológicos más realistas.

Por otra parte, uno de los problemas que enfrenta la cosmología teórica moderna es explicar los pequeños valores de la constante cosmológica que se obtienen de métodos observacionales y que contradicen las predicciones de las teorías cuánticas y de física de partículas.

El renovado interés en las teorías tenso-escalares, particularmente la teoría de Brans-Dicke, se debe esencialmente a su posible relevancia durante un periodo de expansión inflacionaria en el universo temprano, así como a la característica de permitir una transición de fase desde una inflación exponencial a una inflación de ley de potencias. Otros problemas, como el relacionado a la materia oscura, han encontrado posibles explicaciones en estas teorías, o como las teorías de cuerdas que han encontrado un contexto más adecuado en las teorías tenso-escalares.

El problema de la constante cosmológica, por su parte, tiene una larga historia que ha pasado por diferentes fases desde que fue propuesta por Einstein en 1917. Los grandes valores del término cosmológico predichos por las teorías de partículas y sus pequeños valores medidos actualmente, han hecho surgir la idea de que dicha

“constante” no sea tal, si no una función del tiempo. Esta idea también ha sido ampliamente estudiada en el contexto de la teoría de Relatividad General en que surgió y en el que es necesario imponer tal dependencia temporal. Esto no sucede así en el contexto de las teorías tenso-escalares en las que tal dependencia temporal surge de manera natural al introducirse como un potencial que es función del campo escalar. Éste es el hecho que motiva a este trabajo.

La primera parte de este trabajo se dedica a establecer las bases que dieron origen a la idea de una constante cosmológica dinámica, haciendo una revisión de los antecedentes históricos así como de los problemas actuales de la constante cosmológica (capítulo 1). También se hace una revisión de las teorías tenso-escalares, haciendo particular énfasis en la teoría de Brans-Dicke y de la constante cosmológica en el contexto de estas teorías (capítulo 2). En el capítulo 3 presentamos un resumen de generalidades sobre las ideas de inflación haciendo énfasis en las características del campo escalar y discutiendo los criterios en base a los cuales es posible tratar a los campos escalares en forma clásica.

La segunda parte de este trabajo se dedica a la presentación de dos modelos cosmológicos que consideran a una constante cosmológica dinámica en el contexto de la teoría tenso-escalar de Brans-Dicke. Proponiendo un potencial simple (proporcional al campo escalar), con el objeto de obtener soluciones exactas, se obtienen modelos cosmológicos válidos durante un periodo “coasting”. Todas las soluciones obtenidas presentan la característica de tener una constante cosmológica que decae con el cuadrado del tiempo, hecho que resulta importante si se busca consistencia con las observaciones, de acuerdo a las cuales la constante cosmológica es muy pequeña hoy en día.

Para un modelo cosmológico es importante predecir parámetros que puedan ser comparados con sus valores deducidos de observaciones. Con este propósito, además del de ampliar el periodo de validez de los modelos cosmológicos, así como evitar la limitación de un potencial demasiado ideal, en el capítulo 5 proponemos otro modelo cosmológico en el que usamos un potencial que es una función binomial del campo escalar. Consideramos también que el universo está vacío o contiene a un fluido perfecto con una ecuación de estado barotrópica. En cada caso presentamos soluciones exactas y parámetros cosmológicos que podemos comparar con observaciones, lo cual nos permite descartar algunos de los modelos cosmológicos obtenidos

o acotar su validez para alguna etapa de la evolución del universo. Para alguna ecuación de estado particular las soluciones no presentan singularidad, siendo otra característica importante de los modelos presentados. Sin embargo la ausencia de singularidad no es característica de todas las soluciones aquí presentadas, así es que también estudiamos las regiones donde algunas soluciones son singulares.

La mayoría de los modelos cosmológicos obtenidos tienen la característica de presentar una constante cosmológica que decrece con el tiempo, además de parámetros cosmológicos que están en relativo acuerdo con las observaciones. En algunos otros casos resueltos no se tiene tal acuerdo, haciendo posible acotar mejor las condiciones de aplicabilidad de la teoría dando así una mejor perspectiva de las características bajo las cuales una constante cosmológica dinámica queda mejor descrita en el contexto de una teoría tenso-escalar.

En el capítulo 6 hacemos un resumen de los resultados obtenidos en este trabajo y de sus perspectivas. En el apéndice A se presenta la demostración de que si se satisface la condición de no divergencia, entonces las ecuaciones de campo de los capítulos 4 y 5 se satisfacen también. En el apéndice B se demuestra que la acción utilizada en los modelos presentados en los capítulos 4 y 5, se transforma en la acción correspondiente a las teorías de cuerdas a bajas energías, cuando se considera el caso de vacío y una relación específica entre los campos escalares. En el apéndice C se dan las definiciones de los invariantes de curvaturas utilizadas en el capítulo 5.

En este trabajo usaremos signatura $+2(-,+,+,+)$ y unidades naturales $c = \hbar = 1$.

Contenido

Agradecimientos	iii
Prefacio	v
I Bases para Λ dinámica	1
1 Antecedentes	3
1.1 Antecedentes históricos	3
1.2 Problemas actuales de la constante cosmológica	6
1.2.1 Teorías propuestas.	7
1.2.2 Restricciones observacionales.	10
2 Teorías tenso-escalares (TST)	15
2.1 Constante cosmológica dependiente del tiempo	15
2.2 Teorías tenso-escalares	16
2.3 Teoría de Brans-Dicke	19
3 Restricciones para un tratamiento clásico	23
3.1 Generalidades sobre inflación	23
3.2 Condiciones para un campo escalar clásico	29
II Modelos cosmológicos con Λ dinámica en TST	35
4 Cosmología “coasting”	37

4.1	Resumen	37
4.2	Introducción	37
4.3	Ecuaciones de campo	38
4.4	Soluciones para vacío	40
4.4.1	Caso plano $k = 0$	40
4.4.2	Soluciones para el caso no plano, $k \neq 0$	41
4.5	Fluido barotrópico	43
4.6	Fluido de falso vacío	44
4.7	Conclusiones	45
5	Modelos Cosmológicos con Λ dinámica	47
5.1	Resumen	47
5.2	Introducción	47
5.3	Ecuaciones de campo	49
5.4	El parámetro de densidad	52
5.5	Caso de vacío	53
5.6	Ecuación barotrópica	57
5.6.1	Fluido de polvo	63
5.6.2	Fluido “Stiff matter”	68
5.7	Fluido de radiación	72
5.8	El caso de falso vacío	74
5.9	Conclusiones	80
6	Resumen, conclusiones y perspectivas	83
A	Condición de no divergencia	85
B	Aplicación a teorías de cuerdas	87
C	Invariantes de curvatura	93
	Bibliografía	95
	Artículo I	
	Artículo II	

Parte I

Bases de las teorías tenso-escalares con constante cosmológica

Capítulo 1

Antecedentes

1.1 Antecedentes históricos

La constante cosmológica fue introducida primeramente por Einstein en 1917 [1], cuando aplicando su nueva teoría al universo, consideró necesario imponer la restricción de que el universo debía ser estático. Este hecho era aceptado en base a que las velocidades relativas de las estrellas son muy pequeñas comparadas a la velocidad de la luz. Sin embargo dichas soluciones estáticas no se obtenían de las ecuaciones originales de Einstein, de modo que las modificó agregando un nuevo término que involucraba un parámetro libre Λ , la constante cosmológica.

Casi inmediatamente surgió una inconsistencia. En el modelo de Einstein había una conexión entre la densidad de masa del universo y su geometría, porque siguiendo el principio de Mach, Einstein esperaba que la distribución de masa del universo estableciera sistemas inerciales. En 1917 de Sitter propuso otro modelo cosmológico aparentemente estático, sin materia, cuyo elemento de línea (usando el mismo sistema de coordenadas que la conocida métrica de de Sitter, pero con una notación diferente [2]) estaba dado por $d\tau^2 = \cosh^{-2}(Hr)[dt^2 - dr^2 - H^{-2} \tanh^2(Hr)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$, donde H es un parámetro que se relaciona a la constante cosmológica por $H = \sqrt{\Lambda/3}$. Como se trataba de un modelo para vacío, claramente no se necesitaba materia para producir inercia.

Aproximadamente en la misma época Slipher descubrió el corrimiento al rojo de objetos distantes. De 1910 a 1920, Slipher [3] observó que algunas galaxias (entonces conocidas como nebulosas espirales), tenían corrimientos al rojo de aproximadamente 6 % y muy pocas tenían corrimientos al azul. En 1923 Weil señaló

que el modelo de de Sitter predecía tales corrimientos al rojo que se incrementaban con la distancia ya que la métrica, en el sistema de coordenadas de de Sitter, es dependiente del tiempo y los objetos de prueba no están en reposo. Así, hay una componente no nula de la conexión afín, resultando un corrimiento al rojo proporcional a la distancia.

La constante cosmológica había sido necesaria para un universo estático, pero no era necesaria para un universo en expansión. En 1922 Friedmann [4] presentó una clase de modelos cosmológicos de acuerdo a los cuales el universo se expande o contrae, pero las galaxias mantienen coordenadas fijas. El modelo de de Sitter resulta ser el caso particular de los modelos de Friedmann para un universo plano y vacío. De esta manera se demostró que pueden encontrarse soluciones con expansión si $\Lambda = 0$ y se considera a un universo no vacío. El conclusivo descubrimiento de Hubble en 1929, de la ley de expansión lineal que relaciona al corrimiento al rojo con la distancia, hizo que los modelos de Friedmann fueran el marco geométrico de referencia estándar en el cual el descubrimiento de Hubble fue interpretado subsecuentemente.

Sin embargo no es trivial quitar simplemente la constante cosmológica, ya que “cualquier cosa” que contribuya a la densidad de energía del vacío, actúa justamente como una constante cosmológica. Una de las primeras publicaciones donde se discutió la contribución de fluctuaciones cuánticas a la constante cosmológica, surgió de observaciones astronómicas. Al final de los 60's, se observó una cantidad “excesiva” de cuasares con corrimiento al rojo de ~ 2 . Puesto que $1 + z$ es la razón entre el factor de escala cósmica $a(t)$ hoy en día y su valor en el momento en que su luz fue emitida, esta excesiva cantidad de cuasares con dicho corrimiento al rojo podría explicarse si el universo tuviera un valor de $a(t)$ igual a aproximadamente $1/3$ de su valor actual. En 1927 Lemaitre había propuesto un modelo en expansión que se originaba en un estado asintóticamente estático. En tal modelo se proponía una constante cosmológica efectiva y curvatura positiva, precisamente como en los modelos de Einstein. Cuando la densidad de masa de este modelo toma el valor de la densidad de masa del universo de Einstein, el modelo se comporta como el universo estático de Einstein, hasta que tiene lugar una inestabilidad y el universo empieza a expandirse nuevamente. Para que esta idea explique una preponderancia de corrimientos al rojo de ~ 2 , la densidad de energía del vacío tendría que ser de

~ 3 veces la presente densidad de masa. Fue precisamente esta consideración que condujo a Zeldovich en 1967 a tratar de tomar en cuenta la densidad de energía del vacío en términos de fluctuaciones cuánticas. Pero la verdadera preocupación acerca de la densidad de energía del vacío surgió del éxito de la idea del rompimiento espontáneo de simetría en la teoría electro-débil.

De acuerdo con la teoría electro-débil, para tener una constante cosmológica igual a cero hoy en día, tiene que partirse de un valor muy grande de ésta en la etapa anterior a la transición de fase electrodébil. Este hecho tiene ventajas pues, un valor grande de la constante cosmológica en el universo temprano controlaría la inflación, resolviendo varios de los problemas de la teoría cosmológica [5].

Con la introducción de la constante cosmológica en la teoría electo-débil surgen otros problemas y como resultado del esfuerzo para resolver estos problemas se recurre a otras teorías, como las teorías de supersimetría, supergravedad, supercuerdas, consideraciones antrópicas, mecanismos de ajuste, otras teorías de gravedad distintas a la relatividad general y teorías de cosmología cuántica [6].

Con la intención de hacer compatibles a las teorías inflacionarias y de física de partículas que predicen grandes valores de la constante cosmológica, con los muy pequeños valores obtenidos de las observaciones, en 1933 se propuso una constante cosmológica dependiente del tiempo [57]. A estas teorías se les ha dedicado mucha atención (ver *e.g.* [58]-[97]); pues son capaces de resolver algunos de los problemas de la constante cosmológica, sin embargo en la mayoría de ellas prevalece la característica de introducir tal dependencia temporal de manera *ad hoc*.

Es en este punto que las teorías escalares tensoriales tienen más éxito al tratar el problema de la constante cosmológica. Un modelo donde Λ decae dinámicamente fue propuesto por Dolgov en 1983 [7], de modo que en el límite cuando $t \rightarrow \infty$, $\Lambda_{efectiva} \rightarrow 0$. Sin embargo el mecanismo que hace decrecer a la constante cosmológica en estas teorías, también hace decrecer a la constante gravitacional efectiva, volviéndose dependiente del tiempo, como sucede en las teorías tenso-escalares. El modelo más simple y natural en teorías de campos es el modelos de un campo escalar ϕ con un potencial de auto-interacción $V(\phi)$ mínimamente acoplado a la gravedad.

Aun prevalecen argumentos en favor y en contra de estas teorías de gravedad, principalmente de carácter observacional, las cuales revisaremos a lo largo de este

trabajo.

1.2 Problemas actuales de la constante cosmológica

Uno de los principales problemas en torno a las teorías que consideran una constante cosmológica es lograr que dichas teorías predigan el pequeño valor de la constante cosmológica obtenido de las observaciones actuales.

Recientes observaciones de supernovas tipo Ia (SN Ia), que indican que el universo se está acelerando, han motivado la reconsideración de un valor actual no nulo, si no pequeño, de la constante cosmológica. Los modelos de teorías de partículas predicen valores muy grandes de Λ . Las teorías cuánticas de campos toman en cuenta grados de libertad con energías menores a 100 GeV únicamente, donde todas las correcciones radiativas de altas energías están escondidas en los distintos parámetros del lagrangiano efectivo. En tal teoría efectiva de campo, la densidad de energía del vacío que sirve como fuente del campo gravitacional de largo alcance, se escribe como sigue

$$\rho_v = \frac{\Lambda}{8\pi G} + \frac{1}{2}\Sigma\hbar\omega, \quad (1.1)$$

donde Λ es la constante cosmológica y el segundo término de la ecuación representa la contribución de las fluctuaciones cuánticas en los campos de la teoría, tomados hasta una energía de partículas igual a 100 GeV. La teoría efectiva de campos es el conocido modelo estándar, del que se sabe que las fluctuaciones cuánticas no se cancelan, de modo que asumiendo $\hbar = c = 1$, dimensionalmente se tiene que

$$\frac{1}{2}\Sigma\hbar\omega \approx (100 \text{ GeV})^4. \quad (1.2)$$

Por otra parte, las observaciones restringen a ρ_v a valores no mayores que la densidad crítica, que corresponde al valor $\sim 10^{-48} \text{ GeV}^4$, así es que Λ debe ajustarse en la ecuación (1.1) para satisfacer la igualdad, es decir, Λ debe ser tal que los dos términos que no contienen a Λ en esta ecuación deben cancelarse hasta 56 decimales. Entender esta cancelación es lo que se conoce como el problema de la constante cosmológica. Las predicciones teóricas del valor de la constante cosmológica excede

a sus valores observacionales en aproximadamente 120 órdenes de magnitud. Este problema ha sido discutido y revisado en varios trabajos (ver *e.g.* [6], [8], [9]), en los que se han mencionado al menos cuatro posibles aproximaciones para resolver el problema de la constante cosmológica. A continuación describiremos dichas propuestas sin deducir con detalle sus resultados, los cuales pueden revisarse en las referencias correspondientes.

1.2.1 Teorías propuestas.

(i) Supersimetría, Supergravedad y supercuerdas.

De acuerdo con la teoría de supersimetría global

$$\{Q_\alpha, Q_\beta^\dagger\}_+ = (\sigma_\mu)_{\alpha\beta} P^\mu \quad (1.3)$$

donde Q_α y Q_β son los generadores de supersimetría, en los que α y β son subíndice espinoriales, σ_μ son las matrices de Pauli y P^μ es el operador energía-momento. Sin rompimiento de simetría el estado de vacío satisface

$$Q_\alpha |0\rangle = Q_\beta^\dagger |0\rangle = 0, \quad (1.4)$$

esto implica un valor nulo del vacío para $\langle P_\mu \rangle$ y por lo tanto una energía del vacío cero, como se requiere para que se anule Λ .

Cuando la supersimetría se rompe, a una energía $\sim 1 \text{ TeV}$ (T-tera = 10^{12}), se espera que $\|\rho_v\| > (1 \text{ TeV})^4$ lo cual es nuevamente 10^{54} veces demasiado grande. Así es que aunque supersimetría no rota parece una buena solución, rompimiento de supersimetría no permite resolver el problema. Una situación semejante sucede con supercuerdas.

(ii) Cosmología cuántica.

En 1984 Hawking [11] propuso una descripción en el marco de una teoría cuántica, de cómo podría obtenerse una distribución de valores para la constante cosmológica efectiva, con un enorme pico o máximo en $\Lambda_{\text{efectiva}} = 0$. La idea detrás de las propuestas basadas en cosmología cuántica tienen como fundamento a la función de onda del universo $\Psi[h, \phi]$, que es una función de la 3-métrica h_{ij} y de los campos de materia en una superficie espacialoide.

Para describir la idea esencial de esta propuesta, supondremos un universo vacío, *i.e.* sin campos de materia ni radiación, para el que se trata de determinar la función de onda para la configuración del universo en un momento particular. La configuración de tal universo en Relatividad General está dada por la 3-geometría de una superficie espacialoide y dicha geometría está descrita por una 3-métrica $h_{\mu\nu}(\mathbf{x})$. La cantidad $\mathbf{x}(t)$ es una 4-geometría Lorentziana, especificada por una 4-métrica g_{ij} , la cual induce la 3-geometría $h_{\mu\nu}$ en sus límites.

En Relatividad General la acción depende explícitamente de la 4-métrica g_{ij} , de modo que en analogía con la mecánica cuántica para obtener la función de onda, se construye la integral que es una función de $h_{\mu\nu}$

$$\Psi[h_{\mu\nu}(\mathbf{x})] = \int d g_{ij} \exp[i S(g_{\mu\nu})], \quad (1.5)$$

el espacio sobre el cual se toma esta integral es un espacio de 4-geometrías permitidas. La función de onda Ψ se define sobre el espacio de todas las posibles 3-geometrías, consistentes con las suposiciones iniciales. A este espacio se le llama super-espacio. Para incluir materia en esta formulación debe escribirse $\Psi[h_{\mu\nu}, \Phi]$, donde Φ representa al campo de materia en \mathbf{x} . La integral se toma sobre las 4-geometrías apropiadas consistentes con las 3-geometrías $h_{\mu\nu}$. La función de onda de la mecánica cuántica usual ϕ , evoluciona de acuerdo a la ecuación de Schrödinger, mientras que la función de onda del universo Ψ evoluciona de acuerdo a la ecuación de Wheeler-de Witt. La esencia del problema consiste en determinar lo que constituye “el conjunto de trayectorias adecuadas” sobre las cuales integrar, ésto es lo mismo que el problema de condiciones iniciales en cosmología cuántica y que permanece sin resolver.

La sugerencia de Hawking y Coleman consiste en que la suma del lado derecho de la ecuación (1.5), se lleve a cabo sobre la 4-geometría Euclidiana compacta, lo cual implica un cambio de $t \rightarrow -i\tau$ con respecto a los cálculos Lorentzianos usuales. En este caso la 4-geometría no tiene límite y se le llama frecuentemente la *conjetura de no límite*. Entre otras ventajas, las integrales euclidianas relevantes pueden hacerse converger en alguna forma tal que las integrales Lorentzianas aparentemente no pueden hacerlo. Sin embargo Vilenkin [12], entre otros, ha propuesto otra elección de condición inicial con un modelo en el que el universo sufre una especie de efecto túnel cuántico desde un estado de vacío (modelos de “agujeros de gusano”). Esto

corresponde a una “creación” definida mientras que la propuesta de Hawking no tiene “creación”.

El uso de “agujeros de gusano” no ha tenido éxito para derivar $\Lambda \rightarrow 0$, debido a que se ha cuestionado el uso de Gravedad Euclidiana, además de que los agujeros de gusano, si es que existen, se vuelven macroscópicamente grandes y estrechamente cercanos para que las observaciones noten variaciones en Λ .

(iii) Gravedad Cambiante.

Algunos autores han sugerido la posibilidad de cambiar las reglas de Relatividad General clásica, de modo que la constante cosmológica aparezca como una constante de integración sin relación a los parámetros de la acción. Esto no resuelve el problema de la constante cosmológica si no que lo cambia de manera sugerente.

Un ejemplo de gravedad cambiante [13] es hacer no dinámico al término $g = \det g_{\mu\nu}$ en la acción generalizada

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int dx [R + L(g - 1)] \quad (1.6)$$

donde R es el escalar de Ricci y L es un multiplicador de Lagrange. Por variación se encuentra que $R = -4\Lambda = \text{constante}$. Minimizando la acción se tiene $\Lambda = 2\sqrt{6\pi}/\sqrt{V}$, donde V es el volumen del espacio tiempo.

En la integral de trayectoria

$$Z = \int d\mu(\Lambda) \exp(3\pi/G\Lambda), \quad (1.7)$$

favoreciendo al valor $\Lambda \rightarrow 0^+$.

(IV) Principio antrópico.

De acuerdo con el principio antrópico [14], si $\Omega_\Lambda \gg 1$, la expansión exponencial rápida evita que se formen grumos de materia por condensaciones gravitacionales, requiriendo al menos que $\Omega_\Lambda < 400$ para que ésto suceda. Por otra parte, si $\Omega_\Lambda \ll 0$, el universo se colapsa en un tiempo finito, sin haber suficiente tiempo para que evolucione la vida. Por ejemplo, si $\Lambda = -(M_{Planck})^4$, el factor de escala a llegaría a tener solamente 0.1 mm, ($\sim 10^{-30}$ veces su valor actual). Tomando en cuenta ambas consideraciones, se establece la condición

$$-1 \leq \Omega_\Lambda \leq 400, \quad (1.8)$$

ésta es una fuerte restricción de acuerdo a la cual, valores de Λ muy cercanos a cero son más favorable para la vida, en comparación con grandes valores como $(M_{Planck})^4$.

(V) Teorías invariantes de escala.

Recientemente Guendelman [15] ha investigado las condiciones necesarias que debe cumplir un potencial escalar para tener invariancia de escala. Usando el sistema conforme de Einstein, ha obtenido modelos en los que Λ es una función que decae con el tiempo, además de tener un escenario inflacionario para el universo temprano. Es decir, el requerimiento de invariancia de escala determina la forma del potencial escalar que garantiza modelos cosmológicos libres del problema de la constante cosmológica.

Transformando esta teoría al sistema conforme de Jordan, obtenemos teorías tenso-escalares para las que G es variable [105]. Estas teorías serán discutidas con mayor detalle en el siguiente capítulo.

1.2.2 Restricciones observacionales.

Es importante mencionar además, algunas implicaciones, derivadas de resultados observacionales, en las teorías que tratan de resolver el problema de la constante cosmológica, como la anisotropía en la temperatura de la radiación cósmica de fondo y los resultados derivados de las supernovas tipo Ia con grandes corrimientos al rojo.

(i) Anisotropía de la temperatura de la radiación cósmica de fondo.

La radiación de fondo cósmica fue descubierta en 1965 [16] y fue hasta 1992 cuando el satélite COBE (Cosmic Background Explorer) detectó anisotropía en la temperatura de la radiación de fondo. Los resultados de COBE son consistentes con un espectro de fluctuaciones escalares primordiales de densidad, que debieron haber sido generadas por fluctuaciones cuánticas durante la inflación [17]. El satélite COBE obtuvo sus resultados con una sensibilidad angular de 1° . Ésto motivó otra serie de experimentos con mayor sensibilidad angular, por ejemplo el satélite MAP (Microwave Anisotropy Probe) de la NASA que funcionará en el año 2000, o el explorador Plank de ESA que funcionará en el año 2005. Hasta el momento los resultados de COBE apoyan al modelo de Big Bang, sin embargo aunque el éxito del modelo del Big Bang “caliente” se debe a que resuelve importantes cuestiones como

la expansión del universo, la radiación cósmica de fondo y cálculos de nucleosíntesis, éste deja sin respuesta a dos importantes problemas: el problema de horizontes y el problema de planidad.

El problema de horizontes. Cuando tuvo lugar la última dispersión de la radiación cósmica de fondo, la edad del universo era de alrededor de $\sim 100,000$ años. El tamaño del horizonte en la etapa de la recombinación subtendría ahora un ángulo de $\sim \pi/200$ radianes. La esfera celeste subtiene 40 000 regiones que nunca estuvieron conectadas causalmente de acuerdo con el modelo de Big Bang, sin embargo de acuerdo a las observaciones, su temperatura es la misma menos una parte en 10^5 . La cuestión es, ¿cómo llegó a ser esto posible de acuerdo con el modelo de Big Bang?

El problema de planidad. De la ecuación de Friedmann con $\Lambda = 0$,

$$\frac{k}{a^2} = (\Omega - 1) \frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (1.9)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala, k es el escalar de curvatura y Ω es el parámetro de densidad. Evaluando para el tiempo t y el tiempo actual t_0 :

$$(\Omega - 1) = 4 H_0^2 t^2 \frac{T^2}{T_0^2} (\Omega_0 - 1), \quad (1.10)$$

donde se ha usado $a \sim \sqrt{t} \sim T^{-1}$ y donde T es la temperatura durante la etapa dominada por la radiación. Para altas densidades se tiene

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3} \simeq \frac{8\pi G \alpha T^4}{6} \quad (1.11)$$

donde $\alpha = 7.56 \times 10^{-9} \text{ erg m}^{-3} \text{ K}^{-4}$ es la constante de radiación. De esto se encuentra

$$t(\text{segundos}) = (2.42 \times 10^{-6}) g^{-1/2} T(\text{GeV})^{-2} \quad (1.12)$$

así es que

$$(\Omega_t - 1) = (3.64 \times 10^{-21}) h_0^2 g^{-1} T(\text{GeV})^{-2} (\Omega_0 - 1). \quad (1.13)$$

Esto significa que si se toma $t = 1$ s, cuando $T \simeq 1 \text{ MeV}$, entonces debe cumplirse $\|\Omega_t - 1\| < 10^{-14}$ para $\Omega_0 \sim 1$ como sucede ahora. En etapas más tempranas, el “fine tuning” de Ω_t se vuelve más fuerte si se quiere que el presente universo

sea compatible con las observaciones. La cuestión es, ¿porqué entonces Ω_t es tan extremadamente cercana a $\Omega_t = 1$ en el universo temprano?

(ii) Supernovas tipo Ia con grandes corrimientos al rojo.

Recientemente se descubrieron estrellas supernovas tipo Ia (SN Ia) [18], con grandes corrimientos al rojo ($z > 0.3$).

La importancia de este descubrimiento surge del hecho de que la relación luminosidad-distancia es de trascendental importancia para determinar parámetros cosmológicos, una vez que se ha determinado el brillo absoluto de alguna clase de objetos astronómicos. La relación magnitud - corrimiento al rojo relaciona la magnitud aparente m de un objeto, con su magnitud absoluta M :

$$m - M = 5 \log_{10} \frac{d_L}{Mpc} + 25, \quad (1.14)$$

d_L es la *luminosidad distancia*. Puesto que d_L depende de la geometría del espacio y su contenido de materia, la relación magnitud - corrimiento al rojo puede usarse para determinar Ω_Λ y Ω_{total} , si m y M se conocen.

Las SN Ia se pueden calibrar para usarse como fuentes estándares para obtener estimaciones de la relación luminosidad - distancia d_L . Las supernovas Ia son estrellas que han explotado y de las cuales ha surgido una estrella enana blanca, la cual ha cruzado el límite de estabilidad de Chandrasekhar, mientras acreta materia desde una estrella compañera [19]. La gran magnitud absoluta de las estrellas SN Ia ($M_B \simeq -19.5$ mag), sugiere que se pueden observar a grandes distancias, haciéndolas muy útiles para medir y restringir parámetros cosmológicos. Las características de las estrellas SN Ia, que hacen posible la medida de d_L , son las siguientes: (i) La dispersión en su luminosidad en el máximo de su luz es extremadamente pequeña (≤ 0.3 mag); (ii) La amplitud de la curva de luz de las supernovas está extremadamente correlacionada con su luminosidad intrínseca, *i.e.* una supernova más brillante tendrá una curva de luz más amplia, indicativa de un declinamiento más gradual de su brillantes [20]. Las características mencionadas en (i) y (ii), reducen la dispersión en la luminosidad absoluta de las supernovas Ia, a $\sim 10\%$.

De acuerdo con el modelo cosmológico estándar dominado por la materia, el corrimiento al rojo puede escribirse como sigue

$$(z + 1) = \frac{a_0}{a_t} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3}, \quad (1.15)$$

para las SN Ia $z = 0.83$, de modo que la edad de estas estrellas es $t = t_0/2.83$. Asumiendo que la edad del universo es de $t_0 \sim 14$ Gy, resulta que $t \simeq 6$ Gy, lo cual significa que las estrellas SN Ia son más viejas que el sistema solar y se encuentran a aproximadamente la mitad de la distancia al Big Bang.

De la observación de un grupo de estrellas SN Ia, Perlmutter *et al* [103] encontró que la unión de las distribuciones de probabilidad de los parámetros Ω_Λ y Ω_m se puede aproximar por la relación

$$0.8 \Omega_m - 0.6 \Omega_\Lambda \simeq -0.2 \pm 0.1. \quad (1.16)$$

De acuerdo con los datos observacionales, el mejor ajuste favorece a los valores $\Omega_m \simeq 0.4$ y $\Omega_\Lambda \simeq 0.6$. Cuando se combinan estos resultados con los obtenidos de COBE (ver *i.e.* [109]), se encuentra que $\Omega_\Lambda + \Omega_m \simeq 1$ [110].

Estos resultados dan una importante visión acerca de la dinámica de la expansión del universo. Un modelo del universo que pasa por una etapa dominada por la materia, antes de que sea dominado por Λ , debe pasar por un punto de inflexión en el cual la expansión del universo cambia de desaceleración ($\ddot{a}(t) < 0$) a aceleración ($\ddot{a}(t) > 0$). El parámetro de desaceleración q_0 se define como sigue

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (1.17)$$

este parámetro caracteriza la desviación de la relación lineal de Hubble $z \sim d_L/H_0$: $H_0 \simeq \frac{1}{d_L} \left[z + \frac{1}{2}(1+q_0)z^2 \right]$. En el modelo cosmológico estándar más simple (con $\Lambda = 0$), se espera que $q_0 = 1/2$, indicando una desaceleración en la razón de expansión. Uno de los más importantes resultados de SN Ia, es que el parámetro de desaceleración resulta ser negativo $q_0 \simeq -1/2$, indicando una razón de expansión acelerada. Si las únicas fuentes de energía que modulan la expansión son Ω_m y Ω_Λ , hay una relación entre ellas

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_\Lambda, \quad (1.18)$$

así es que $q_0 = 1/2$ favorece los valores $\Omega_m \sim 0.3$ y $\Omega_\Lambda \sim 0.7$. Podemos notar que Ω_Λ actúa como una presión negativa la cual acelera la expansión, ya que un

incremento en el volumen aunado a un incremento en la energía, sólo es posible si la presión es negativa.

Por otra parte, los datos de las SN Ia pueden usarse para restringir los modelos en los que se propone una dependencia temporal de Λ . En el caso de modelos con campo escalar y potencial del tipo $V(\phi) \sim \phi^{-p}$, la densidad del campo escalar en un modelo espacialmente plano, está restringida al intervalo $\Omega_\phi \in (0.6, 0.7)$ [21], [22]. Estos datos combinados con datos obtenidos de lentes gravitacionales, favorecen al modelo cosmológico espacialmente plano con constante cosmológica distinta de cero.

Capítulo 2

Teorías tenso-escalares (TST)

2.1 Constante cosmológica dependiente del tiempo

Con las evidencias observacionales que favorecen a un valor de Λ pequeño pero distinto de cero, y las predicciones de los modelos de inflación según las cuales Λ debió tener valores grandes en el universo temprano, resulta natural proponer la existencia de un término cosmológico que no es constante en el tiempo, y que representa un nuevo grado de libertad dinámico. Hasta ahora los resultados observacionales e incluso los modelos de inflación, no han demostrado que Λ deba ser constante, de hecho la constante cosmológica efectiva que aparece en el escenario inflacionario del universo temprano, no es exactamente una constante, sino que cambia lentamente con el tiempo [22].

El término cosmológico se ha considerado como constante por la siguiente razón: partiendo de las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía momento de la materia. Tomando la divergencia covariante de esta ecuación y tomando en cuenta que la divergencia covariante del tensor de Einstein está garantizada por las identidades de Bianchi, además de que el tensor energía-momento satisface la ley de conservación $\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0$, resulta que la divergencia covariante de $\Lambda g_{\mu\nu}$ debe ser igual a cero y por lo tanto $\Lambda = \text{constante}$. Este argumento, que sitúa a Λ en el lado izquierdo de las

ecuaciones de campo, es una interpretación geométrica del término cosmológico.

Otros tratamientos [23] colocan al término cosmológico en el lado derecho de las ecuaciones de campo:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \tilde{T}_{\mu\nu},$$

donde $\tilde{T}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}.$ (2.2)

Esto equivale a interpretar a Λ como parte del contenido de materia del universo. Con esta interpretación no hay alguna razón *a priori* por la cual Λ no deba variar, mientras que el tensor energía-momento satisfaga la condición de conservación de energía.

En los últimos años se han dedicado muchos trabajos a los modelos cosmológicos con constante cosmológica dependiente del tiempo (*e.g.* [58]-[97]). Recientemente Overduin [98] hizo una amplia revisión de los modelos donde el término cosmológico depende del tiempo o de distintos parámetros a su vez dependientes del tiempo, como $a(t)$, H o q , siguiendo una ley de decaimiento impuesta *a priori*. Overduin propone leyes de decaimiento impuestas, obteniendo soluciones exactas o numérica en algunos casos. Estos modelos, como la mayoría de los modelos propuestos, con Λ dinámica en el contexto de la teoría de Relatividad General, tienen la característica de introducir dicha dependencia temporal de manera *ad hoc*. En las teorías tensoriales-escalares dicha dependencia ocurre de manera natural, como discutiremos en la siguiente sección.

2.2 Teorías tenso-escalares con constante cosmológica dependiente del tiempo.

Desde el tiempo en que Dirac propuso su hipótesis acerca de la extraña relación entre constantes fundamentales, surgió la idea de una “constante” gravitacional variable [30]. Aproximadamente 20 años después, tal variación temporal fue introducida en las teorías relativistas por Brans y Dicke [27], en la cual la “constante” gravitacional se vuelve un campo variable.

La teoría de Dirac motivó numerosos intentos de formular una teoría de campos de gravitación en la cual la “constante” de gravitación efectiva fuera alguna función

del campo escalar. Jordan [28] propuso una teoría que involucraba a un tensor energía-momento no conservado, por lo que fue muy criticado. La teoría tenso-escalar más completa es la de Brans-Dicke, que se vuelve equivalente a la teoría de Jordan en el caso especial de un tensor energía-momento con traza nula.

La generalización más simple de la teoría de gravedad de Einstein se expresa en las teorías tenso-escalares, que contienen al tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y a un campo escalar adicional ϕ . La intensidad del acoplamiento entre la gravedad y el campo escalar está determinado por una función arbitraria de acoplamiento $\omega(\phi)$, que distingue a las diferentes teorías tenso-escalares.

En 1983 Dolgov [7] consideró un campo escalar sin masa y no mínimamente acoplado, de modo que la densidad Lagrangiana está dada por

$$\ell = \frac{1}{2}(\phi^t \phi_{,t} - \omega R \phi^2), \quad (2.3)$$

resultando la siguiente ecuación de movimiento

$$\square\phi + \omega R \phi = 0, \quad (2.4)$$

donde R es el escalar de curvatura y ω es el acoplamiento a la gravedad. Considerando el caso de un campo escalar homogéneo, las ecuaciones de Einstein son

$$3H^2 = \Lambda + 8\pi G(\rho_\phi + \rho_{materia}), \quad (2.5)$$

donde la densidad de energía del campo escalar es

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + 3\omega H^2 \phi^2 + 6\omega H \phi \dot{\phi}. \quad (2.6)$$

Así la ecuación de campo escalar se reduce a la siguiente

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + 6\omega\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]\phi = 0. \quad (2.7)$$

De acuerdo con el trabajo de Dolgov, valores negativos de ω implican campos escalares inestables, es decir, su densidad de energía ρ_ϕ se vuelve grande y negativa, compensada por la constante cosmológica, de modo que la constante cosmológica efectiva resultante decae a cero. El término $3\omega H^2 \phi^2$ en la expresión para ρ_ϕ , puede incluirse en el lado izquierdo de la ecuación (2.5), resultando

$$3H^2 \simeq \frac{\Lambda}{1 - 8\pi G\omega\phi^2} + \dots \quad (2.8)$$

Como Dolgov demostró en su trabajo, si $\omega < 0$, entonces $\phi(t)$ crece con el tiempo, de modo que $\Lambda_{efectiva} = \Lambda/(1 + 8\pi G|\omega|\phi^2)$ decrece. Para $\rho_m \ll \rho_\phi$, (2.5) y (2.7), se tienen ([7], [24]) las siguientes formas asintóticas

$$a(t) \sim t^q, \quad q = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega}, \quad \phi \sim t. \quad (2.9)$$

Así, en el límite cuando $t \rightarrow \infty$, $\Lambda_{efectiva} \rightarrow 0$, es decir, el término cosmológico se anula para grandes valores de t .

Este mecanismo tiene otras consecuencias, pues no solo hace decrecer al término cosmológico, si no también a la constante gravitacional efectiva, pues de la ecuación (2.5) se tiene

$$G_{efectiva} = \frac{G}{1 - 8\pi G\omega\phi^2} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

como consecuencia, la constante gravitacional se vuelve una función del tiempo: $\dot{G}_{efectiva}/G_{efectiva} = -2/t$. Otro problema es que el “ocultamiento” de Λ no es suficiente. La parte restante de Λ es del orden del tensor de Ricci para todo tiempo, mientras que lo que se necesita es que sea mucho menor que el tensor de Ricci durante la época dominada por la materia, para obtener suficiente crecimiento de las perturbaciones escalares.

Algunos de los procedimientos más exitosos para introducir una constante cosmológica dinámica son “fenomenológicos”, ésto significa que no se intenta derivar estos modelos de alguna teoría cuántica de campos. El primero de ellos se basa en el teorema “no-hair” propuesto por Hoyle y Narlikar en 1963 [53], el cual esencialmente establece que si existe una constante cosmológica positiva, la expansión de todo modelo de universo tenderá a un estado de de Sitter, es decir, si existe una constante cosmológica el universo se volverá homogéneo e isotrópico, sin importar las condiciones iniciales. Es decir, se asume una constante cosmológica y se determinan las condiciones para tener un comportamiento asintótico de un estado de de Sitter [54].

El segundo procedimiento consiste en introducir un conjunto de condiciones que permitan obtener asintóticamente un comportamiento de de Sitter para el factor de

escala. Esto se logra introduciendo una constante cosmológica efectiva mediante la expansión asintótica de de Sitter [99].

Existen otros métodos, como el método de modelos cinemáticos, en el cual se asume que Λ es una función del tiempo cósmico o del factor de escala del modelo de Friedman-Robertson-Walker (FRW). Otro método es el de modelos hidrodinámicos. En éste, el término Λ se describe por un fluido perfecto barotrópico con ecuación de estado $p_\Lambda = \epsilon\rho$, donde ϵ es una constante. Un tercer tipo de método corresponde a modelos de campos teóricos; en este método se asume que el término Λ es un nuevo campo clásico físico, llamado el *campo lambda*, con un lagrangiano fenomenológico. En este método el modelo más simple y natural es el que usa un campo escalar ϕ con algún potencial de auto-interacción $V(\phi)$, mínimamente acoplado a la gravedad y no a algún otro campo físico. En un universo de FRW, todos los métodos mencionado convergen.

Existe un renovado interés en las teorías tenso-escalares debido a sus resultados en cosmología inflacionaria, ya que proveen de un mecanismo para “salir” de la fase inflacionaria sin problema “fine-tuned”, además de que la mayoría de las más recientes teorías de unificación predicen la existencia de parejas escalares de la teoría tensorial de Relatividad general. Tal es el caso de varias de las teorías de Kaluza-Klein [25] así como de las teorías de super simetría con dimensiones extra, y de las teorías de super cuerdas, en las que las teorías tenso-escalares aparecen de manera natural como límite de bajas energías. Otra característica que hace interesantes a las teorías tenso-escalares es el hecho de que pueden satisfacer los experimentos de campo débil del sistema solar, así como otras observaciones [26].

2.3 Teoría de Brans-Dicke

La más simple de las teorías tenso - escalares es la teoría de Brans-Dicke [27], para la cual la constante de acoplamiento del campo escalar con la gravedad es una constante: $\omega = \text{constante}$.

Las ecuaciones de relatividad General de Einstein pueden obtenerse también aplicando un principio variacional a la función lagrangiana dada por

$$\ell_{RG} = \ell + \frac{1}{16\pi G} R, \quad (2.11)$$

donde ℓ es la función lagrangiana de la materia y R es el escalar de curvatura. En la teoría de Brans-Dicke la función lagrangiana correspondiente está dada por

$$\ell_{BD} = \ell + \frac{1}{16\pi}\phi R - \frac{1}{16\pi}\frac{\omega g^{ij}\phi_{;i}\phi_{;j}}{\phi}, \quad (2.12)$$

donde ϕ es un campo escalar sin masa y ω es la ya mencionada función de acoplamiento, que en este caso es una constante. Comparando las funciones lagrangianas de Relatividad General y de Brans-Dicke, puede notarse que el inverso del campo escalar ϕ juega el papel de la constante gravitacional G . Las ecuaciones de campo derivadas de la función lagrangiana de Brans-Dicke están dadas por

$$\square\phi \equiv g^{ik}\phi_{;i;k} = \frac{8\pi}{3+2\omega}T_i^i, \quad (2.13)$$

de donde se obtienen

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi}{\phi}T_{ij} - \frac{\omega}{\phi^2}(\phi_{;i}\phi_{;j} - g_{ij}\phi_{;k}\phi^{;k}) - \frac{1}{\phi}(\phi_{ij} - g_{ij}\square\phi), \quad (2.14)$$

donde T^{ij} es el tensor energía momento de un fluido perfecto y barotrópico, apropiado para ℓ , de hecho la traza del tensor energía-momento es la fuente del escalar ϕ . Introduciendo la métrica de Robertson-Walker se obtienen las siguientes ecuaciones de campo [29]

$$\begin{aligned} 3\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{8\pi}{3+2\omega}\frac{1}{\phi}[(2+\omega)\rho + 3(1+\omega)p] - \omega\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - \frac{\ddot{\phi}}{\phi}, \\ \dot{\rho} &= -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p), \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi\rho}{3\phi} - \frac{\dot{\phi}\dot{a}}{\phi a} + \frac{\omega}{6}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2, \\ \frac{d}{dt}(\dot{\phi}a^3) &= \frac{8\pi}{3+2\omega}(\rho - 3p)a^3. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En el marco de la aproximación Newtoniana, el potencial debe ser $G_0 M/r$, lo cual se obtiene si la constante gravitacional se identifica como

$$G_0 = \frac{1}{\phi_0}\left(\frac{4+2\omega}{3+2\omega}\right). \quad (2.16)$$

Los modelos cosmológicos que resuelven el sistema de ecuaciones (2.15), depende de las cantidades \dot{a}_0 , a_0 , ϕ_0 y ρ_0 , además de los parámetros k (constante de curvatura) y ω . Así, el conjunto de soluciones a la teoría de Brans-Dicke constituye una familia de soluciones más amplia que la correspondiente a los modelos de Friedman. La teoría de relatividad general se recupera en el límite cuando $\omega \rightarrow \infty$.

El término cosmológico se introduce en esta teoría como una función potencial que dependen del campo escalar, de donde adquiere su carácter dinámico de manera natural, como lo mostramos en los capítulos 4 y 5.

Comparando las teorías de Einstein y de Brans-Dicke encontramos que en ambas teorías se satisface la ley de conservación de energía-momento. El corrimiento al rojo gravitacional predicho por BD es exactamente el mismo que el obtenido de la teoría de Einstein. La desviación de la luz en la teoría de Brans-Dicke es $(3 + 2\omega)/(4 + 2\omega)$ veces el valor predicho por Einstein. Por otra parte, la teoría de Brans-Dicke deja libre al parámetro ω , siendo necesario determinarlo mediante métodos observacionales.

Una de las pruebas más importantes de la validez de esta teoría está relacionada con la variación temporal de G , por ejemplo, el comportamiento orbital de Mercurio y Venus, datos antiguos de eclipses lunares, datos de fósiles, evolución estelar (en particular del Sol), deflección de la luz por cuerpos celestes y el avance del perihelio de Mercurio. Todas estas observaciones y datos experimentales no proporcionan bases para descartar a la teoría de Brans-Dicke, pero limitan fuertemente al parámetro de acoplamiento $\|\omega\| \approx 500$. Sin embargo es necesario llevar a cabo mejores estimaciones de este parámetro para restringir más precisamente su valor, por ejemplo, obteniendo éste de otros parámetros cosmológicos [101]. Por otra parte, teorías del universo temprano, como las teorías de cuerdas, se describen mucho mejor en el contexto de la teoría de Jordan-Brans-Dicke y muestran que el parámetro ω puede tomar valores negativos [102]. En el apéndice B mostramos que para $\omega = -1$, las soluciones obtenidas en los capítulos 4 y 5 corresponden a las soluciones de las teorías de cuerdas a bajas energías, para una específica relación entre los campos escalares y los potenciales de ambas teorías.

Capítulo 3

Restricciones para un tratamiento clásico

3.1 Generalidades sobre inflación

La mayor parte de nuestro actual entendimiento del Universo es consistente y hermosamente resumido por el modelo cosmológico del “Big-Bang” caliente. Esta descripción matemática se basa en las soluciones de Robertson-Walker para las ecuaciones de Einstein de relatividad general en el caso de un universo homogéneo e isotrópico. La evolución del Universo está contenida en el factor de escala cósmica $a(t)$, que describe escalas mayores a todas las distancias físicas en el Universo, desde la longitud de onda de fotones hasta la separación de galaxias. El éxito de este modelo se debe a que supera algunas pruebas observacionales entre las que destacan las siguientes

- La expansión del Universo.
- La existencia de la radiación de fondo en microondas y su espectro.
- La abundancia de elementos ligeros en el Universo (nucleosíntesis).
- La edad del Universo predicha por este modelo es comparable a medidas directas de la edad de objetos astronómicos.
- Existe una explicación razonable para el desarrollo de estructuras en el Universo, dadas las irregularidades de la radiación de fondo en microondas detectadas por COBE.

Todas estas características hacen del modelo del “Big-Bang” caliente, uno de los más exitosos. Sin embargo este modelo está limitado a épocas en las que el Universo es suficientemente frío para que los procesos físicos que tienen lugar durante esta etapa sean bien entendidos por medio de experimentos realizados en la Tierra.

Actualmente el Universo está dominado por la materia y debido a que la radiación disminuye más rápidamente que la materia cuando tiene lugar la expansión, se deduce que en épocas más tempranas de la evolución del Universo, éste estuvo dominado por la radiación. Durante la era dominada por la radiación la temperatura y el tiempo están relacionados por

$$\frac{t}{1\text{s}} \simeq \left(\frac{10^{10}\text{K}}{T} \right)^2. \quad (3.1)$$

Las energías más altas accesibles por experimentos terrestres, generadas en aceleradores de partículas, corresponden a una temperatura del orden de 10^{15} K, la cual existía cuando el Universo tenía una edad de 10^{-10} s. Antes de este tiempo, no se tienen evidencias directas de la aplicabilidad de las leyes de la física, de modo que para construir modelos, deben hacerse extrapolaciones basadas en física de partículas. Así es que el modelo del “Big-Bang” caliente describe con éxito la historia del Universo resumida en los siguientes eventos:

- 10^{-4} s. Condensación de Quarks para formar protones y neutrones.
- 1 s. El Universo se ha enfriado lo suficiente para que tenga lugar la formación de núcleos ligeros, vía el proceso de nucleosíntesis.
- 10^4 años. La densidad de radiación disminuye al nivel de la densidad de la materia. Esta época se conoce como la igualdad radiación-materia. Subsecuentemente el Universo es dominado por la materia.
- 10^5 años. La radiación se desacopla de la materia, dando como resultado la formación del fondo en microondas. Este evento coincide más o menos con la recombinación cuando los electrones libres se combinan con los núcleos para formar átomos.
- 10^{10} años. Actualmente.

Antes de esta etapa, se ha podido entender la historia del Universo hasta 10^{-43} s después de su comienzo, pero a tiempos más tempranos la densidad de energía habría sido tan grande que la teoría de relatividad general de Einstein tendría que ser reemplazada por una teoría cuántica de gravedad, la cual aun no se establece consistentemente.

Cuando el modelo estándar del “Big-Bang” se extiende a estas épocas muy tempranas de la evolución del Universo, surgen varios problemas. El primero de ellos es que se hace evidente que el modelo requiere varias suposiciones muy rigurosas sobre las condiciones iniciales del Universo. El hecho de que el modelo no explica el porqué de la existencia de dichas condiciones iniciales tan especiales, hace pensar que el modelo no es completo. El problema de planidad y el problema de horizontes descritos brevemente en la sección 1.2.2, son dos importantes problemas de este modelo. Además, la mayoría de las teorías modernas de partículas elementales predicen que en el universo muy temprano se producirían partículas exóticas conocidas como monopolos magnéticos. En el modelo estándar del “Big-Bang” el número de monopolos sería tan grande que sus masas alterarían dramáticamente la evolución del Universo, con resultados que evidentemente son inconsistentes con las observaciones.

El modelo del universo inflacionario se desarrolló con el propósito de superar estos problemas. La dinámica que gobierna al periodo de inflación tiene características muy interesantes: el universo evoluciona desde un conjunto de condiciones iniciales hasta un estado que es precisamente el que tiene que ser postulado como condición inicial en el modelo estándar. Por otra parte, la densidad de monopolos magnéticos predicha, se vuelve suficientemente pequeña para no ser observada. El modelo inflacionario parece ser una solución simple y natural, en el contexto de los desarrollos recientes de las teorías de partículas elementales, para la solución de muchos de los problemas del modelo del “Big-Bang” caliente.

La idea de inflación fue propuesta originalmente por Guth en 1980. Una manera de plantear la idea de inflación es considerar la ecuación de Friedmann como se utiliza para analizar el problema de planidad:

$$|\Omega - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2}. \quad (3.2)$$

En el modelo del “Big-Bang” caliente aH siempre decrece, de modo que Ω siempre se aleja del valor 1; invirtiendo dicho comportamiento se resolvería el problema. La inflación se define como una época en que la expansión es acelerada $\ddot{a} > 0$; esta condición se puede escribir de diferentes maneras: inflación $\implies \ddot{a} > 0$, $\implies d(H^{-1}a^{-1})/dt < 0$, $\implies p < -\rho/3$.

Un periodo de expansión inflacionaria es suficiente para resolver numerosos problemas cosmológicos, pero es necesario un escenario para llevar a cabo tal expansión, el cual es proporcionado por un campo escalar cosmológico.

En física de partículas se utiliza un campo escalar para representar partículas de espín cero, éste se transforma como un campo escalar (sin cambios) bajo transformación de coordenadas. En un universo homogéneo el campo escalar es una función sólo del tiempo.

En teorías de partículas, los campos escalares son cruciales para el rompimiento espontáneo de simetría. Uno de los ejemplos mejor conocidos es el campo de Higgs que rompe la simetría electro-débil. También se espera que los campos escalares estén asociados con el rompimiento de otras simetrías, como las de las teorías de gran unificación o de super-simetría, entre otras.

Considerando a un campo escalar homogéneo ϕ . La densidad de energía efectiva y presión de este campo escalar se obtienen de un tensor energía-momento construido para ϕ en analogía con el tensor energía-momento de un fluido perfecto:

$$\begin{aligned}\rho_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \\ p_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi).\end{aligned}\tag{3.3}$$

El primer término en cada una de estas expresiones se puede interpretar como una energía cinética y el segundo como una energía potencial. La energía potencial $V(\phi)$ puede visualizarse como una forma de energía “configuracional” o que da forma. Esta mide la cantidad de energía interna asociada con un valor de un campo particular. Normalmente, como todos los sistemas, los campos escalares tratan de minimizar esta energía, pero una característica crucial que permite que la inflación tenga lugar, es que los campos escalares no son siempre muy eficientes para alcanzar este estado de energía mínima. Debe mencionarse también que un campo escalar no puede representarse en general por una ecuación de estado, pues no hay un único

valor de p que pueda asociarse con un valor dado de ρ , pues la densidad de energía puede dividirse en diferentes formas en energía potencial y energía cinética.

En una teoría dada, $V(\phi)$ es una función que se escoge arbitrariamente; distintas elecciones de la forma de $V(\phi)$ corresponden a diferentes modelos de inflación. Como algunos ejemplos se tiene

$$\begin{aligned} V(\phi) &= L(\phi^2 - M^2)^2 && \text{Potencial de Higgs,} \\ V(\phi) &= \frac{1}{2}m^2\phi^2, && \text{Campo escalar masivo,} \\ V(\phi) &= L\phi^4 && \text{Campo escalar autointeractuante,} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Con esta elección arbitraria de $V(\phi)$ es posible lograr muchas de las propiedades claves de la inflación, buscando algún potencial simple o más realista.

Las ecuaciones para un universo en expansión que contiene a un campo escalar homogéneo se obtienen al utilizar las ecuaciones (3.3) en las ecuaciones de Friedmann:

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} \left[V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right], \\ \ddot{\phi} + H\dot{\phi} &= -V'(\phi), \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde la prima indica derivada respecto a ϕ . El término de curvatura se ha ignorado porque se sabe que por definición éste se hará despreciable cuando empiece la inflación. Entonces

$$\ddot{a} > 0 \iff p < -\frac{\rho}{3} \iff \dot{\phi}^2 < V(\phi), \quad (3.6)$$

habrá inflación donde quiera que domine la energía potencial. Esto debe ser posible en la medida en que el potencial sea suficientemente plano para que el campo escalar ruede lentamente. El potencial debe tener también un mínimo en el que la inflación pueda terminar.

La manera estándar de resolver las ecuaciones (3.5) es usando la aproximación de lento rodamiento (“slow-roll”), que asume que en cada una de las ecuaciones de movimiento se puede despreciar un término obteniendo simplemente

$$H^2 \simeq \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} V(\phi), \quad (3.7)$$

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi). \quad (3.8)$$

definiendo los parámetros de lento rodamiento

$$\begin{aligned} \epsilon(\phi) &\equiv \frac{m_{Pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \\ \eta(\phi) &\equiv \frac{m_{Pl}^2}{8\pi} \frac{V''}{V}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

El primer parámetro mide la pendiente del potencial y el segundo la curvatura. Así la condición necesaria para que se cumpla la condición de lento rodamiento es

$$\epsilon \ll 1, \quad |\eta| \ll 1. \quad (3.10)$$

Estas condiciones para la aproximación de lento rodamiento son necesarias, pero no son suficientes. Una versión más elaborada de la aproximación de lento rodamiento se basa en el formalismo para la inflación de Hamilton-Jacobi [32], derivándose una condición necesaria y suficiente.

La aplicabilidad de la condición de lento rodamiento está relacionada estrechamente con la condición para que tenga lugar la inflación, y en muchos contextos las condiciones pueden considerarse equivalentes. La condición inflacionaria $\ddot{a} > 0$ se satisface para un rango muy amplio de comportamientos del factor de escala que indican que el modelo de universo están en expansión. Un ejemplo es la inflación de ley de potencial $a \propto t^p$ para $p > 1$, la cual es una solución exacta para un potencial exponencial

$$V(\phi) = V_0 \exp \left[-\sqrt{\frac{16\pi}{p}} \frac{\phi}{m_{Pl}} \right]. \quad (3.11)$$

La condición para inflación puede escribirse como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 > 0$$

$$H^2 \simeq \frac{8\pi}{3m_{Pl}^2} V(\phi), \quad (3.7)$$

$$3H\dot{\phi} \simeq -V'(\phi). \quad (3.8)$$

definiendo los parámetros de lento rodamiento

$$\begin{aligned} \epsilon(\phi) &\equiv \frac{m_{Pl}^2}{16\Pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \\ \eta(\phi) &\equiv \frac{m_{Pl}^2}{8\pi} \frac{V''}{V}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

El primer parámetro mide la pendiente del potencial y el segundo la curvatura. Así la condición necesaria para que se cumpla la condición de lento rodamiento es

$$\epsilon \ll 1, \quad |\eta| \ll 1. \quad (3.10)$$

Estas condiciones para la aproximación de lento rodamiento son necesarias, pero no son suficientes. Una versión más elaborada de la aproximación de lento rodamiento se basa en el formalismo para la inflación de Hamilton-Jacobi [32], derivándose una condición necesaria y suficiente.

La aplicabilidad de la condición de lento rodamiento está relacionada estrechamente con la condición para que tenga lugar la inflación, y en muchos contextos las condiciones pueden considerarse equivalentes. La condición inflacionaria $\ddot{a} > 0$ se satisface para un rango muy amplio de comportamientos del factor de escala que indican que el modelo de universo están en expansión. Un ejemplo es la inflación de ley de potencial $a \propto t^p$ para $p > 1$, la cual es una solución exacta para un potencial exponencial

$$V(\phi) = V_0 \exp \left[-\sqrt{\frac{16\pi}{p}} \frac{\phi}{m_{Pl}} \right]. \quad (3.11)$$

La condición para inflación puede escribirse como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 > 0$$

$$\begin{aligned} &\iff -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1 \\ &\iff \frac{m_{Pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 < 1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde en el último renglón se utilizó la aproximación de lento rodamiento. La condición final es justamente la condición de lento rodamiento $\epsilon < 1$, de modo que podemos afirmar: lento rodamiento \implies inflación.

Así ocurrirá inflación cuando se satisfaga la condición de lento rodamiento (excepto algunas restricciones), sin embargo lo contrario no es estrictamente cierto.

En los últimos 15 años aproximadamente, han surgido una gran cantidad de modelos inflacionarios con diferentes características, algunos de cuyos nombres solo mencionaremos:

- Inflación caótica [33].
- Teoría de campos múltiples [34].
- Inflación abierta [35].

Otras teorías que introducen un campo escalar explícito son las teorías tenso-escalares de las cuales forma parte la teoría de Brans-Dicke. Con una transformación conforme [36] es posible expresar a estas teorías tenso-escalares como relatividad general más uno o más campos escalares con algún potencial.

Por otra parte, el periodo de expansión acelerada o inflación que dura unas fracciones de segundo de la evolución del Universo, tiene consecuencias de gran importancia como lo es la producción de un espectro de perturbaciones de densidad y de ondas gravitacionales. Las perturbaciones de densidad pueden ser las responsables de la formación de galaxias y cúmulos de galaxias así como de la anisotropía de la radiación de fondo en microondas. Las ondas gravitacionales no influyen en la formación de galaxias y sus cúmulos, pero pueden contribuir con anisotropías extras en microondas.

3.2 Condiciones para un campo escalar clásico

Como mencionamos sin profundizar en la sección anterior, una de las características claves de los modelos inflacionarios es la fase llamada lento rodamiento, en la que

un campo escalar evoluciona rodando lentamente por la pendiente de un potencial. En general este campo escalar no es completamente clásico, de modo que deben tomarse en cuenta fluctuaciones cuánticas respecto a la solución clásica.

Dichos efectos cuánticos pueden ser importantes por varias razones, entre las principales puede mencionarse que controlan el tiempo que el campo escalar permanece cerca del máximo de la pendiente del potencial escalar, de modo que determinan la duración de la era inflacionaria, además de que las fluctuaciones cuánticas proporcionan la fuente de fluctuaciones en la densidad de masa, las cuales eventualmente dan origen a la formación de grandes estructuras.

En 1985 Guth y Pi [38] hicieron un análisis de las condiciones bajo las cuales este campo escalar cuántico en general, puede tratarse como un campo clásico. En la segunda parte de este trabajo se presentan dos modelos cosmológicos que utilizan un campo escalar clásico, de modo que con el objeto de situar el marco de validez de dichos modelos, describiremos brevemente la discusión del Guth y Pi a este respecto.

Se inicia la discusión considerando a una partícula moviéndose en un potencial

$$V(x) = -\frac{1}{2}\kappa x^2 \quad (3.13)$$

donde $\kappa > 0$. En $t = 0$ la partícula se describe por una función de onda la cual se centra y adquiere su máximo en $x = 0$. Se escoge una función de onda gaussiana por simplicidad. La evolución de la función de onda está gobernada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\kappa x^2 \psi. \quad (3.14)$$

Esta ecuación se satisface por una ecuación de onda de la forma

$$\psi(x, t) = A(t) \exp[-B(t) x^2], \quad (3.15)$$

cuando

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{A} &= \hbar^2 \frac{AB}{m}, \\ i\hbar \dot{B} &= \frac{\kappa}{2} + 2\hbar^2 \frac{B^2}{m}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde el punto sobre las variables indica diferenciación respecto al tiempo. La solución de estas ecuaciones está dada como sigue

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2\alpha^2} \tan[\phi - i\omega t] \\ &= \frac{1}{2\alpha^2} \frac{\sin(2\phi) - i \sinh(2\omega t)}{\cos(2\phi) + \cosh(2\omega t)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde ϕ es una constante de integración real que se relaciona con la amplitud del paquete de ondas en $t = 0$. Los parámetros α y ω se definen como sigue

$$\begin{aligned} \alpha^2 &\equiv \frac{\hbar}{\sqrt{m\kappa}}, \\ \omega^2 &\equiv \frac{\kappa}{m} \end{aligned} \quad (3.18)$$

El parámetro α describe una longitud de escala natural mecánica cuántica, análoga al radio de Bohr del átomo de hidrógeno. De hecho, el sistema será clásico cuando se aplique a escalas de longitud grandes comparadas con α .

El paquete de ondas está en su mínimo de amplitud cuando $t = 0$. Para una función de onda propiamente normalizada se tiene

$$A = (2\pi)^{-1/4} [b \cos(\phi - i\omega t)]^{-1/2} \quad (3.19)$$

donde

$$b = \alpha(\sin 2\phi)^{-1/2}. \quad (3.20)$$

El comportamiento de $\psi(x, t)$ para valores grandes de t está dado por la siguiente ecuación

$$\psi(x, t) \sim_{t \rightarrow \infty} (2/\pi)^{1/4} b^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{2}(\omega t + i\phi)\right] \exp\left[-e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} + \frac{i x^2}{2\alpha^2}\right]. \quad (3.21)$$

La distribución de probabilidades para x es gaussiana con

$$\langle x^2 \rangle \sim \frac{1}{4} b^2 e^{2\omega t}. \quad (3.22)$$

Cuando se varía ϕ , b^2 es minimizado cuando $\phi = \pi/4$ con $b = \alpha$. Este modelo tiene por objeto mostrar que para tiempos grandes la función de onda mecánica cuántica está descrita de manera exacta por la física clásica.

Considérese el conmutador de los operadores x y p

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.23)$$

notando que

$$\begin{aligned} p\psi &= \frac{\hbar x}{\alpha^2} \psi + O(e^{-2\omega t}), \\ &= \sqrt{m\kappa} x \psi + O(e^{-2\omega t}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde $\sqrt{m\kappa}x$ es el momento que correspondería a una partícula clásica que rodara desde el reposo hasta el máximo del potencial correspondiente al punto x . Examinando la conmutatividad de x y p :

$$xp\psi = \sqrt{m\kappa} x^2 \psi + O(e^{-2\omega t}), \quad (3.25)$$

$$px\psi = \sqrt{m\kappa} x^2 \psi - i\hbar\psi + O(e^{-2\omega t}). \quad (3.26)$$

La contribución del conmutador $i\hbar\psi$ será insignificante comparada a la del otro término, si $\hbar \ll \sqrt{m\kappa}x^2$, o utilizando la definición del parámetro α se tendrá equivalentemente $\alpha^2 \ll x^2$. Así para tiempos grandes en la región $x^2 \gg \alpha^2$, el conmutador $[x, p]$ se hace despreciable, de modo que no hay restricciones para una descripción clásica del sistema. La regla general es que la física clásica se aplica cada vez que la distancia sobre la cual la fase de la función de onda cambia en 2π (es decir, en una longitud de onda de de Broglie) sea mucho más corta que alguna otra longitud relevante. Alternativamente se puede decir que la física clásica se aplica cada vez que sea posible ignorar las incertidumbres Δx y Δp que satisfacen $\Delta x \Delta p \approx \hbar$. De hecho, para grandes valores de t , el comportamiento del sistema debe describirse no sólo por una trayectoria clásica, si no por una distribución de probabilidades clásica:

$$f(x, p, t) = |\psi(x, t)|^2 \delta(p - \sqrt{m\kappa} x) \quad (3.27)$$

$$= (2/\pi)^{1/2} b^{-1} e^{-\omega t} \exp \left[-2e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} \right] \delta[p - \sqrt{m\kappa}x]. \quad (3.28)$$

Para verificar que esta distribución de probabilidad proporciona una descripción clásica exacta del sistema para grandes valores de t , deben comprobarse dos aspectos:

- $f(x, p, t)$ obedece la ecuación clásica de movimiento

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{p} \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \quad (3.29)$$

- El valor de espectación de alguna variable dinámica Q puede calcularse usando una función de onda mecánica-cuántica ψ o una distribución de probabilidades clásica f :

$$\langle Q \rangle_f = \langle Q \rangle_\psi [1 + O(e^{-2\omega t})]. \quad (3.30)$$

En los siguientes dos capítulos describiremos dos modelos cosmológicos que consideran un campo escalar clásico.

Parte II

Modelos cosmológicos con constante cosmológica dependiente del tiempo

Capítulo 4

Cosmología “coasting” con constante cosmológica dependiente del tiempo

4.1 Resumen

En este capítulo consideramos el efecto de una constante cosmológica dependiente del tiempo, en el contexto de la teoría tenso-escalar de Brans-Dicke. Obtenemos modelos cosmológicos para un universo homogéneo e isotrópico vacío o que contiene a un fluido perfecto. Dichos modelos tienen un factor de expansión lineal, es decir, corresponden a una cosmología “coasting”. Además, la “constante” gravitacional decrece con el tiempo, es decir, nuestros modelos satisfacen la hipótesis de Dirac. La “constante” cosmológica, por su parte, decrece inversamente con el cuadrado del tiempo, de modo que se tiene un valor muy pequeño de ella actualmente.

4.2 Introducción

Como ya hemos mencionado, existe un renovado interés en las teorías de gravitación tenso-escalares, por dos principales razones: En primer lugar, la mayoría de las teorías unificadas, incluyendo teorías de super-cuerdas, contienen un campo escalar que juega un papel similar al campo escalar de las teorías tenso-escalares. En segundo lugar, el nuevo escenario de inflación extendida que resuelve el problema “fine tuning” de las llamadas “vieja inflación”, “nueva inflación” e “inflación caótica”, tiene un campo escalar que disminuye la tasa de expansión del universo

desde exponencial a polinómica, permitiendo la transición de fase desde un modelo de de Sitter a un modelo de universo dominado por la radiación, el problema llamado “graceful exit”.

Por otra parte, como es bien sabido, además de la solución estática con constante cosmológica obtenida por Einstein, existen varias soluciones dinámicas con constante cosmológica, muchas de las cuales fueron estudiadas por Lemaitre. En el caso particular de un universo con constante de curvatura positiva $k = 1$, Lemaitre obtuvo un modelo con la propiedad de tener un periodo “coasting”, *i.e.*, un periodo en el que la expansión es prácticamente constante. En 1970 este modelo despertó gran interés pues parecía explicar la aparente concentración de cuasares con corrimiento al rojo de ~ 2 [50] descubierta por Slipher [3], ya que en dicho modelo de Lemaitre, pueden ajustarse los parámetros tal que el periodo “coasting” produzca un exceso de cuasares con corrimiento al rojo precisamente de ~ 2 . Posteriormente desaparecieron tales evidencias estadísticas para el exceso de dicho tipo de cuasares, haciendo que este modelo tenga sólo interés histórico. Sin embargo existen otros modelos y otras teorías que predicen un periodo “coasting” [51], [52], como la que estudiamos en este trabajo.

Recientemente varios autores [58]-[97] han considerado las consecuencias de una constante cosmológica dependiente del tiempo, pero la mayoría de ellos introducen tal dependencia de manera *ad hoc*. En este capítulo consideraremos una familia de teorías tenso-escalares con un potencial que es equivalente a una constante cosmológica dependiente del tiempo, obteniendo tal dependencia de forma natural.

4.3 Ecuaciones de campo

Iniciamos nuestra discusión con la acción de la teoría tenso-escalar de gravitación más general [107]

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R - \phi^{-1} \omega g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 2\phi \lambda(\phi)] + S_{NG}, \quad (4.1)$$

donde $g = \det (g_{\mu\nu})$ G es la constante de Newton, S_{NG} es la acción de la materia no gravitacional. Las funciones arbitrarias $\omega(\phi)$ y $\lambda(\phi)$ distinguen las diferentes teorías tenso-escalares de gravitación. $\lambda(\phi)$ es una función potencial que juega el papel de una constante cosmológica, $\omega(\phi)$ es la función de acoplamiento de la

teoría particular. Relatividad General es el límite de esta teoría cuando $|\omega| \rightarrow \infty$ y $\lambda(\phi) \rightarrow 0$. Experimentos llevados a cabo en el sistema solar, implican que $|\omega| \geq 500$ [100]. Las ecuaciones de campo explícitas son

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi T_{\mu\nu}}{\phi} + \lambda(\phi) g_{\mu\nu} + \omega\phi^{-2}(\phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{;\lambda}\phi^{;\lambda}) + \phi^{-1}(\phi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu}\square\phi), \quad (4.2)$$

$$\square\phi + \frac{1}{2}\phi_{;\lambda}\phi^{;\lambda}\frac{d}{d\phi}\ln\left(\frac{\omega(\phi)}{\phi}\right) + \frac{1}{2}\frac{\phi}{\omega(\phi)}\left[R + 2\frac{d}{d\phi}(\phi\lambda(\phi))\right] = 0, \quad (4.3)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein. La última ecuación puede sustituirse por

$$\square\phi + \frac{2\phi^2 d\lambda/d\phi - 2\phi\lambda(\phi)}{3 + 2\omega(\phi)} = \frac{1}{3 + 2\omega(\phi)}\left(8\pi T - \frac{d\omega}{d\phi}\phi_{;\mu}\phi^{;\mu}\right), \quad (4.4)$$

donde $T = T_{\mu}^{\mu}$ es la traza del tensor tensión-energía de la materia. La condición de no divergencia del tensor tensión-energía de la materia se satisface si la ecuación de campo (4.3) se satisface también (como se demuestra en el apéndice A), de modo que nuestras ecuaciones de campo son (4.2) y (4.4).

La mayoría de los estudios recientes de la teoría de Jordan Brans Dicke se han enfocado en el comportamiento cualitativo de la cosmología en esta teoría, con o sin constante cosmológica. Sin embargo, generalmente se cree que el dilatón debe ser masivo para fijarlo al presente valor de la constante de Newton, así es que los modelos de Jordan-Brans-Dicke más realistas, incluyen a un potencial para el dilatón:

$$S = S_{JBD} - \int d^4x \sqrt{-g} V(\phi). \quad (4.5)$$

La forma específica de este potencial no es conocida, pero a altas temperaturas se estima razonable [42] que dicho potencial debería tener una forma como la siguiente: $V = V_0 \phi^n$. Con estos antecedentes y con el propósito de obtener soluciones exactas de las ecuaciones de campo, en este capítulo asumiremos las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \omega(\phi) &= \omega = \text{constante}, \\ \lambda(\phi) &= c\phi^m, \\ \phi &= \phi_1 t^q, \end{aligned} \quad (4.6)$$

con c , m y q constantes, (para resultados recientes cuando ω es una función del tiempo ver por ejemplo [43]).

Las ecuaciones de campo para esta elección de ω y λ , con un fluido barotrópico perfecto como contenido de materia en un elemento de línea homogéneo e isotrópico

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (4.7)$$

las ecuaciones de campo son

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{3k}{a^2} - c\phi^m = \frac{8\pi\rho}{\phi} + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - 3\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi}, \quad (4.8)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} + c\phi^m = \frac{8\pi p}{\phi} + \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} \quad (4.9)$$

$$\left[\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 3\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi}\right](3 + 2\omega) = 2c(1 - m)\phi^m + \frac{8\pi(\rho - 3p)}{\phi}. \quad (4.10)$$

Las derivadas respecto al tiempo se denotan por puntos sobre las variables. En las siguientes secciones de este capítulo encontraremos soluciones exactas para estas ecuaciones de campo, considerando a un fluido perfecto con una ecuación barotrópica de estado $p = \epsilon\rho$, además del caso de vacío.

4.4 Soluciones para vacío

4.4.1 Caso plano $k = 0$

Como primer caso consideraremos un universo vacío ($\rho = 0$) y plano ($k = 0$), de modo que las ecuaciones de campo (4.8)-(4.10) tienen la siguiente solución

$$\begin{aligned} a &= a_1 t, \\ \phi &= \phi_1 t^{-\frac{2}{1 \pm \sqrt{3+2\omega}}}, \\ \lambda &= \frac{\lambda_1}{t^2}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde a_1 y ϕ_1 , son constantes positivas arbitrarias y

$$\lambda_1 = \frac{3 + 2\omega}{\omega + 2 \pm \sqrt{3 + 2\omega}}.$$

En cuanto a las constantes que aparecen en las ecuaciones de campo, éstas tienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} m &= 1 \pm \sqrt{3 + 2\omega}, \\ c &= \frac{2(m - 1)^2}{m^2 \phi_1^m}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Como puede notarse de esta solución, $a(t)$ es lineal en el tiempo, garantizando un periodo “coasting”. El campo escalar, por su parte, es una función creciente del tiempo cuando el exponente está dado por $-2/(1 - \sqrt{3 + 2\omega})$, donde $\omega > -1$. Por el contrario, es una función decreciente del tiempo cuando el exponente es $-2/(1 \pm \sqrt{3 + 2\omega})$, con $\omega > -3/2$ cuando se toma el signo negativo de la raíz en el exponente, y $-1 > \omega > -1.5$ cuando se toma el signo positivo. $\lambda(t)$ decrece con el cuadrado del tiempo haciendo posible obtenerse valores pequeños de ella hoy en día.

Por otra parte, puesto que en el marco de la aproximación newtoniana la constante de gravitación puede aproximarse como

$$G = \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3} \frac{1}{\phi}, \quad (4.13)$$

y usando la definición de la constante de Hubble

$$H_0 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)_0 = \frac{1}{t_0}, \quad (4.14)$$

el valor de ϕ_1 puede relacionarse con parámetros observacionales, si se expresa en términos del valor actual de G y del parámetro de Hubble [55], [56], [60], [79]

$$\phi_1 = \frac{1}{H_0^{2/(1 \pm \sqrt{3 + 2\omega})} G_0} \frac{4 + 2\omega}{3 + 2\omega}, \quad (4.15)$$

cuyo valor numérico está en términos del parámetro ω .

4.4.2 Soluciones para el caso no plano, $k \neq 0$

La solución en este caso está dada de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
a &= a_1 t, \\
\phi &= \phi_1 t^{-2/m}, \\
\lambda &= \frac{\lambda_1}{t^2},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

donde

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{\frac{km^2}{2 + 2m + 2\omega - m^2}}, \\
\lambda_1 &= \frac{2(3 + 2\omega)}{m^2},
\end{aligned}$$

y ϕ_1 es una constante positiva arbitraria. En cuanto a las constantes introducidas en las ecuaciones de campo, éstas cumplen las siguiente relación

$$c = \frac{2(3 + 2\omega)}{\phi_1^m m^2},$$

donde además m es una constante arbitraria, de cuyo signo depende si el campo escalar es una función del tiempo, creciente o decreciente. Para tener valores reales de a_1 , los valores de ω están restringidos a los siguiente valores en términos de m

$$\begin{aligned}
\omega &> \frac{m^2}{2} - m - 1, \text{ para } k = 1, \\
\omega &< \frac{m^2}{2} - m - 1, \text{ para } k = -1.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Como en el caso anterior, esta solución corresponde a un periodo “coasting”, con una constante cosmológica que decrece con el cuadrado del tiempo. El campo escalar es función del tiempo, que decrece o crece dependiendo del valor que tome la constante m .

También en este caso damos el valor de ϕ_1 en términos de los valores hoy en día del parámetro de Hubble y de la constante gravitacional. Así, de acuerdo a la ecuación (4.13) se obtiene el valor de la constante ϕ_1

$$\phi_1 = \frac{1}{H_0^{2/m} G_0} \frac{4 + 2\omega}{3 + 2\omega}. \tag{4.18}$$

4.5 Soluciones para un fluido con ecuación de estado barotrópica

Ahora consideramos un fluido perfecto con ecuación de estado barotrópica $p = \epsilon\rho$. Tomando en cuenta la ecuación de conservación $\rho = s/a^{3(\epsilon+1)}$ en las ecuaciones de campo, obtenemos la siguiente solución

$$\begin{aligned} a &= a_1 t, \\ \phi &= \phi_1 t^{-(1+3\epsilon)}, \\ \rho &= \frac{s}{a^{3(1+\epsilon)}}, \\ \lambda &= \frac{\lambda_1}{t^2}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde a_1 y ϕ_1 son constantes positivas y λ_1 depende de los parámetros ω y ϵ , de la siguiente manera

$$\lambda_1 = \frac{a_1^2[\omega(1 + 5\epsilon + 3\epsilon^2 - 9\epsilon^3) + 2(3\epsilon + 1)] + 2k(1 + 3\epsilon)}{2(1 + \epsilon)a_1^2}. \quad (4.20)$$

Para esta solución las constantes satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} c &= \frac{a_1^2[\omega(1 + 5\epsilon + 3\epsilon^2 - 9\epsilon^3) + 2(3\epsilon + 1)] + 2k(1 + 3\epsilon)}{2(1 + \epsilon)a_1^2\phi_1^{\frac{2}{(3\epsilon+1)}}}, \\ s &= \frac{a_1^{1+3\epsilon}\phi_1}{8\pi(1 + \epsilon)}\{2k - a_1^2[\omega(9\epsilon^2 + 6\epsilon + 1) + 9\epsilon^2 + 12\epsilon + 1]\}, \\ m &= \frac{2}{1 + 3\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Como en el caso de vacío, la solución corresponde a un modelo “coasting” con una constante cosmológica que decrece con el cuadrado del tiempo. El campo escalar es una función creciente del tiempo si $-1 < \epsilon < -1/3$ y decreciente si $1 > \epsilon > -1/3$, donde el límite izquierdo en ambas condiciones es un requerimiento de causalidad. También en este caso expresamos la constante ϕ_1 en términos de parámetros observacionales cuyos valores hoy en día se denotan por el subíndice cero

$$\phi_1 = \frac{1}{H_0^{(1+3\epsilon)}G_0} \frac{4 + 2\omega}{3 + 2\omega}. \quad (4.22)$$

La solución anterior excluye el valor $\epsilon = -1$, que corresponde a la ecuación de estado del vacío cuántico. En la siguiente sección consideraremos este caso particular.

4.6 Fluido de falso vacío

En la presente sección consideraremos el caso $p = -\rho$, que corresponde al bien conocido caso de vacío cuántico. Este caso significa que además de la contribución de la teoría gravitacional a la constante cosmológica, se tienen otras contribuciones debidas al valor de expectación del vacío de algunos campos cuánticos. De esta forma, se tiene una constante cosmológica efectiva dada por $\Lambda_{\text{eff}} = 8\pi\rho/\phi + c\phi^m$. Con $\epsilon = -1$ obtenemos la siguiente solución,

$$\begin{aligned} a &= a_1 t, \\ \phi &= \phi_1 t^2, \\ \rho &= \rho_0 = \text{constante}, \\ \lambda &= \frac{\lambda_1}{t^2} \end{aligned} \tag{4.23}$$

esta solución es válida para $k \neq 0$, con

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\frac{k}{2\omega - 1}}, \\ \lambda_1 &= 2 \frac{[\phi_1(2\omega + 3)] - 4\pi\rho_0}{\phi_1}, \end{aligned} \tag{4.24}$$

y

$$\begin{aligned} c &= \phi_1(6 + 4\omega) - 8\pi\rho_0, \\ m &= -1. \end{aligned} \tag{4.25}$$

La constante cosmológica efectiva está dada entonces por

$$\Lambda_{\text{eff}} = \frac{8\pi\rho}{\phi} + c\phi^m = \frac{2(3 + 2\omega)}{t^2}. \tag{4.26}$$

Nuestra solución corresponde a un periodo “coasting”, de modo que $H = 1/t$, así es que

$$\Lambda_{eff} = 2(3 + 2\omega)H, \quad (4.27)$$

podemos ver ahora que, de acuerdo con este modelo, a pesar de qué tan grande sea la contribución de la energía del vacío de los campos cuánticos a la constante cosmológica, la contribución gravitacional reduce el valor de la constante cosmológica efectiva, cuyo actual valor es $\simeq 4\omega H_0^2$.

En este caso ϕ_1 puede relacionarse también al actual valor de la constante gravitacional,

$$\phi_1 = \frac{H_0^2}{G_0} \frac{4 + 2\omega}{3 + 2\omega}. \quad (4.28)$$

4.7 Conclusiones

En este capítulo hemos presentado una familia de soluciones en el marco de una teoría general tenso-escalar, con un potencial que juega el papel de una constante cosmológica dependiente del tiempo.

La dependencia temporal de la constante cosmológica en cada solución obtenida tiene la forma $\lambda \sim t^{-2}$. Dicha dependencia ocurre en forma natural cuando se usa un campo potencial $\phi \sim t^q$ y nos limitamos a $a \sim t$, que garantiza un periodo “coasting”, en el cual las soluciones son válidas. Hace algún tiempo, este tipo de soluciones fueron estudiadas en relatividad general [44], [45] donde la dependencia temporal de Λ es introducida *ad hoc*.

La edad del universo $t_0 = 1/H_0$ no está en conflicto con las determinaciones observacionales [46]-[48]. Algunas otras consecuencias astrofísicas, como nucleosíntesis [49], en los modelos aquí presentados, permanecen sin ser exploradas aún.

Un potencial más realista sería necesario para obtener una familia de soluciones más generales y analizar otros parámetros cosmológicos que nos permitan comparar las soluciones teóricamente obtenidas con valores obtenidos de las observaciones. Este es el propósito del siguiente capítulo.

Capítulo 5

Modelos Cosmológicos con Λ dinámica en teorías tenso-escalares

5.1 Resumen

En este capítulo consideramos una familia de teorías tenso-escalares, en cuyo contexto usamos una constante cosmológica dinámica, cuya dependencia temporal es introducida a través de una función binomial en $\phi(t)$. Usando una ecuación de estado barotrópica de un fluido perfecto $p = (\gamma - 1)\rho$, para el contenido de materia del universo, obtenemos soluciones exactas para un universo homogéneo e isotrópico. Para tales soluciones el factor de escala tiene una dependencia temporal en forma exponencial o de ley de potencias y algunos de los modelos aquí presentados no tienen singularidad. Calculamos también algunos parámetros cosmológicos como Ω_m , Ω_Λ , q_0 y H_0 , que comparamos con valores obtenidos de datos observacionales.

5.2 Introducción

Las teorías de unificación consideran una constante cosmológica que es 120 órdenes de magnitud más grande que los valores observados de Λ . Esto se conoce como el problema de la constante cosmológica [55]-[56]. Con el propósito de explicar y resolver este problema, y hacer compatible a los recientes resultados observacionales con las predicciones de los escenarios inflacionarios y de física de partículas, se propuso una constante cosmológica dependiente del tiempo [57]. Esta idea no es

nueva y se le ha dedicado mucha atención (ver *e.g.* [58]-[97]). Esencialmente, esta idea consiste en hacer la energía del vacío dinámica, de modo que durante la evolución del universo la densidad de energía del vacío decae en partículas y como consecuencia la constante cosmológica decrece, creándose partículas como resultado, aunque en pequeña proporción.

Un amplio resumen y revisión de modelos con “constante” cosmológica dependiente del tiempo, fue hecha por Overduin y Cooperstock [98], prestando particular atención a la evolución del factor de escala cuando Λ es una función del tiempo t , del factor de escala $a(t)$, de la constante de Hubble H , o del parámetro de desaceleración q . En dicho trabajo se consideró una ecuación de estado y se obtuvieron soluciones numéricas, pero como sucede en la mayoría de los trabajos anteriores que tratan este problema, la dependencia temporal del término cosmológico se introduce de forma *ad hoc*.

Una alternativa para introducir la constante cosmológica de modo natural, consiste en considerar una “constante” cosmológica efectiva y dependiente del tiempo en el contexto de las teorías tenso-escalares, la cual se transforma en una verdadera constante cuando $t \gg 0$ [99].

Usando la teoría de Jordan-Brans-Dicke (JBD), puede resolverse el problema conocido como “gracefull exit” de la cosmología de la llamada vieja inflación. Sin embargo permanece el problema de determinar el parámetro ω de JBD, que de acuerdo a experimentos realizados en el sistema solar [100], su valor es de $|\omega| \approx 500$. Una mejor estimación de este parámetro se obtendría de la medida de otros parámetros cosmológicos, para restringir mejor el valor de ω de lo que lo hacen los experimentos dentro del sistema solar [101]. Sin embargo, teorías del universo muy temprano, como teorías de cuerdas, se describen mucho mejor en el contexto de JBD, mostrando además que ω puede tomar valores negativos [102].

Así, las teorías tenso-escalares y en particular la teoría de JBD, permiten introducir a la constante cosmológica de manera natural. Recientes resultados observacionales restringen a estas teorías (y a cualquier otra). Por ejemplo, los resultados obtenidos en 1998 de supernovas tipo Ia (SN Ia), muestran que $\Omega_\Lambda \sim 0.6$ [103], ésto implica que nuestro universo se expande aceleradamente, de modo que cualquier modelo que describa el comportamiento de la constante cosmológica, debe tomar en cuenta las evidencias observacionales. En el capítulo anterior [104], investiga-

mos el efecto de una constante cosmológica dependiente del tiempo, en el contexto de una familia de teorías tenso-escalares. En ese trabajo obtuvimos modelos cosmológicos válidos durante el periodo “coasting”, donde la dependencia temporal de la “constante” cosmológica surge de modo natural. En tales modelos suponemos una expresión simple para el término cosmológico $\lambda(\phi) = c\phi(t)^n$, (con c y n constantes).

La existencia de inflación en teorías tenso-escalares (TST) fue investigada por Pimentel y Stein-Schabes [105], quienes encontraron fases inflacionarias cuando el potencial es un polinomio en el campo escalar, en el marco de una TST general que incluye modelos de Brans-Dicke con constante cosmológica diferente de cero.

Motivados por esta idea, en este capítulo consideramos una TST general, como en el capítulo anterior, pero ahora consideraremos una función potencial λ que es binomial en ϕ , para obtener soluciones exactas de las ecuaciones de campo, de las cuales obtenemos modelos cosmológicos inflacionarios y algunos parámetros cosmológicos relacionados. De hecho, en la mayoría de nuestras soluciones obtenemos un factor de escala que crece de acuerdo a una ley de potencias $a(t) \sim t^\sigma$, de donde se requiere $\sigma \geq 1$ para modelos inflacionarios. Como es bien sabido, ésta es una característica genérica de una clase de modelos que trata de resolver dinámicamente el problema de la constante cosmológica. En la mayoría de nuestros modelos σ es un parámetro libre, que puede ser ajustado por condiciones físicas, para estar de acuerdo con datos obtenidos de las observaciones de SN Ia, de acuerdo a los cuales $\sigma \approx 1$, lo cual es consistente con resultados obtenidos de nucleosíntesis [106].

La mayoría de nuestras soluciones predicen una expansión acelerada, lo cual está de acuerdo con resultados observacionales obtenidos de SN Ia, pero Ω_m y Ω_Λ dependen de parámetros libres de nuestra teoría. En algunos casos específicos obtenemos soluciones cuyo factor de escala crece exponencialmente.

5.3 Ecuaciones de campo

Como en el capítulo anterior, iniciaremos nuestra discusión con la acción más general de las teorías tenso-escalares [107]

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R - \phi^{-1} \omega g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 2\phi \lambda(\phi)] + S_{NG}, \quad (5.1)$$

donde el significado de las variables se dá en el párrafo bajo la ecuación (4.1). De la misma manera en que se explica en el capítulo anterior, las ecuaciones de campo están dadas explícitamente por

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi T_{\mu\nu}}{\phi} + \lambda(\phi)\square g_{\mu\nu} + \omega\phi^{-2}(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda}) + \phi^{-1}(\phi_{,\mu\nu} - g_{\mu\nu}\square\phi), \quad (5.2)$$

$$\square\phi + \frac{2\phi^2 d\lambda/d\phi - 2\phi\lambda(\phi)}{3 + 2\omega(\phi)} = \frac{1}{3 + 2\omega(\phi)} \left(8\pi T - \frac{d\omega}{d\phi}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu} \right). \quad (5.3)$$

En el resto del capítulo supondremos que $\omega(\phi) = \text{constante}$ y $\lambda = \lambda(\phi)$. Las ecuaciones de campo correspondientes, considerando a un fluido perfecto con ecuación de estado barotrópica $p = (\gamma - 1)\rho$ como el contenido de la materia y un elemento de línea homogéneo e isotrópico

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (5.4)$$

las ecuaciones de campo correspondientes son

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{3k}{a^2} - \lambda(\phi) - \frac{8\pi\rho}{\phi} - \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\phi}}{\phi} = 0, \quad (5.5)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} + \lambda(\phi) - \frac{8\pi p}{\phi} - \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} - 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\phi}}{\phi} = 0, \quad (5.6)$$

$$\left[\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right] (3 + 2\omega) - 2\left(\lambda - \phi\frac{d\lambda}{d\phi}\right) - \frac{8\pi}{\phi}(\rho - 3p) = 0. \quad (5.7)$$

Donde hemos supuesto $\phi = \phi(t)$; las derivadas respecto a t se denotarán por un punto sobre las variables. Transformando al tiempo τ definido como

$$\tau = \int \phi^{1/2} dt, \quad (5.8)$$

el conjunto de ecuaciones (5.5)-(5.7) se reescriben como sigue

$$3\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{3k}{a^2\phi} - \frac{\lambda(\phi)}{\phi} - \frac{8\pi\rho}{\phi^2} - \frac{\omega}{2}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 + 3\frac{a'}{a}\frac{\phi'}{\phi} = 0, \quad (5.9)$$

donde el significado de las variables se dá en el párrafo bajo la ecuación (4.1). De la misma manera en que se explica en el capítulo anterior, las ecuaciones de campo están dadas explícitamente por

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi T_{\mu\nu}}{\phi} + \lambda(\phi)\square g_{\mu\nu} + \omega\phi^{-2}(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda}) + \phi^{-1}(\phi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu}\square\phi), \quad (5.2)$$

$$\square\phi + \frac{2\phi^2 d\lambda/d\phi - 2\phi\lambda(\phi)}{3 + 2\omega(\phi)} = \frac{1}{3 + 2\omega(\phi)} \left(8\pi T - \frac{d\omega}{d\phi}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu} \right). \quad (5.3)$$

En el resto del capítulo supondremos que $\omega(\phi) = \text{constante}$ y $\lambda = \lambda(\phi)$. Las ecuaciones de campo correspondientes, considerando a un fluido perfecto con ecuación de estado barotrópica $p = (\gamma - 1)\rho$ como el contenido de la materia y un elemento de línea homogéneo e isotrópico

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (5.4)$$

las ecuaciones de campo correspondientes son

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{3k}{a^2} - \lambda(\phi) - \frac{8\pi\rho}{\phi} - \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 + 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\phi}}{\phi} = 0, \quad (5.5)$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{k}{a^2} + \lambda(\phi) - \frac{8\pi p}{\phi} - \frac{\omega}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right)^2 - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} - 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\phi}}{\phi} = 0, \quad (5.6)$$

$$\left[\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right] (3 + 2\omega) - 2\left(\lambda - \phi\frac{d\lambda}{d\phi}\right) - \frac{8\pi}{\phi}(\rho - 3p) = 0. \quad (5.7)$$

Donde hemos supuesto $\phi = \phi(t)$; las derivadas respecto a t se denotarán por un punto sobre las variables. Transformando al tiempo τ definido como

$$\tau = \int \phi^{1/2} dt, \quad (5.8)$$

el conjunto de ecuaciones (5.5)-(5.7) se reescriben como sigue

$$3\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{3k}{a^2\phi} - \frac{\lambda(\phi)}{\phi} - \frac{8\pi\rho}{\phi^2} - \frac{\omega}{2}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 + 3\frac{a'}{a}\frac{\phi'}{\phi} = 0, \quad (5.9)$$

$$-2\frac{a''}{a} - \frac{\phi''}{\phi} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 - \frac{1}{2}(1+\omega)\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 - 3\frac{a'\phi'}{a\phi} - \frac{k}{a^2\phi} + \frac{\lambda(\phi)}{\phi} - \frac{8\pi\rho(\gamma-1)}{\phi^2} = 0, \quad (5.10)$$

$$(3+2\omega)\left[\frac{\phi''}{\phi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 + 3\frac{a'\phi'}{a\phi}\right] - 2\left(\frac{\lambda(\phi)}{\phi} - \frac{d\lambda(\phi)}{d\phi}\right) - \frac{8\pi\rho(4-3\gamma)}{\phi^2} = 0, \quad (5.11)$$

donde las derivadas respecto a τ se denotan por una prima.

En este capítulo consideraremos dos importantes suposiciones:

$$a\phi^m = \alpha, \quad (5.12)$$

$$\lambda(\phi) = \lambda_1\phi^{n_1} + \lambda_2\phi^{n_2}, \quad (5.13)$$

donde m , α , λ_1 , λ_2 , n_1 y n_2 son constantes. La primera suposición es muy bien conocida (ver e.g. [108] y referencias dadas ahí), la cual ha sido usada como una condición para que el parámetro de desaceleración sea constante para modelos planos en la teoría de Brans-Dicke. Además, con esta condición nuestras ecuaciones de campo se simplifican notablemente y nos permiten obtener soluciones exactas. La segunda condición es la principal suposición de este trabajo y es motivada por el teorema cosmológico “no-hair” [105], con el objeto de estudiar soluciones inflacionarias, para las cuales la dependencia temporal de la “constante” cosmológica surge de manera natural. Con estas suposiciones obtenemos de las ecuaciones (5.9)-(5.11)

$$\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[3m^2 - 3m - \frac{\omega}{2}\right] + \frac{3k}{\alpha^2}\phi^{2m-1} - \lambda_1\phi^{n_1-1} - \lambda_2\phi^{n_2-1} - \frac{8\pi\rho}{\phi^2} = 0, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\phi''}{\phi}(2m-1) + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[-3m^2 + m - \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2}\right] - \frac{k}{\alpha^2}\phi^{2m-1} + \lambda_1\phi^{n_1-1} + \\ \lambda_2\phi^{n_2-1} - \frac{8\pi\rho(\gamma-1)}{\phi^2} = 0, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\phi''}{\phi}(3+2\omega) + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2(3+2\omega)\left(\frac{1}{2} - 3m\right) - 2\lambda_1\phi^{n_1-1} - 2\lambda_2\phi^{n_2-1} + \\ 2\lambda_1n_1\phi^{n_1-1} + 2\lambda_2n_2\phi^{n_2-1} - \frac{8\pi\rho(4-3\gamma)}{\phi^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

En las siguientes secciones encontraremos soluciones exactas en diferentes casos, así como parámetros cosmológicos que podamos comparar con valores observacionales, por ejemplo, el parámetro de Hubble H , el parámetro de desaceleración q_0 , el parámetro de densidad Ω_m , así como el valor del parámetro de densidad de la energía del vacío Ω_Λ .

5.4 El parámetro de densidad

Antes de calcular soluciones exactas del conjunto de nuestras ecuaciones de campo (5.14)- (5.16), obtendremos la ecuación general para Ω_m y Ω_ϕ , de acuerdo al modelo que estamos proponiendo.

Suponiendo $k = 0$, la ecuación (5.5) se reescribe como sigue

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2} \left[\frac{\lambda(\phi)}{8\pi G} + \frac{\rho}{G\phi} + \frac{\omega}{16\pi G} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - \frac{3H}{8\pi G} \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right]. \quad (5.17)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{8\pi\rho_m}{3H^2} \frac{1}{\phi}, \\ \Omega_\phi &= \frac{1}{3H^2} \left[\lambda(\phi) + \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - 3H \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right], \end{aligned} \quad (5.18)$$

obtenemos

$$1 = \Omega_m + \Omega_\phi. \quad (5.19)$$

Tomando en cuenta la relación propuesta (5.12), obtenemos

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{8\pi\rho_m}{3m^2} \frac{1}{\phi} \left(\frac{\phi}{\dot{\phi}} \right)^2, \\ \Omega_\phi &= \frac{1}{3m^2} \left(\frac{\phi}{\dot{\phi}} \right)^2 \lambda(\phi) + \frac{\omega}{6m^2} + \frac{1}{m}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

De acuerdo a las observaciones de SN Ia [103], el valor favorecido del parámetro de densidad es $\Omega_m \sim 0.4 \pm 0.1$, este valor representa una restricción a la constante cosmológica, de acuerdo a la siguiente ecuación

$$\Omega_\Lambda = \frac{4}{3}\Omega_m + \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}, \quad (5.21)$$

esto implica $\Omega_\Lambda \sim 0.85 \pm 0.2$. Estos valores significan que los resultados obtenidos de SN Ia son sensibles a la aceleración de la expansión y restringen a $4\Omega_m/3 - \Omega_\Lambda$, que corresponde al parámetro de desaceleración cuando el corrimiento al rojo promedio para estos objetos es $z \sim 0.4$. Así la combinación $\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_\Lambda$ está restringida por la anisotropía de la radiación de fondo cósmica (CBR). De modo que $\Omega_0 \sim 1 \pm 0.2$, obtenida de COBE y otras medidas (ver e.g., [109]), así como $\Omega_m \sim 0.4$, definen una región de concordancia para $\Omega_\Lambda \sim 0.6$, siendo éste el mejor ajuste para un modelo del universo [110].

A continuación calcularemos ambos parámetros de densidad, además de las soluciones exactas de nuestras ecuaciones de campo en cada uno de los casos que consideramos en este capítulo.

5.5 Caso de vacío

Considerando el caso de vacío ($\rho = 0$), de las ecuaciones (5.14)-(5.16) obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[3m^2 - 3m - \frac{\omega}{2}\right] + \frac{3k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} - \lambda_1 \phi^{n_1-1} - \lambda_2 \phi^{n_2-1} = 0, \quad (5.22)$$

$$\frac{\phi''}{\phi} (2m-1) + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[-3m^2 + m - \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2}\right] - \frac{k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} + \lambda_1 \phi^{n_1-1} + \lambda_2 \phi^{n_2-1} = 0, \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\phi''}{\phi} (3 + 2\omega) + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 (3 + 2\omega) \left(\frac{1}{2} - 3m\right) - 2\lambda_1 \phi^{n_1-1} - 2\lambda_2 \phi^{n_2-1} + \\ 2\lambda_1 n_1 \phi^{n_1-1} + 2\lambda_2 n_2 \phi^{n_2-1} = 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Naturalmente, para vacío la densidad de energía se debe a la contribución del campo escalar $\phi(t)$: $\Omega_\phi = 1$. Nosotros encontramos soluciones exactas de este conjunto de ecuaciones en los siguientes casos:

1. $k = 0$

- $m = 1/2$. Esta solución no es relevante para nuestro propósito porque $\lambda(\phi)$ se anula.
- $m = 2/3$

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \phi_1 t^{-1/(5+3\omega)}, \\
a(t) &= a_1 t^{2/3(5+3\omega)}, \\
\lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t)^{2(5+3\omega)},
\end{aligned} \tag{5.25}$$

donde $\phi_1 = [-c_1(5 + 3\omega)]^{-1/(5+3\omega)}$, $a_1 = \alpha \phi_1^{-2/3}$, $\lambda_1 = -c_1^2(2/3 + \omega/2)$, $\lambda_2 = 0$, y c_1 es una constante de integración. Esta solución se escribió directamente en términos del tiempo t , de acuerdo con (5.8). Aquí el factor de escala crece con el tiempo para $\omega > -5/3$. Por su parte λ decrece como t^{-2} para cualquier valor de ω .

El escalar de Ricci para este caso está dado por la siguiente expresión

$$\mathfrak{R} = \frac{-4}{3} \frac{11 + 9\omega}{(5 + 3\omega)^2} t^{-2}, \tag{5.26}$$

de donde podemos ver que existe una singularidad inicial. Cuando el factor de escala corresponde a un modelo en expansión, el parámetro de desaceleración actual tiene un valor negativo, *i.e.*, la solución corresponde a un modelo cosmológico acelerado

$$q_0 = -\frac{1}{2}(13 + 9\omega), \quad H_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{(5 + 3\omega)} t_0^{-1}, \tag{5.27}$$

de acuerdo con esta expresión para el parámetro de Hubble actual, $t_0 \sim 1/H_0$ implica que $\omega = -13/6$, que es un valor muy pequeño en comparación con los correspondientes valores obtenidos de experimentos en el sistema solar.

- $m \neq 1/2, 2/3$

En este caso obtenemos dos familias de soluciones:

- (a) $\omega \neq -(m + 1)$.

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \phi_1 t^{2\sigma}, \\
a(t) &= a_1 t^{-2m\sigma}, \\
\lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t)^{-\frac{1}{\sigma}},
\end{aligned} \tag{5.28}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mu &\neq -2\nu, \\
\sigma &= \mu/(\mu + 2\nu), \\
a_1 &= \alpha \phi_1^{-m}, \\
\phi_1 &= [c'^{1+\frac{\nu}{\mu}}(\mu + 2\nu)/2]^{\frac{2\mu}{\mu+2\nu}}, \\
\lambda_1 &= (3m^2 - 3m - \omega/2)\mu^2 c'^{2(1+\frac{\nu}{\mu})}, \quad \lambda_2 = 0, \\
\mu &\equiv 12m^2 - 14m + 4, \\
\nu &\equiv -12m^2 + 5m + 4\omega - 6m\omega + 2,
\end{aligned} \tag{5.29}$$

y c' es una constante de integración. De acuerdo a la solución del presente caso, λ se reduce a una función monomial en $\phi(t)$ que decae con el tiempo. Claramente, para que la presente solución sea inflacionaria se requiere que $m\sigma < 0$.

Por otra parte, el escalar de Ricci está dado por

$$\mathfrak{R} = 12m\sigma(4m\sigma + 1)t^{-2}. \tag{5.30}$$

De acuerdo con esta expresión, la solución correspondiente tiene una singularidad inicial. Los valores actuales del parámetro de Hubble y parámetro de desaceleración, de acuerdo con este modelo, están dado por

$$q_0 = -1 - \frac{1}{2m\sigma}, \quad H_0 = -2m\sigma (t_0)^{-1}, \quad t_0 = \frac{1}{H_0} 2m \|\sigma\|. \tag{5.31}$$

De esta última ecuación podemos ver que para el presente modelo, el universo se expande con aceleración si $m\sigma < -1/2$. Por otra

parte, utilizando $H_0 \sim 65 \pm 5 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ [112], tendremos que $t_0 \sim 15.05 \pm 1.96 \|m\sigma\| \text{ Gy}$, de modo que la edad estimada del universo, de acuerdo con este modelo, es menor que el valor aceptado hoy en día.

$$(b) \quad \mu = -2\nu \implies \omega = -(1 + m).$$

Para esta particular relación entre ω y m obtenemos la siguiente solución

$$\begin{aligned} \phi(t) &= c' \exp[\phi_2 t], \\ a(t) &= a_2 \exp[-m\phi_2 t], \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t), \end{aligned} \tag{5.32}$$

donde $\phi_2 = c'^{1/2}\mu$, $a_2 = \alpha c'^{-m}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 4c'(3m^2 - 3m - \omega/2)\nu^2$ y c' es una constante de integración. En este caso tenemos una solución inflacionaria exponencial, si $m\phi_2 < 0 \implies m < 0$ ó $1/2 < m < 2/3$. Este modelo no es singular, como podemos ver del escalar de Ricci

$$\mathfrak{R} = 24c' m^2(6m^2 - 7m + 2). \tag{5.33}$$

Los valores del parámetro de Hubble y el parámetro de desaceleración hoy en día, de acuerdo con la presente solución, son

$$q_0 = -1, \quad H_0 = c' m(12m^2 - 14m + 4), \tag{5.34}$$

así, este modelo se expande con aceleración constante desde un estado no singular, y con parámetro de Hubble constante.

2. $k \neq 0$

- $m = 1/2$

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_1 t^{-2}, \\ a(t) &= a_1 t, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t), \end{aligned} \tag{5.35}$$

donde

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \alpha^2 \frac{3+2\omega}{k}, & a_1 &= \left(\frac{k}{3+2\omega}\right)^{1/2}, \\ \lambda_1 &= \frac{2k}{\alpha^2}, & \lambda_2 &= 0.\end{aligned}$$

De acuerdo con esta solución, $a(t)$ crece linealmente con el tiempo, a una razón constante, mientras que la “constante” cosmológica decrece con el tiempo. Es claro que $a(t)$ debe de ser real y positiva, al igual que $\phi(t)$, así es que debe satisfacerse $k/(3+2\omega) > 0$. La presente solución corresponde a una cosmología “coasting” con singularidad inicial, como puede verse del escalar de Ricci

$$\mathfrak{R} = 12(3+2\omega)t^{-2}. \quad (5.36)$$

Por otra parte, como ya hemos mencionado, el actual valor del parámetro de desaceleración se anula y el parámetro de Hubble está dado por

$$q_0 = 0, \quad H = t_0^{-1}, \quad (5.37)$$

de modo que, $t_0 = 1/H_0 \sim 15.05$ Gy, lo cual está en relativo acuerdo con los valores observacionales aceptados actualmente.

5.6 Soluciones exactas para el caso de una ecuación de estado barotrópica

A continuación consideraremos $\rho \neq 0$, de modo que regresando al conjunto de ecuaciones (5.14)-(5.16), de la ecuación (5.14) tenemos

$$\frac{8\pi\rho}{\phi^2} = \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[3m^2 - 3m - \frac{\omega}{2}\right] + \frac{3k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} - \lambda_1 \phi^{n_1-1} - \lambda_2 \phi^{n_2-1}. \quad (5.38)$$

Usando esta expresión en las ecuaciones (5.15) y (5.16), el conjunto de ecuaciones de campo se reduce a las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{aligned} & \frac{\phi''}{\phi}(2m-1) + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[-2m - \omega - \frac{1}{2} - \gamma \left(3m^2 - 3m - \frac{\omega}{2} \right) \right] + \\ & \frac{(2-3\gamma)k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} + \gamma(\lambda_1 \phi^{n_1-1} + \lambda_2 \phi^{n_2-1}) = 0, \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\phi''}{\phi}(3+2\omega) + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[-12m^2 + 3m - 6\omega m + 3\omega + \frac{3}{2} + 3\gamma \left(3m^2 - 3m - \frac{\omega}{2} \right) \right] \\ & + 3(3\gamma-4) \frac{k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} + (2-3\gamma)(\lambda_1 \phi^{n_1-1} + \lambda_2 \phi^{n_2-1}) + \\ & 2(\lambda_1 n_1 \phi^{n_1-1} + \lambda_2 \phi^{n_2-1}) = 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

De la ecuación (5.39) con $\gamma \neq 0$ (el caso de falso vacío será considerado en la sección 5.8), tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_1 \phi^{n_1-1} + \lambda_2 \phi^{n_2-1} = & \frac{1-2m}{\gamma} \frac{\phi''}{\phi} \frac{1}{\gamma} \left[-2m - \omega - \frac{1}{2} - \gamma \left(3m^2 - 3m - \frac{\omega}{2} \right) \right] \frac{\phi'^2}{\phi^2} - \\ & - \frac{(2-3\gamma)k}{\gamma \alpha^2} \phi^{2m-1}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Usando esta expresión y sus derivadas en la ecuación (5.40), obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\gamma}(1-2m) \frac{\phi'''}{\phi} \frac{\phi}{\phi'} + \frac{\phi''}{\phi} \left[\frac{4}{\gamma}(m+\omega+1) + 6m(2m-1) \right] + \\ & \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[-12m^2 - 3m - 6m\omega \right] + \frac{k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} \left[12m - \frac{4}{\gamma}(2m+1) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Con el propósito de resolver esta ecuación diferencial en forma analítica, consideraremos el valor $m = 1/2$, de modo que la ecuación (5.42) se reduce a la siguiente

$$\frac{\phi''}{\phi} - \frac{3\gamma}{4} \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 + \frac{3\gamma-4}{3+2\omega} \frac{k}{\alpha^2} = 0. \quad (5.43)$$

De esta ecuación diferencial tenemos dos posibles casos: $k = 0$ y $k \neq 0$. El caso $\gamma = 4/3$ se considerará en la sección 5.7.

1. Para $k = 0$ tenemos la siguiente solución, la cual escribimos en términos del tiempo t como sigue

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= \phi_1 t^\sigma, \\
 a(t) &= a_1 t^{-\sigma/2}, \\
 \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t)^{-2/\sigma}, \\
 \rho &= \rho_1 a(t)^{-3\gamma},
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= c_1 \left[-\frac{3\gamma - 2}{3\gamma - 4} c_1^{1/2} \right]^{\frac{4}{2-3\gamma}}, \\
 \sigma &= \frac{4}{2-3\gamma}, \\
 a_1 &= \frac{\alpha}{c_1^{1/2}} \left[-\frac{3\gamma - 2}{3\gamma - 4} c_1^{1/2} \right]^{\frac{2}{3\gamma-2}}, \\
 \rho_1 &= \frac{1}{\pi} \frac{1-2\omega}{\gamma(4-3\gamma)^2} c_1^{2-\frac{3\gamma}{2}}, \alpha^{3\gamma} \\
 \lambda_1 &= \left[\omega \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{3}{2} \right) \right] \left(-\frac{4}{4-3\gamma} \right)^2 c_1^{2-\frac{3\gamma}{2}}, \quad \lambda_2 = 0,
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

donde además c_1 es una constante de integración. De esta solución, podemos ver que la condición para que la solución corresponda a un modelo en expansión es $\sigma < 0$, lo cual implica, de acuerdo a (5.45), que $\gamma > 2/3$.

En este caso, el escalar de Ricci y los parámetros de desaceleración y de Hubble están dados por las siguientes expresiones

$$\mathfrak{R} = 36 \frac{(2-\gamma)}{(3\gamma-2)^2} \frac{1}{t^2}, \tag{5.46}$$

$$q_0 = \frac{3}{2}\gamma - 2, \quad H_0 = \frac{2}{3\gamma-2} \frac{1}{t_0}, \quad \implies t_0 = \frac{2}{3\gamma-2} \frac{1}{H_0}. \tag{5.47}$$

La condición de causalidad requiere $0 \leq \gamma \leq 2$, de modo que esta solución corresponde a un modelo acelerado para $\gamma < 4/3$. Por otra parte, $t_0 \sim 1/H_0 \sim$

15.05 Gy para $\gamma \sim 4/3$. Así es que esta solución es del tipo de soluciones donde la expansión cósmica es manejada por el impulso originado en el Big-Bang.

El parámetro de densidad de energía y la contribución del campo escalar $\phi(t)$ están dados como sigue

$$\begin{aligned}\Omega_m &= \frac{2}{3\gamma} - \frac{4\omega}{3\gamma}, \\ \Omega_\phi &= \frac{4\omega}{3\gamma} - \frac{2}{3\gamma} + 1.\end{aligned}\tag{5.48}$$

Para tener un valor positivo de Ω_m se requiere $\omega < 1/2$, incluyendo valores negativos de ω . Por otra parte, $\Omega_m \sim 0.4 \pm 0.1$ y $0 \leq \gamma \leq 2$, por lo tanto de la ecuación para Ω_m y Ω_ϕ , obtenemos una restricción para ω : $-0.1 \leq \omega \leq 1/2$.

2. Considerando ahora el caso $k \neq 0$, de Eq. (5.43), obtenemos la siguiente solución en términos del parámetro τ :

- Para $\frac{k}{3+2\omega} > 0$

$$\phi(\tau) = c_1 \left[\cosh(\beta\tau) \right]^\sigma, \quad k \neq 0, \gamma \neq 0, 4/3 \tag{5.49}$$

donde ahora $\sigma = \frac{4}{4-3\gamma}$, $\beta = \frac{(3\gamma-4)}{2\alpha} \sqrt{\frac{k}{3+2\omega}}$, y c_1 es una constante de integración. De acuerdo a la Ecuación (5.12) tenemos

$$a(\tau) = a_1 \left[\cosh(\beta\tau) \right]^{-\frac{\sigma}{2}}, \quad k \neq 0, \gamma \neq 0, 4/3. \tag{5.50}$$

El escalar de Ricci para este caso está dado por

$$\mathfrak{R} = r_1(r_2 + r_3) \cosh^\sigma[\beta\tau] - r_1 r_2 \cosh^{\sigma-2}[\beta\tau]. \tag{5.51}$$

donde $a_1 = \alpha c_1^{-1/2}$, $r_1 = \frac{3c_1}{\alpha^2} \frac{k}{3+2\omega}$, $r_2 = 3(2+\gamma)$, y $r_3 = 3\gamma + 2 + 4\omega$. Para obtener las singularidades de esta solución, calculamos los invariantes de curvatura no nulos definidos en el apéndice C [113], los cuales para este caso están dados por

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{3}{4} \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{k}{a^2} \right]^2, \\
R_2 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} R_1^{3/2}, \\
R_3 &= \frac{7}{12} R_1^2,
\end{aligned} \tag{5.52}$$

de donde claramente es suficiente calcular R_1 :

$$\begin{aligned}
R_1 &= s_1(s_2 - s_3)^2 \cosh^{2\sigma-4} [\beta\tau] + s_1(s_3 + s_4)^2 \cosh^{2\sigma} [\beta\tau] + \\
&2s_1(s_2 - s_3)(s_3 + s_4) \cosh^{2\sigma-2} [\beta\tau].
\end{aligned} \tag{5.53}$$

donde

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{3}{4} \frac{c_1^2}{\alpha^4(3+2\omega)^2}, \\
s_2 &= k\left(2 - \frac{3}{2}\gamma\right), \\
s_3 &= k, \\
s_4 &= k(3+2\omega).
\end{aligned} \tag{5.54}$$

de la ecuación (5.51), $\Re \rightarrow \infty$ si $\tau \rightarrow \pm\infty$, y al menos uno de los exponentes es positivo, *i.e.*, $\sigma > 0$ o $\sigma > 2$. Por otra parte, de los invariantes de curvatura Ec. (5.53), $R_1 \rightarrow \infty$ requiere que $\tau \rightarrow \pm\infty$, y $\sigma > 2$ ($\gamma > 2/3$), $\sigma > 0$ ($\gamma < 4/3$) o $\sigma > 1$ ($\gamma > 0$). Así es que las soluciones de este caso son singulares para $0 < \gamma < 4/3$ y $\tau \rightarrow \pm\infty$.

- Para $\frac{k}{3+2\omega} < 0$

$$\phi(\tau) = c_1 \left[\cos(\beta\tau) \right]^\sigma, \quad k \neq 0, \gamma \neq 0, 4/3 \tag{5.55}$$

$$a(\tau) = a_1 \left[\cos(\beta\tau) \right]^{-\frac{\sigma}{2}}, \quad k \neq 0, \gamma \neq 0, 4/3 \tag{5.56}$$

donde σ y a_1 se definen en el párrafo bajo las ecuaciones (5.49) y (5.51).

En este caso, $\beta = \frac{3\gamma-4}{2\alpha} \sqrt{\left| \frac{k}{3+2\omega} \right|}$.

$$\mathfrak{R} = r_1(r_3 - r_2) \cos^\sigma [\beta\tau] + r_1 r_2 \cos^{\sigma-2} [\beta\tau], \quad (5.57)$$

donde ahora

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{3c_1}{\alpha^2} \left\| \frac{k}{3+2\omega} \right\|, \\ r_2 &= 3(2-\gamma), \\ r_3 &= (4-3\gamma) + 2\|3+2\omega\|. \end{aligned} \quad (5.58)$$

De acuerdo a (5.52), como en el caso anterior, se requiere calcular solamente R_1 , que para este caso está dado por

$$\begin{aligned} R_1 &= s_1(s_2 + s_3)^2 \cos^{2\sigma-4} [\beta\tau] + s_1(s_4 - s_3)^2 \cos^{2\sigma} [\beta\tau] + \\ &2s_1(s_2 + s_3)(s_4 - s_3) \cos^{2\sigma-2} [\beta\tau], \end{aligned} \quad (5.59)$$

donde

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{3}{4} \frac{c_1^2}{\alpha^4 |3+2\omega|^2}, \\ s_2 &= \|k\| \left(2 - \frac{3}{2}\gamma\right), \\ s_3 &= \|k\|, \\ s_4 &= k\|3+2\omega\|. \end{aligned} \quad (5.60)$$

de las ecuaciones (5.57) y (5.59), $\mathfrak{R} \rightarrow \infty$ así como $R_1 \rightarrow \infty$, si $[\beta\tau] \rightarrow \pm(2n+1)\pi/2$ y al menos un exponente en las expresiones respectivas de \mathfrak{R} y R_1 es negativo: $\sigma < 2$ ($\gamma < 2/3$), $\sigma < 1$ ($\gamma < 0$) ó $\sigma < 0$ ($\gamma > 4/3$). Entonces tenemos dos intervalos de γ para los cuales las soluciones del presente caso son singulares: $0 < \gamma < 2/3$ y $4/3 < \gamma \leq 2$; además la condición de causalidad requiere que γ se encuentre en el intervalo $0 \leq \gamma \leq 2$.

Por otra parte, de las ecuaciones (5.38) y (5.41) tenemos para cualquiera de los dos casos respectivos $\frac{k}{3+2\omega} < 0$ ó $\frac{k}{3+2\omega} > 0$

$$\rho = \rho_1 a(\tau)^{-3\gamma}, \quad (5.61)$$

$$\lambda(\phi) = \lambda_1 \phi(\tau)^{\frac{3}{2}\gamma-1} + \lambda_2 \phi(\tau), \quad (5.62)$$

donde

$$\rho_1 = \frac{k c_1^{2-\frac{3\gamma}{2}}}{4\pi \alpha^{2\gamma}} \alpha^{3\gamma}, \quad \lambda_1 = \frac{k c_1^{2-\frac{3\gamma}{2}}}{\alpha^2} \left(1 - \frac{2}{\gamma}\right), \quad \lambda_2 = \frac{2k}{\alpha^2}.$$

Como podemos ver, $\lambda(\phi)$ permanece como una función binomial de ϕ si $\gamma \neq 4/3$. Para analizar el comportamiento de la solución obtenida, en términos del tiempo cosmológico t , en la siguiente sección daremos algunos ejemplos.

5.6.1 Fluido de polvo

Una aplicación interesante de la ecuación de estado barotrópica, corresponde a un fluido de polvo para el cual ($\gamma = 1$), en tal caso la solución es la siguiente:

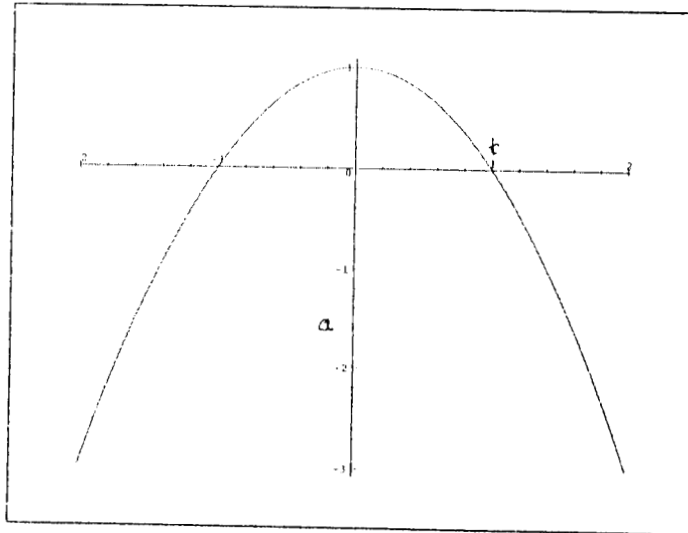
1. $k = 0$

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_1 t^{-4}, \\ a(t) &= a_1 t^2, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t)^{1/2}, \\ \rho &= \rho_1 a(t)^{-3}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Donde $\phi_1 = c_1^{-1}$, $a_1 = \alpha c_1^{1/2}$, $\lambda_1 = 4(2\omega - 5)c_1^{1/2}$, $\lambda_2 = 0$, $\rho_1 = \frac{1-2\omega}{\pi} c_1^{1/2} \alpha^3$, y c_1 es una constante de integración. Esta es una solución que presenta inflación extendida, con una constante cosmológica que decrece con el tiempo y tiene singularidad inicial, como puede verse del correspondiente escalar de Ricci

$$\mathfrak{R} = 36 t^{-2}. \quad (5.64)$$

y c_1 es una constante de integración. Claramente $a(t)$ y $\phi(t)$ deben ser positivos, para que la solución tenga significado físico, así es que esta condición restringe el rango de valores que puede tomar t : $t < \phi_1^{-1/2}$, y $c_1 > 0$, como podemos ver de la definición de ϕ_1 . En este caso, a pesar de que el término cosmológico es una función binomial en ϕ , éste decae con el tiempo.



88

Figura 5.1: Gráfica del factor de escala como función del tiempo. Las constantes han sido normalizadas a 1.

Los correspondientes escalar de Ricci e invariante de curvatura muestran que esta solución es singular:

$$\mathfrak{R} = \frac{6}{[1 - \phi_1 t^2]^2} \left[6\phi_1^2 t^2 - 2\phi_1 + \frac{k}{a_1^2} \right], \quad (5.69)$$

$$R_1 = \frac{3}{4} \frac{1}{[1 - \phi_1 t^2]^4} \left[-2\phi_1^2 t^2 - 2\phi_1 - \frac{k}{a_1^2} \right]^2. \quad (5.70)$$

La expansión tiene lugar con una aceleración constante

$$q_0 = -\frac{1}{2}, \quad H_0 = \frac{2}{t_0}, \quad \implies \quad t_0 \sim \frac{2}{H_0}. \quad (5.65)$$

con $H_0 \sim 65 \pm 5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, obtenemos $t_0 \sim 30.1 \text{ Gy}$, que es un valor demasiado grande comparado con la edad obtenida de los cúmulos globulares.

Los parámetros de densidad para un fluido de polvo están dados por

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{2}{3} - \frac{4\omega}{3}, \\ \Omega_\phi &= \frac{4\omega}{3} + \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

En este caso como en el caso general, para tener valores positivos de Ω_m , se requiere que $\omega < 1/2$, incluyendo valores negativos. Por otra parte, de acuerdo a resultados observacionales, $\Omega_m \sim 0.4 \pm 0.1$ y $\Omega_\Lambda \sim 0.6$, entonces ω está restringida a $\omega \sim 1/5$.

2. $k \neq 0$

- Para $\frac{k}{3+2\omega} > 0$

Las soluciones en términos de t están dadas por

$$\begin{aligned} \phi(t) &= c_1[1 - \phi_1 t^2]^{-2}, \\ a(t) &= a_1[1 - \phi_1 t^2], \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1\phi(t) + \lambda_2\phi(t)^{1/2} \\ \rho &= \rho_1 a(t)^{-3}, \end{aligned} \quad (5.67)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha/c_1^{1/2}, \quad \phi_1 = \frac{c_1}{4\alpha^2} \frac{k}{3+2\omega}, \\ \lambda_1 &= \frac{2k}{\alpha^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{kc_1^{1/2}}{\alpha^2}, \\ \rho_1 &= \frac{kc_1^{1/2}}{4\pi\alpha^2} \alpha^3, \end{aligned} \quad (5.68)$$

De acuerdo con nuestro análisis de la solución para una ecuación de estado general, donde $\sigma = 4/(4 - 3\gamma)$, con $\gamma = 1$ obtenemos $\sigma = 4$. Tomando en cuenta las ecuaciones generales del escalar de Ricci y los invariantes de curvatura, Ecs. (5.51) y (5.53), $\mathfrak{R} \rightarrow \infty$ y $R_1 \rightarrow \infty$ cuando $\sigma = 4$ y $\tau \rightarrow \pm\infty$, lo cual corresponde a un valor finito de t , de acuerdo a la solución dependiente del tiempo (5.67).

Además $\gamma = 1 < 4/3$, es consistente con nuestro requerimiento para la existencia de singularidades, en nuestra discusión para el caso general con $\frac{k}{3+2\omega} > 0$.

Los valores actuales de los parámetro de Hubble y desaceleración, de acuerdo con este modelo, están dados por las siguientes expresiones

$$q_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\phi_1 t_0^2} - 1 \right), \quad H_0 = \frac{2\phi_1 t_0}{\phi_1 t_0^2 - 1}, \quad t_0 = \frac{1}{H_0} \pm \sqrt{\frac{1}{H_0^2} + \frac{1}{\phi_1}}. \quad (5.71)$$

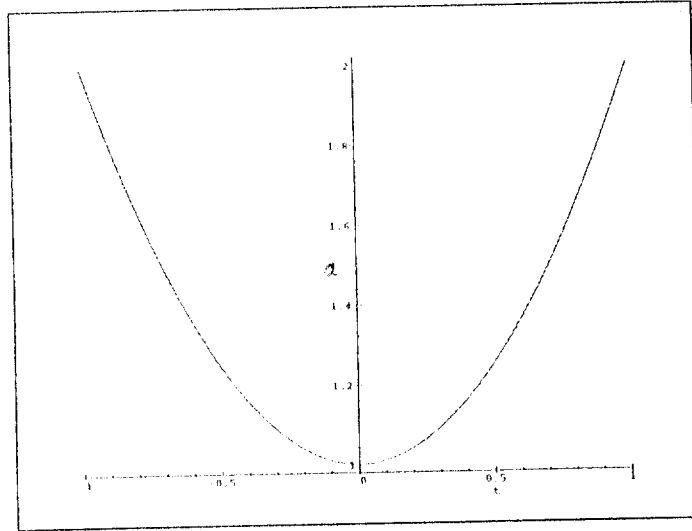
Puesto que $\phi_1 t_0^2 < 1$, entonces $q_0 > 0$. Como puede verse de la figura 5.1, en la región de validez de esta solución ($a(t) > 0$), este modelo se expande desde $t = -\phi_1^{-1/2}$ (normalizado a 1 en la figura correspondiente), hasta $t = 0$, entonces se contráe hasta $t = \phi_1^{-1/2}$, en ambos casos con parámetro de desaceleración positivo. Los valores numéricos de t_0 dependen de los valores de las constantes libres de nuestro modelo.

- Para $\frac{k}{3+2\omega} < 0$

La correspondiente solución en términos del tiempo t está dada como sigue

$$\begin{aligned} \phi(t) &= c_1 [1 + \phi_1 t^2]^{-2}, \\ a(t) &= a_1 [1 + \phi_1 t^2], \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t) + \lambda_2 \phi(t)^{1/2}, \\ \rho &= \rho_1 a(t)^{-3}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

donde



88

Figura 5.2: Gráfica del factor de escala como función del tiempo. Las constantes han sido normalizadas a 1.

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{c_1}{4\alpha^2} \left\| \frac{k}{3+2\omega} \right\|, \\ a_1 &= \alpha/c_1^{1/2}, \\ \lambda_1 &= \frac{2k}{\alpha^2}, \\ \lambda_2 &= -\frac{kc_1^{1/2}}{\alpha^2}, \\ \rho_1 &= \frac{kc_1^{1/2}}{4\pi\alpha^2} \alpha^3,\end{aligned}$$

y c_1 es una constante de integración. En este caso no se tienen restricciones en el valor que puede tomar t . De la figura 5.2 puede verse que $a(t)$ es una función creciente, para la que la expansión tiene lugar en forma acelerada, desde un estado no singular, como se verifica por las expresiones del escalar de Ricci y el invariante de curvatura

$$\mathfrak{R} = \frac{6}{[1 + \phi_1 t^2]^2} \left[6\phi_1^2 t^2 + 2\phi_1 + \frac{k}{a_1^2} \right], \quad (5.73)$$

$$R_1 = \frac{3}{4} \frac{1}{[1 + \phi_1 t^2]^4} \left[-2\phi_1^2 t^2 + 2\phi_1 - \frac{k}{a_1^2} \right]^2. \quad (5.74)$$

De acuerdo a nuestro análisis general de este caso, de (5.57) y (5.59), \mathfrak{R} y R_1 no divergen para $\sigma = 4$ y $[\beta\tau] \rightarrow \pm(2n + 1)\pi/2$, ésto está de acuerdo con la solución dependiente del tiempo (5.72) la cual no tiene singularidades. Para este modelo $\gamma = 1 < 4/3$, ésto es consistente con la condición $\gamma > 4/3$, para que existan singularidades.

Para esta solución, los valores actuales del parámetro de desaceleración y del parámetro de Hubble están dados por

$$q_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\phi_1} t_0^{-2}, \quad H_0 = \frac{2\phi_1 t_0}{\phi_1 t_0^2 + 1}, \quad t_0 = \frac{1}{H_0} \pm \sqrt{\frac{1}{H_0^2} - \frac{1}{\phi_1}}. \quad (5.75)$$

Como en el caso anterior, el valor de t_0 depende de las constantes libres de nuestro modelo, pero en este caso, si $H_0^2 \sim \phi_1 \implies t_0 \sim 1/H_0$.

5.6.2 Fluido “Stiff matter”

Otra interesante aplicación de una ecuación de estado barotrópica, es un fluido “stiff matter” para el cual $\gamma = 2$. En tal caso las soluciones (5.44), (5.49), (5.50), (5.55), y (5.56) son las siguientes

1. $k=0$

La solución en términos del tiempo físico t está dada por

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_1(c - t)^{-1}, \\ a(t) &= a_1(c - t)^{1/2}, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1\phi(t)^2, \\ \rho &= \rho_1 a(t)^{-6}, \end{aligned} \quad (5.76)$$

donde ahora

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{c_1^{1/2}}{2}, \\ a_1 &= \frac{\alpha\sqrt{2}}{c_1^{1/4}}, \\ \lambda_1 &= -\frac{4}{c_1}, \\ \lambda_2 &= 0, \\ \rho_1 &= \frac{1}{8\pi} \frac{1-2\omega}{c_1} \alpha^6.\end{aligned}$$

Esta solución tiene significado físico para $t < c$, donde c es una constante de integración. El factor de escala crece lentamente con el tiempo y el parámetro de desaceleración es constante. El escalar de Ricci y el parámetro de Hubble están dados por

$$\mathfrak{R} = 0, \quad (5.77)$$

$$q_0 = 1, \quad H_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{t_0 - c}. \quad (5.78)$$

Los parámetros de densidad correspondientes son

$$\begin{aligned}\Omega_m &= \frac{1}{3} - \frac{2\omega}{3}, \\ \Omega_\phi &= \frac{2}{3} + \frac{2\omega}{3}.\end{aligned} \quad (5.79)$$

Se requiere que $\omega < 1/2$ para tener valores positivos de Ω_m , como hemos señalado en la discusión de la solución general. Los resultados observacionales $\Omega_m = 0.4$ y $\Omega_\Lambda = 0.6$, determinan $\omega = -0.1$.

2. $k \neq 0$

- Para $\frac{k}{3+2\omega} > 0$

La solución para este caso en términos del tiempo t está dada por

$$\begin{aligned}\phi(t) &= c_1 [1 + \phi_1 t^2]^{-1}, \\ a(t) &= a_1 [1 + \phi_1 t^2]^{1/2}, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t), \\ \rho &= \rho_1 a(t)^{-6},\end{aligned}\tag{5.80}$$

donde $\phi_1 = \frac{c_1 k}{\alpha^2 (3+2\omega)}$, ($\phi_1 > 0$ para $c_1 > 0$), $a_1 = \alpha c_1^{-1/2}$, $\lambda_1 = \frac{2k}{\alpha^2}$, $\lambda_2 = 0$, $\rho_1 = \frac{k}{8\pi c_1} \alpha^4$, y c_1 es una constante de integración. Aquí $a(t)$ crece con el tiempo desde un radio mínimo a_1 y no hay singularidades. La gráfica de esta solución es análoga a la figura 5.2, donde la expansión tiene lugar con aceleración partiendo de un estado no singular. Para este caso se tiene la restricción $k/(3+2\omega) > 0$, si consideramos que ω tiene valores positivos, entonces $k = 1$, implicando que la solución en cuestión corresponde a un universo cerrado pero sin singularidades, como se verifica de los correspondientes escalar de Ricci e invariante de curvatura que están dados por

$$\mathfrak{R} = \frac{6}{[1 + \phi_1 t^2]} \left(\phi_1 + \frac{k c_1}{\alpha^2} \right),\tag{5.81}$$

$$R_1 = \frac{3}{4} \frac{1}{[1 + \phi_1 t^2]^4} \left[-\phi_1 t^2 \left(\phi_1 + \frac{c_1 k}{\alpha^2} \right) + \phi_1 - \frac{k c_1}{\alpha^2} \right]^2.\tag{5.82}$$

Por el contrario, si ω es negativa, específicamente $\omega < -3/2$, se tendrá $k = -1$ y la solución corresponderá a un universo abierto sin singularidades.

En este caso $\gamma = 2$ lo cual implica que $\sigma = -2$. De las ecuaciones (5.51) y (5.53) con este valor de σ , ni \mathfrak{R} ni R_1 divergen para $\tau \rightarrow \pm\infty$, lo cual es consistente con nuestro requerimiento $\gamma > 4/3$ para evitar singularidades. Este análisis está de acuerdo con la inspección de las ecuaciones (5.81) y (5.82).

La gráfica de esta solución es análoga a la gráfica de la figura 5.2 (con las constantes de proporcionalidad normalizadas a 1), correspondiente al caso de polvo con $\frac{k}{3+2\omega} < 0$.

Los parámetros de Hubble y de desaceleración están dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} q_0 &= -\frac{1}{\phi_1} t_0^{-2}, \\ H_0 &= \frac{c_1}{\alpha^2} \frac{k}{3+2\omega} \frac{t_0}{1 + \frac{c_1}{\alpha^2} \frac{k}{3+2\omega} t_0^2}, \\ t_0 &= \frac{1}{2H_0} \pm \sqrt{\frac{1}{4H_0^2} - \frac{\alpha^2 3+2\omega}{c_1 k}}. \end{aligned} \quad (5.83)$$

- Para $\frac{k}{3+2\omega} < 0$

$$\begin{aligned} \phi(t) &= c_1 [1 - \phi_1 t^2]^{-1}, \\ a(t) &= a_1 [1 - \phi_1 t^2]^{1/2}, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t), \\ \rho &= \rho_1 a(t)^{-6}, \end{aligned} \quad (5.84)$$

donde $\phi_1 = \frac{c}{\alpha^2} \left\| \frac{k}{3+2\omega} \right\|$. Para que la solución sea físicamente significativa, se requiere que $\phi_1 < 0 \implies c < 0$. El escalar de Ricci y el invariante de curvatura correspondientes al presente caso, están dadas por

$$\mathfrak{R} = \frac{6}{[1 - \phi_1 t^2]} \left(\frac{k c_1}{\alpha^2} - \phi_1 \right), \quad (5.85)$$

$$R_1 = \frac{3}{4} \frac{1}{[1 - \phi_1 t^2]^4} \left[-\phi_1 t^2 \left(\phi_1 - \frac{c_1 k}{\alpha^2} \right) - \phi_1 - \frac{k c_1}{\alpha^2} \right]^2. \quad (5.86)$$

En este caso $\gamma = 2$, de modo que $\sigma = -2$; de modo que en la solución general (Eqs. (5.55)- (5.59)), $\mathfrak{R} \longrightarrow \infty$ y $R_1 \longrightarrow \infty$, i.e., la solución es singular para este caso si $[\beta\tau] \implies \pm(2n+1)\pi/2$, lo cual corresponde a $t = \phi_1^{-1/2}$. De acuerdo a nuestra discusión de singularidades en el párrafo

bajo la ecuación (5.59), para $\gamma = 2$ la correspondiente solución debe ser singular, como podemos verificar de la inspección de la ecuación (5.85) y (5.86).

La gráfica de esta solución es equivalente a la gráfica dada en la figura 5.1 (con las constantes normalizadas a 1). Si consideramos que ω toma valores grandes y positivos, de la condición para la presente solución $\frac{k}{3+2\omega} < 0$, notamos que k debe ser negativa, correspondiendo a un modelo de universo abierto pero que se colapsa en una singularidad. Por el contrario si ω toma valores negativos ($\omega < -3/2$), k puede ser positiva y la solución correspondería a un universo cerrado que se recolapsa en una singularidad.

Para este modelo los valores actuales de los parámetros de desaceleración y de Hubble son

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{\phi_1} t_0^{-2}, \\ H_0 &= -\frac{c_1}{\alpha^2} \left\| \frac{k}{3+2\omega} \right\| \frac{t_0}{1 - \frac{c_1}{\alpha^2} \left\| \frac{k}{3+2\omega} \right\| t_0^2}, \\ t_0 &= \frac{1}{2H_0} \pm \sqrt{\frac{1}{4H_0^2} + \frac{\alpha^2}{c_1} \frac{3+2\omega}{k}}. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Como podemos ver, $\phi_1 < 0 \implies q_0 < 0$, así es que este modelo está acelerado. Los valores numérico de H_0 y t_0 dependen de los valores de las constantes libres en nuestro modelo.

5.7 Fluido de radiación

En esta sección consideraremos el caso de un fluido de radiación para el cual $\gamma = 4/3$, de modo que regresando a las ecuaciones (5.14)-(5.16) y siguiendo un procedimiento análogo al de la sección 5.6, obtenemos la ecuación (5.42) con $\gamma = 4/3$. Para resolver esta ecuación diferencial supondremos $m = 1/2$, así es que en tal caso tendremos

$$\frac{\phi''}{\phi} - \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 = 0, \quad (5.88)$$

en la cual $\omega \neq -3/2$. Esta ecuación diferencial tiene la siguiente solución

$$\phi(\tau) = c_1 e^{c\tau}, \quad (5.89)$$

donde c y c_1 son constantes de integración. De acuerdo a las ecuaciones (5.12), (5.38) y (5.41), con $\gamma = 4/3$ y $m = 1/2$ obtenemos respectivamente

$$\begin{aligned} a(\tau) &= a_1 e^{-c\tau/2}, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(\tau), \\ \rho &= \rho_1 a(\tau)^{-4}, \end{aligned} \quad (5.90)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha c_1^{-1/2}, \\ \lambda_1 &= \left[\frac{c^2}{8} (3 + 2\omega) + \frac{3k}{2\alpha^2} \right], \quad \lambda_2 = 0, \\ \rho_1 &= \frac{3}{16\pi} \left[\frac{k}{\alpha^2} - \frac{\omega c^2}{2} - \frac{3c^2}{4} \right] \alpha^4. \end{aligned} \quad (5.91)$$

En términos del tiempo t , esta solución está dada como sigue

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_1 t^{-2}, \\ a(t) &= a_1 t, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t), \\ \rho &= \rho_1 a(t)^{-4}, \end{aligned} \quad (5.92)$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{4}{c^2}, \\ a_2 &= \frac{\alpha c}{2}. \end{aligned}$$

Esta solución tiene singularidades, como se puede ver del escalar de Ricci, que para este caso está dado por

$$\mathfrak{R} = 6\left(1 + \frac{k}{a_1^2}\right) t^{-2}. \quad (5.93)$$

El parámetro de desaceleración se anula, mientras que el valor actual del parámetro de Hubble está dado por

$$q_0 = 0, \quad H_0 = \frac{1}{t_0}, \quad (5.94)$$

así es que $t_0 = 1/H_0 \sim 15.05$ Gy, valor que está en razonable acuerdo con las medidas observacionales.

El caso $k = 0$ no está excluido de la solución (5.92). Para $k = 0$ obtenemos los parámetros de densidad de la materia y el campo escalar

$$\begin{aligned} \Omega_m &= -\omega - \frac{3}{2}, \\ \Omega_\phi &= \omega + \frac{5}{2}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Se requiere que $\omega < -3/2$, para tener $\Omega_m > 0$, y los valores observacionales aceptados actualmente para Ω_m y Ω_ϕ , implican que $\omega = -1.9$.

5.8 El caso de falso vacío

En esta sección analizaremos el caso $\gamma = 0$. Seguiremos un procedimiento similar al de la sección 5.6, entonces de las ecuaciones (5.39) y (5.40) con $\gamma = 0$, obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones.

$$\frac{\phi''}{\phi}(2m-1) + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[-2m - \omega - \frac{1}{2} \right] + \frac{2k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} = 0, \quad (5.96)$$

$$\begin{aligned} \frac{\phi''}{\phi}(3+2\omega) + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[-12m^2 + 3m - 6\omega m + 3\omega + \frac{3}{2} \right] + \\ \frac{12k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} + 2\frac{\lambda(\phi)}{\phi} + 2\frac{d\lambda(\phi)}{d\phi} = 0. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Primeramente consideraremos el caso $k = 0$.

- $k = 0$

El conjunto de ecuaciones (5.96)-(5.97) con $k = 0$ tiene dos posibles soluciones dependiendo de la relación entre m y ω :

1. $\omega = -1 - m$

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= c_1 \exp[\phi_1 t], \\
 a(t) &= a_1 \exp[-m\phi_1 t], \\
 \lambda(\phi) &= \frac{\lambda_1}{\phi(t)} + \lambda_2, \\
 \rho &= -\frac{c_1}{8\pi},
 \end{aligned} \tag{5.98}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= c_3^{1/2}(2m - 1), \\
 a_1 &= \alpha c_1^{-m}, \\
 \lambda_1 &= c_1, \\
 \lambda_2 &= \frac{c_1}{2}(2m - 1)^3(3m - 1).
 \end{aligned}$$

Esta es una solución inflacionaria si $m\phi_1 < 0$. Esta condición significa que $0 < m < 1/2$, lo cual implica una restricción en el rango de valores que puede tomar ω : $1/2 < \omega < 1$. Para tener soluciones físicas es necesario que $c_1 > 0$, lo cual significa que $\rho < 0$. Por supuesto estas soluciones no tienen singularidades, como podemos ver del escalar de Ricci para este caso

$$\mathfrak{R} = 12c_1 m^2 (2m - 1)^2. \tag{5.99}$$

Los parámetros de Hubble y de desaceleración están dados por

$$q_0 = -1, \quad H_0 = m(1 - 2m)c_1^{1/2}, \tag{5.100}$$

así es que el modelo es acelerado. Por otra parte, los parámetros de densidad debido a la materia y el campo escalar, para esta solución están dados como sigue

$$\begin{aligned}\Omega_m &= -\frac{1}{3m^2} c_2 \phi_1^{-2} \exp[-\phi_1 t], \\ \Omega_\phi &= \frac{1}{3m^2} c_2 \phi_1^{-2} \exp[-\phi_1 t] + 1.\end{aligned}\quad (5.101)$$

Aquí, se requiere que $c_2/c_3 < 0$, para tener valores positivos de Ω_m . Como hemos visto, $0 < m < 1/2 \implies m > 0$ y $\phi_1 < 0$, lo cual significa que Ω_m y Ω_ϕ crecen exponencialmente con el tiempo, manteniendo $\Omega_m + \Omega_\phi = 1$.

2. $\omega \neq -1 - m$

con esta condición y $k = 0$, las correspondientes soluciones exactas al conjunto de ecuaciones (5.96)-(5.97) son

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi_1 (c - t)^\sigma, \\ a(t) &= a_1 (c - t)^{-m\sigma}, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t)^{n_1} + \frac{\lambda_2}{\phi(t)}, \\ \rho &= -\frac{c_1}{8\pi},\end{aligned}\quad (5.102)$$

donde

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1 - 2m}{m + \omega + 1}, \\ \phi_1 &= c_1 [c_1^{1/2} (m + \omega + 1)]^\sigma, \\ a_1 &= \alpha \phi_1^{-m}, \\ n_1 &= \frac{2\omega + 3}{2m - 1} + 1 = -\frac{2}{\sigma}, \\ \lambda_1 &= -\frac{c_1^{1-n_1}}{4} \frac{(2m - 1)^2}{2m + \omega + \frac{1}{2}} \left[(3 + 2\omega)(2m + \omega + \frac{1}{2}) + \right. \\ &\quad \left. (2m - 1)(-12m^2 + 3m - 6m\omega + 3\omega + \frac{3}{2}) \right], \\ \lambda_2 &= c_2.\end{aligned}$$

Esta solución corresponde a un modelo de inflación extendida si $m\sigma < 0$. Para tener soluciones físicamente significativas, se requiere $t < c$. La constante cosmológica es una función que decrece con el tiempo: $\lambda \sim t^{-2} + t^{-\sigma}$, si $\sigma > 0$, implicando, por la condición mencionada más arriba $m\sigma < 0$, que m debe ser negativa.

Este conjunto de soluciones es singular justamente en $t = c$, como podemos ver del escalar de Ricci

$$\mathfrak{R} = 6m(2m - 1) \frac{4m^2 - 3m - \omega - 1}{(m + \omega + 1)^2} \frac{1}{(c - t)^2}. \quad (5.103)$$

Los valores actuales de los parámetros de Hubble y desaceleración para este modelo, están dados por el siguiente conjunto de expresiones

$$\begin{aligned} q_0 &= 1 - \frac{m + \omega + 1}{m(2m - 1)}, \\ H_0 &= -\frac{m(1 - 2m)}{m + \omega + 1} (c - t_0)^{-1}, \\ t_0 &= c - \frac{m(1 - 2m)}{m + \omega + 1} \frac{1}{H_0}. \end{aligned} \quad (5.104)$$

De acuerdo a estos resultados, la expansión en este modelo tiene lugar en forma acelerada si $q_0 = 1 + 1/m\sigma < 0$, pero hemos visto que $m\sigma < 0$, entonces $\|m\sigma\| < 1$ es la condición requerida para que el universo sea acelerado. El valor de t_0 depende claramente del valor de m y ω , pero sabemos que debido a las restricciones en t , este modelo no es relevante hoy en día.

Los correspondientes parámetros de densidad debidos a la materia y al campo escalar en el presente caso, están dados por

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{1}{3m^2} \frac{1}{\sigma^2} \phi_1^{-2/\sigma} \left[8\pi \rho_1 - c_2 \phi(t)^{\frac{4m+2\omega+1}{1-2m}} \right], \\ \Omega_\phi &= \frac{1}{3m^2} \frac{1}{\sigma^2} \phi_1^{-2/\sigma} \left[\lambda_1 + \lambda_2 \phi(t)^{\frac{4m+2\omega+1}{1-2m}} \right] + \frac{\omega}{6m^2} + \frac{1}{m}. \end{aligned} \quad (5.105)$$

Ambos valores dependen de las constantes libres del modelo, pero para todo valor de t se satisface $\Omega_m + \Omega_\phi = 1$.

- $k \neq 0$

Para resolver analíticamente el conjunto de ecuaciones (5.96)-(5.97) con $k \neq 0$, supondremos $m = 1/2$, de modo que tendremos respectivamente

$$\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 (3 + 2\omega) - \frac{4k}{\alpha^2} = 0, \quad (5.106)$$

$$\frac{\phi''}{\phi} (3 + 2\omega) - \frac{12k}{\alpha^2} + 2\frac{\lambda(\phi)}{\phi} + 2\frac{d\lambda(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (5.107)$$

De la ecuación (5.106) tenemos

$$\frac{\phi'}{\phi} = \left[\frac{4k}{\alpha^2(3 + 2\omega)} \right]^{1/2}. \quad (5.108)$$

La solución de esta ecuación está dada por

$$\phi(\tau) = c_1 e^{\frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{3+2\omega}} \tau}. \quad (5.109)$$

De la ecuación (5.108) tenemos

$$\frac{\phi''}{\phi} = \frac{4k}{\alpha^2(3 + 2\omega)}. \quad (5.110)$$

Usando esta última ecuación en (5.107) obtenemos una ecuación diferencial para $\lambda(\phi)$:

$$\frac{d\lambda(\phi)}{d\phi} + \frac{\lambda(\phi)}{\phi} - \frac{4k}{\alpha^2} = 0, \quad (5.111)$$

Esta ecuación diferencial tiene la siguiente solución

$$\lambda(\phi) = \frac{2k}{\alpha^2} \phi(\tau) + \frac{c_1}{\phi(\tau)}. \quad (5.112)$$

De las ecuaciones (5.12) y (5.38) con $m = 1/2$, tenemos respectivamente

$$a(\tau) = a_1 e^{-\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{3+2\omega}} \tau}, \quad (5.113)$$

$$\rho = -\frac{c_1}{8\pi}, \quad (5.114)$$

donde $a_1 \equiv \alpha c_1^{-1/2}$. Esta solución, en términos de t , está dada como sigue

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_1 t^{-2}, \\ a(t) &= a_1 t, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t) + \lambda_2 \phi(t)^{-1}, \\ \rho &= -\frac{c_1}{8\pi}, \end{aligned} \quad (5.115)$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\alpha^2}{k}(3 + 2\omega), \\ a_1 &= \sqrt{\frac{k}{3 + 2\omega}}, \\ \lambda_1 &= \frac{2k}{\alpha^2}, \\ \lambda_2 &= c_1. \end{aligned}$$

Esta solución tiene una singularidad inicial, como puede verse del escalar de Ricci

$$\mathfrak{R} = 12(2 + \omega) t^{-2}. \quad (5.116)$$

$\lambda(\phi)$ se incrementa con el tiempo, en contradicción con las observaciones actuales. Sin embargo, para una combinación particular de los valores actuales de las constantes libres de este modelo, puede tenerse un valor pequeño de λ_0

$$\left[\frac{2}{\alpha^2} \left\| \frac{k}{c} \right\| \phi_1^2 \right]_0^{1/4} \sim t_0. \quad (5.117)$$

Los valores actuales de los parámetros de desaceleración y de Hubble, para el presente modelo están dados por las siguientes ecuaciones

$$q_0 = 0, \quad H_0 = \frac{1}{t_0}, \quad (5.118)$$

tal que $t_0 = 1/H_0 \sim 15.05$ Gy.

5.9 Conclusiones

Hemos considerado la teoría tenso-escalar de Brans-Dicke, obteniendo modelos cosmológicos de Friedman-Robertson-Walker con constante cosmológica dependiente del tiempo. La dependencia temporal surge de manera natural. Para obtener soluciones inflacionarias exactas de las ecuaciones de campo, hicimos dos suposiciones: $a\phi^m = \alpha$, con α constante, y $\lambda(t) = \lambda_1\phi(t)^{n_1} + \lambda_2\phi(t)^{n_2}$, con una ecuación de estado barotrópica $p = (\gamma - 1)\rho$. Nuestro conjunto de soluciones exactas dependen de los valores de γ , k , m y ω .

Hemos clasificado las soluciones exactas de cada caso que hemos tratado, de acuerdo a los valores de las constantes libres de nuestro modelo. Para vacío con $k = 0$ y $m = 1/2$, obtenemos una solución no relevante para nuestros propósitos, ya que $\lambda = 0$. Para $k = 0$ y $m = 2/3$ obtenemos una solución con singularidades para la cual el factor de escala crece con el tiempo como $a(t) \sim t^{1/(5+3\omega)}$ en forma acelerada.

También para vacío obtenemos en el caso plano, una solución de inflación extendida con singularidad inicial. Para el caso no plano obtenemos una solución singular “coasting”. En todos estos modelos el valor de t_0 y Ω_ϕ (usualmente llamado Ω_Λ) son similares a los valores aceptados actualmente.

También obtenemos soluciones exactas cuando utilizamos una ecuación de estado barotrópica general $p = (\gamma - 1)\rho$. En el caso plano ($k = 0$) obtenemos una solución de inflación extendida con singularidad inicial. La expansión de este modelo ocurre aceleradamente, independientemente de la ecuación de estado. El valor de Ω_ϕ depende de los valores no determinados de las constantes γ y ω .

La solución del caso no plano no puede expresarse en términos del tiempo cosmológico, si no en términos del parámetro τ . En tales modelos las singularidades iniciales pueden evitarse para algunos valores de γ .

Como ejemplos de nuestras soluciones generales, hemos calculado los modelos para un fluido perfecto de polvo y de “stiff matter”. Para el modelo de polvo,

en el caso plano, obtenemos una solución de inflación extendida que se expande lentamente con aceleración y cuya constante cosmológica decae con el tiempo. Esta solución tiene una singularidad inicial y su edad estimada es $t_0 \sim 2/H_0$, la cual resulta muy grande comparada con los valores aceptados hoy en día. Se requeriría una razón de crecimiento más rápida para tener valores más pequeños de t_0 y ser consistente con las observaciones actuales.

Por otra parte, para un modelo de polvo no plano obtenemos una solución que se expande lentamente $a(t) \sim t^2$, con aceleración o desaceleración no constante, dependiendo de la relación entre las constantes libres de nuestro modelo: $k/(3 + 2\omega) > 0$ ó $k/(3 + 2\omega) < 0$ respectivamente. Los modelos son singulares o no singulares dependiendo también de los valores de las constantes libres α , k y ω .

Como otra aplicación de nuestra solución con una ecuación de estado barotrópica, consideramos un fluido de “stiff matter” para el cual $\gamma = 2$. La solución correspondiente al caso plano es un modelo que se expande lentamente $a(t) \sim t^{1/2}$, con aceleración, sin singularidades y con constante cosmológica que decae con el tiempo $\lambda \sim t^{1/2}$. La validez de este modelo está restringida a algunos valores de t . La edad actual del universo, según este modelo, es $t_0 \sim 1/2H_0 \sim 7.5$ Gy, con $H_0 \sim 65 \pm 5$ km s⁻¹Mpc⁻¹. Claramente este modelo no es aplicable hoy en día, no solo por el valor obtenido para t_0 , si por el tipo de fluido en consideración.

En el caso no plano para el mismo fluido “stiff matter”, obtenemos modelos cosmológicos para los cuales el factor de escala crece con el tiempo desde un radio mínimo y cuya constante cosmológica decrece con el tiempo, pero como en el modelo para el fluido de polvo, tenemos un conjunto de constantes libres cuyos valores determinan las características de este modelo. Así, para $k/(3 + 2\omega) > 0$ tenemos un modelo con aceleración no constante y sin singularidades, mientras que para $k/(3 + 2\omega) < 0$, nuestro modelo tiene una aceleración no constante también, pero con singularidades iniciales y cuya validez está restringida a algunos valores de t . En ambos casos la edad del universo, según este modelo, dependen de los valores numéricos de las constantes libres.

Separadamente resolvemos los casos de un fluido de radiación ($\gamma = 4/3$) y de “falso vacío” ($\gamma = 0$). Para el fluido de radiación obtenemos un modelo “coasting” $a(t) \sim t$, con una constante cosmológica que decrece con el tiempo y con singularidad inicial, independientemente de la curvatura. El valor de $t_0 \sim 15.05$ Gy obtenido

de este modelo, está en relativo acuerdo con las observaciones actuales.

Para el fluido de falso vacío, obtenemos un conjunto de soluciones que clasificamos dependiendo del rango de valores que pueden tomar las constantes libres de nuestro modelo. Para el caso plano, obtenemos dos familias de soluciones, una de ellas corresponde a un modelo de inflación exponencial con aceleración y sin singularidades. Otro conjunto de soluciones obtenidas para este caso es un modelo inflacionario del tipo ley de potencias: $a(t) \sim (c - t)^\epsilon$, donde ϵ depende de las constantes “libres” m y ω , que realmente están restringidas por requerimientos físicos. Para esta última solución, la constante cosmológica es una función binomial en t , la cual decrece bajo condiciones específicas dependiendo de las constantes libres.

Adicionalmente, obtenemos una solución para el caso no plano de un fluido de “falso vacío”. En tal caso obtenemos un modelo “coasting” $a(t) \sim t$, el cual tiene singularidad inicial y constante cosmológica que es una función binomial en t : $\lambda \sim \lambda_1 t^{-2} + \lambda_2 t^2$. La constante cosmológica de este modelo crece con el tiempo, en contradicción con las observaciones actuales de λ . Sin embargo, para una combinación particular de los valores hoy en día de las constantes libres del modelo, es posible obtener un valor pequeño de λ_0 . El valor de t_0 , de acuerdo con este modelo, es $t_0 \sim 15.05$ Gy, el cual está en relativo acuerdo con el valor aceptado actualmente.

Así, como hemos visto de la descripción de nuestras soluciones, algunas de ellas no tienen significado físico hoy en día, algunas otras están restringidas a un periodo específico de la evolución del Universo. La mayoría de ellas son válidas desde una singularidad inicial hasta hoy, prediciendo una época inflacionaria, una “constante” cosmológica que decrece con el tiempo, además de un valor negativo del parámetro de desaceleración, en concordancia con el reciente resultado observacional, de acuerdo con el cual el universo está acelerándose actualmente. La edad del universo predicha por estos modelos depende, en algunos de los casos, de algunas constantes libres de nuestros modelos, sin embargo debe tomarse en cuenta el tipo de fluido para el que se evalúa t_0 .

Capítulo 6

Resumen, conclusiones y perspectivas

En este trabajo hemos considerado a la constante cosmológica como una función del tiempo y hemos investigado sus implicaciones en el contexto de la teoría tenso-escalar de Brans-Dicke. Nos hemos enfocado en la obtención de soluciones exactas, de modo que la complicación de las ecuaciones diferenciales no lineales que constituyen las ecuaciones de campo de nuestro sistema, nos limita a ciertas funciones del potencial escalar. Así, en el capítulo 4 hemos presentado una familia de modelos cosmológicos con un potencial proporcional a una potencia del campo escalar, obteniendo soluciones válidas durante un periodo “coasting”. Dichas soluciones presentan la característica de tener una constante cosmológica que decrece con el cuadrado del tiempo, de modo que se pueden obtener pequeños valores de Λ hoy en día.

Con el objeto de obtener modelos válidos durante más amplios periodos de la evolución del universo y de obtener parámetros cosmológicos que puedan compararse con valores obtenidos de observaciones, en el capítulo 5 hemos presentado una familia de modelos cosmológicos con un potencial que es una función binomial del campo escalar. Hemos considerado a un universo vacío o que contiene a un fluido perfecto con ecuación de estado barotrópica. En este contexto hemos obtenido una familia de soluciones exactas que corresponden tanto a modelos de inflación exponencial como a inflación extendida, así como un conjunto de parámetros cosmológicos para cada caso considerado.

Cada solución difiere dependiendo del tipo de fluido a que corresponda. Algunos

modelos obtenidos en este trabajo han sido descartados en base a la comparación entre los valores de los parámetros cosmológicos obtenidos de nuestros modelos y los conocidos de las observaciones. Sin embargo la mayoría de nuestros modelos están en relativo buen acuerdo con las expectativas observacionales, presentando una constante cosmológica que decrece con el tiempo y un parámetro de desaceleración negativo, implicando que tales modelos cosmológicos corresponden a un universo acelerado, lo cual es importante en base a los recientes descubrimientos obtenidos de las observaciones de las estrellas supernovas Ia, según los cuales nuestro universo se encuentra en una fase de aceleración y con una constante cosmológica distinta de cero.

También hemos hecho un análisis de las singularidades de las soluciones obtenidas del modelo presentado en el capítulo 5. Hemos encontrado que la mayoría de los modelos presenta una singularidad tipo “Big-Bang”, aunque alguno de nuestras soluciones corresponden a modelos cosmológicos no singulares. Es importante seguir investigando las características de este tipo de modelos sin singularidad, ya que en algunos trabajos anteriores se ha argumentado la posibilidad de que la existencia de una constante cosmológica permita evitar singularidades y permita la creación del universo.

En los modelos presentados en el capítulo 5 hemos encontrado un conjunto de soluciones exactas para fluidos perfectos con ecuación de estado barotrópica. A lo largo de la evolución del universo, distintos fluidos dominan en cada etapa. Así, un aspecto que aún permanece abierto en la investigación iniciada en este trabajo es el análisis de la etapa evolutiva del universo en la que cada solución tendría sentido.

Apéndice A

Condición de no divergencia

En este apéndice demostramos que la condición de no divergencia se cumple si la ecuación de campo (4.3) se satisface.

Iniciamos nuestra demostración con la expresión del tensor tensión-energía de la materia, el cual partiendo de la ecuación (4.2) puede escribirse como sigue

$$8\pi T_\nu^\mu = \phi(R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R) - \frac{\omega(\phi)}{\phi}(\phi^{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu\phi_{;\lambda}\phi^{;\lambda}) - (\phi_{;\nu}^\mu - \delta_\nu^\mu\Box\phi) - \lambda(\phi)\delta_\nu^\mu\phi. \quad (\text{A.1})$$

Calculando la divergencia de esta última ecuación, y reordenando términos, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = & -\phi_{;\mu}\frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R - \frac{\omega(\phi)}{2\phi^2}\phi_{;\mu}\delta_\nu^\mu\phi_{;\lambda}\phi^{;\lambda} + \frac{d\omega(\phi)}{d\phi}\frac{1}{2\phi}\phi_{;\mu}\delta_\nu^\mu\phi_{;\lambda}\phi^{;\lambda} - \frac{\omega(\phi)}{\phi}\phi^{i\mu}_{;\mu}\phi_{;\nu} \\ & + \frac{\omega(\phi)}{\phi}\phi^{;\mu}\phi_{;\nu;\mu} - \phi\frac{d\lambda(\phi)}{d\phi}\phi_{;\nu} - \lambda(\phi)\phi_{;\nu} + \phi_{;\mu}R_\nu^\mu + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2}\phi_{;\mu}\phi^{i\mu}\phi_{;\nu} \\ & - \frac{d\omega(\phi)}{d\phi}\frac{1}{\phi}\phi_{;\mu}\phi^{;\mu}\phi_{;\nu} + \frac{\omega(\phi)}{\phi}\phi_{;\lambda;\nu}\phi^{;\lambda} - \phi_{;\nu;\mu}^\mu + (\Box\phi)_{;\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

simplificando esta última ecuación:

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{1}{2}\phi_{;\nu}R + \frac{1}{2}\frac{\omega(\phi)}{\phi^2}\phi_{;\nu}\phi_{;\lambda}\phi^{;\lambda} - \frac{d\omega(\phi)}{d\phi}\frac{1}{2\phi}\phi_{;\nu}\phi_{;\lambda}\phi^{;\lambda} - \frac{\omega(\phi)}{\phi}\phi^{;\mu}_{;\mu}\phi_{;\nu} \\ & - \phi\frac{d\lambda(\phi)}{d\phi}\phi_{;\nu} - \lambda(\phi)\phi_{;\nu} + \phi_{;\mu}R_\nu^\mu - \phi_{;\nu;\mu}^\mu + (\Box\phi)_{;\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Usando las identidades $\phi_{;\mu}R_\nu^\mu = \Box(\phi_{;\nu}) - (\Box\phi)_{;\nu}$, en la ecuación anterior, obtenemos

$$0 = -\frac{\omega(\phi)}{\phi}\phi_{;\nu}\left[\square\phi + \frac{1}{2}\phi_{,\lambda}\phi^{,\lambda}\frac{d}{d\phi}\ln\left(\frac{\omega(\phi)}{\phi}\right) + \frac{1}{2}\frac{\phi}{\omega(\phi)}\left[R + 2\frac{d}{d\phi}(\phi\lambda(\phi))\right]\right]. \quad (\text{A.4})$$

Esta es la ecuación de campo (4.4) multiplicada por el factor $-\frac{\omega(\phi)}{\phi}\phi_{;\nu}$. De este modo se demuestra que si esta ecuación se satisface, entonces la condición de no divergencia se satisface también, de modo que las ecuaciones de (4.2) y (4.4) son las ecuaciones de campo correspondiente a nuestro sistema, de las cuales se obtienen las ecuaciones (4.8)-(4.10).

Apéndice B

Aplicación a teorías de cuerdas

En este apéndice demostramos que las soluciones obtenidas para el caso de vacío con $\omega = -1$, corresponden a soluciones de modelos de cuerdas a bajas energías.

Llevaremos a cabo esta demostración probando que la acción usada en nuestros modelos puede transformarse en la acción de las teorías de cuerdas a bajas energías, notando que hay una relación entre nuestro campo escalar y el campo escalar de las teorías de cuerdas.

Iniciamos nuestra demostración con la acción de la teoría tenso-escalar de gravitación más general [107] que hemos usado en los modelos presentados en los capítulos 4 y 5:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R - \phi^{-1} \omega g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 2\phi \lambda(\phi)] + S_{NG}. \quad (\text{B.1})$$

Considerando un campo escalar ψ tal que $\phi = e^{-\psi}$, el valor de la constante de acoplamiento $\omega = -1$ y tomado en cuenta el caso de vacío, la acción dada en la ecuación anterior se reescribe como sigue

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\psi} [R + g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi + 2\lambda(\phi)]. \quad (\text{B.2})$$

Si ahora identificamos la siguiente relación: $\lambda(\phi) = -V(\psi)$, la ecuación anterior se reduce a la siguiente

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\psi} [R + g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - 2V(\psi)]. \quad (\text{B.3})$$

Esta es precisamente la acción correspondiente a las teorías de cuerdas a bajas energías, a la que hemos llegado identificando la relación entre los campos $\phi = e^{-\psi}$, los potenciales $\lambda(\phi) = -V(\psi)$ y usando el valor $\omega = -1$.

Es claro entonces que las soluciones de las ecuaciones de campo obtenidas de la acción dada en (4.1), satisfacen también a las ecuaciones de campo obtenidas de la acción dada en (B.3).

En los capítulos 4 y 5 obtuvimos una familia de soluciones para el caso de vacío. A continuación reescribiremos esas soluciones en términos del campo escalar y el potencial de las teorías de cuerdas.

1. Solución del modelo de cosmología “coasting” para vacío y $k = 0$.

Con $\phi = e^{-\psi}$, $\lambda(\phi) = -V(\psi)$ y usando el valor $\omega = -1$ se tiene:

$$\begin{aligned} a &= a_1 t, \\ \psi &= \ln \left[\frac{t}{\phi_1} \right], \\ V(\psi) &= -\frac{\lambda_1}{\phi_1^2} e^{-2\psi}, \end{aligned} \tag{B.4}$$

donde a_1 y ϕ_1 , son constantes positivas arbitrarias y $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

con

$$\begin{aligned} m &= 2 \\ c &= \frac{2(m-1)^2}{m^2 \phi_1^m}. \end{aligned} \tag{B.5}$$

2. Solución del modelo de cosmología “coasting” para vacío y $k \neq 0$.

La solución en este caso está dada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} a &= a_1 t, \\ \psi &= \ln \left[\frac{t^{2/m}}{\phi_1} \right], \\ V(\psi) &= -\frac{\lambda_1}{\phi_1^m} e^{-m\psi}, \end{aligned} \tag{B.6}$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\frac{km}{2-m}}, \\ \lambda_1 &= \frac{2}{m^2}, \end{aligned}$$

ϕ_1 y m constantes arbitraria y $c = \frac{2}{m^2\phi_1^m}$.

3. Soluciones para vacío en las que hemos usado la relación $a\phi^m = \alpha$ (capítulo 5).

- $k = 0, m = 2/3$

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \ln \left[\frac{t^{1/2}}{\phi_1} \right], \\ a(t) &= a_1 t^{1/3}, \\ V(\psi) &= -\lambda_1 e^{-\psi}, \end{aligned} \tag{B.7}$$

donde $\phi_1 = [-2c_1]^{-1/2}$, $a_1 = \alpha \phi_1^{-2/3}$, $\lambda_1 = -c_1^2$, $\lambda_2 = 0$, y c_1 es una constante de integración con valor negativo.

Del escalar de Ricci puede notarse que la presente solución tiene una singularidad:

$$\mathfrak{R} = \frac{-2}{3} t^{-2}, \tag{B.8}$$

- $k = 0, m \neq 1/2, 2/3$

En este caso obtenemos dos familias de soluciones:

- (a) $m \neq 0, 2/3$.

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \ln \left[\frac{t^{-2\sigma}}{\phi_1} \right], \\ a(t) &= a_1 t^{-2m\sigma}, \\ V(\psi) &= -\lambda_1 e^{\frac{\psi}{\sigma}}, \end{aligned} \tag{B.9}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mu &\neq -2\nu, \\
\sigma &= \mu/(\mu + 2\nu), \\
a_1 &= \alpha\phi_1^{-m}, \\
\phi_1 &= [c^{1+\frac{\nu}{\mu}}(\mu + 2\nu)/2]^{\frac{2\mu}{\mu+2\nu}}, \\
\lambda_1 &= (3m^2 - 3m + 1/2)\mu^2 c'^{2(1+\frac{\nu}{\mu})}, \quad \lambda_2 = 0, \\
\mu &\equiv 12m^2 - 14m + 4, \\
\nu &\equiv -12m^2 + 11m - 2,
\end{aligned} \tag{B.10}$$

y c' es una constante de integración. Por otra parte, el escalar de Ricci está dado por

$$\mathfrak{R} = 12m\sigma(4m\sigma + 1)t^{-2}. \tag{B.11}$$

De acuerdo con esta expresión, la solución correspondiente tiene una singularidad inicial.

- (b) $\mu = -2\nu \implies m = 0$ ó $m = 2/3$. El valor $m = 2/3$ está excluido para este caso, así es que sólo resta considerar el caso $m = 0$. Este valor de m reduce la solución correspondiente a un resultado trivial por lo que no mostraremos los detalles de ella.

- $k \neq 0$ y $m = 1/2$

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \ln \left[\frac{t^{-2}}{\phi_1} \right], \\
a(t) &= a_1 t, \\
V(\psi) &= -\lambda_1 e^{-\psi},
\end{aligned} \tag{B.12}$$

donde

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{\alpha^2}{k}, & a_1 &= k^{1/2}, \\
\lambda_1 &= \frac{2k}{\alpha^2}, & \lambda_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Como puede verse k debe ser positivo. Existe una singularidad como se verifica del escalar de Ricci

$$\mathfrak{R} = 12 t^{-2}. \quad (\text{B.13})$$

Así, hemos mostrado que las soluciones (al menos en vacío) en el contexto de las teorías de campos escalares, se reducen a soluciones de teorías de cuerdas a bajas energías.

Apéndice C

Invariantes de curvatura

En este apéndice damos las definiciones de los invariantes de curvatura de acuerdo al formalismo y notación de Carminati y McLenaghan [113].

$$R := g^{ad}g^{bc}R_{abcd}, \quad (\text{C.1})$$

$$r_1 := \Phi_{ABAB}\Phi^{ABAB} = \frac{1}{4}S_a{}^b S_b{}^a, \quad (\text{C.2})$$

$$r_2 := \Phi_{ABAB}\Phi^B{}_{C^B}{}_{C^B}\Phi^{CACA} = -\frac{1}{8}S_a{}^b S_b{}^c S_c{}^a, \quad (\text{C.3})$$

$$r_3 := \Phi_{ABAB}\Phi^B{}_{C^B}{}_{C^B}\Phi^C{}_{D^C}{}_{D^C}\Phi^{DADA} = \frac{1}{16}S_a{}^b S_b{}^c S_c{}^d S_d{}^a, \quad (\text{C.4})$$

$$w_1 := \Psi_{ABCD}\Psi^{ABCD} = \frac{1}{4}\bar{C}_{abcd}\bar{C}^{abcd}, \quad (\text{C.5})$$

$$w_2 := \Psi_{ABCD}\Psi^{CD}{}_{EF}\Psi^{EFAB} = -\frac{1}{8}\bar{C}_{abcd}\bar{C}^{cd}{}_{ef}\bar{C}^{efab}, \quad (\text{C.6})$$

$$m_1 := \Psi_{ABCD}\Phi^{CD}{}_{CD}\Phi^{ABCD} = \frac{1}{4}\bar{C}_{acdb}S^{cd}S^{ab}, \quad (\text{C.7})$$

$$m_2 := \Psi_{ABCD}\Phi^{CD}{}_{CD}\Psi^{AB}{}_{EF}\Phi^{EFCD} = \frac{1}{4}\bar{C}_{acdb}S^{cd}\bar{C}^a{}_{ef}{}^b S^{ef}, \quad (\text{C.8})$$

$$m_3 := \Psi^{AB}{}_{CD}\Phi^{CD}{}_{AB}\Psi^{AB}{}_{CD}\Phi^{AB}{}_{CD} = \frac{1}{4}\bar{C}_{acdb}S^{cd}\tilde{C}^a{}_{ef}{}^b S^{ef}, \quad (\text{C.9})$$

$$m_4 := \Psi_A{}^B{}_{DE}\Phi^{DE}{}_{A^B}\bar{\Psi}_B{}^C{}_{DE}\Phi_B{}^{CDE}\Phi_C{}^A{}_{A^A} = -\frac{1}{8}\bar{C}_{acdb}S^{cd}\tilde{C}^b{}_{efg}S^{ef}S^{og} \quad (\text{C.10})$$

$$m_5 := \Psi^{AB}{}_{CD}\Psi^{CD}{}_{EF}\Phi^{EF}{}_{EF}\bar{\Psi}^{EF}{}_{CD}\Phi_{AB}{}^{CD} = \frac{1}{4}\bar{C}_{aefb}\bar{C}^a{}_{cd}{}^b S^{cd}\tilde{C}^g{}_{ef}{}^h S^{ef} \quad (\text{C.11})$$

donde

- Φ_{ABAB} denota el espinor equivalente a S_{ab} ,

- Ψ_{ABCD} denota el espinor equivalente a C_{abcd} ,
- $\tilde{C}_{abcd} := \frac{1}{2}(C_{abcd} - i * C_{abcd})$ denota al tensor autodual de Weyl, y \bar{C}_{abcd} es su complejo conjugado.

Los invariantes R , r_1 , r_2 , r_3 , m_3 y m_4 son reales, mientras que w_1 , w_2 , m_1 , m_2 y m_3 son complejos. Así, el conjunto de invariantes dados es equivalente a un conjunto de 16 invariantes reales. La relación explícita entre los invariantes dados por Carminati y los dados por Géhéniau y Debever [114] están dadas en [113].

Bibliografía

- [1] A. Einstein Sitzungsber. Press. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl **142** [Traducción al inglés en *The principle of relativity* (Methuen, 1923 reprinted by Dover Publications), p. 177; y en Bernstein and Feinberg, 1986].
- [2] W. de Sitter, Mont. Not. R. Astron. Soc. **78**, 3 (1917) (reprinted in Bernstein and Feinberg, 1986).
- [3] V. M. Slipher, *The mathematical theory of relativity* 2nd Ed.(Cambridge University, London 1924) p.162.
- [4] A. Friedmann, Z. Phys. **21**, 326 (1924) [traducido al inglés en Bernstein and Feinberg, 1986, Eds. *Cosmological Constants* (Columbia University, New York)].
- [5] A. H. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981); A. Albrecht and P.J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48**, 120 (1982); A.D. Linde, Phys. Lett. B **129**, 389 (1982).
- [6] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
- [7] A. D. Dolgov, *In the very early univers*, Eds. G. W. Gibbons, S. W. Hawking and S. T. C. Siklos, Cambridge University Press, Cambridge 1983, p. 449.
- [8] S. Weinberg, *Critical Dialogues in Cosmology*, Princeton University, 1996.
- [9] P. H. Framptom, astro-ph/9901013.
- [10] P. H. Framptom, hep-th/9812227.
- [11] S. W. Hawking, Phys. Lett. B **134**, 403 (1984); S. Coleman, Nucl. Phys. B **307**, 867 (1988).

- [12] A. Vilenkin, Phys. Rev. D **30**, 509 (1984); A. Vilenkin, Phys. Rev. D **33**, 3560 (1986).
- [13] P. H. Frampton, Y.J. Ng and H. Van Dam, J. Math. Phys. **33**, 3881 (1992).
- [14] B. Carter, *in the International Astronomical Union Symposium 63: Confrontation of Cosmological Theories with Observational Data*, edited by M. S. Longair, p. 291, 1974.
- [15] E. I. Guendelman, gr-qc 9901017; E. I. Guendelman, gr-qc 9901067.
- [16] A. A. Penzias and R. W. Wilson, Ap. J. **142**, 419 (1965).
- [17] B. M. Bardeen, P. J. Steinhardt and M.S. Turner, Phys. Rev. D **28**, 679 (1983); A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B **117**, 175 (1982); A. H. Guth and S. Y. Pi, Phys. Rev. Lett. **49**, 1110 (1982); S. W. Hawking, Phys. Lett. B **115**, 295 (1982); A. H. Guth, Phys. Rev. D **28**, 347 (1981); A. D. Linde, Phys. Lett. B **108**, 389 (1982); A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982).
- [18] S. J. Perlmutter *et al* (The Supernova Cosmology Project), astro-ph/9608192; S. J. Perlmutter *et al* (The Supernova Cosmology Project), astro-ph/9712212.
- [19] F. Hoyle and W. A. Fowler, Ap. J. **132**, 565 (1960); W. D. Arnett, Astrophys. Space Sci. **5**, 280 (1969); S. Colgate and C. McKee, Ap. J. **157**, 623 (1969).
- [20] M. M. Phillips, Ap. J. **413**, L105 (1993).
- [21] S. J. Perlmutter, M. S. turner and M. White, astro-ph/991052;
- [22] L. Wang, R. R. Caldwell, J. P. Ostriker and P. J. Steinhardt, astro-ph/9901388.
- [23] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freedman, New York 1873), p. 411.
- [24] L. H. Ford, Phys. Rev. D **35**, 2339 (1987).
- [25] E. W. Kolb, M. J. Perry and T.P. Walker, Phys. Rev. D **33**, 869 (1986); E. Vayonakis, Phys. Lett. B **213**, 419 (1990); A. A. Coley, Astron. Atrophys. **233**,

- 305 (1990); Y. M. Cho, Phys. Rev. Lett. **68**, 3133 (1992); P. S. Wesson and J. Ponce de León, Astron. Astrophys. **294**, 1 (1995).
- [26] C. M. Will, Phys. Reports **113**, 345 (1992).
- [27] C. H. Brans and R. H. Dicke, Phys. Rev. **124**, 925 (1961).
- [28] P. Jordan, Nature **164**, 637 (1949).
- [29] P. Coles and F. Lucchin, *Cosmology, the origin and evolution of cosmic structures*, (John Wiley and Sons, England 1995).
- [30] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc A **165**, 199 (1938).
- [31] A. H. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [32] D. S. Salopek and J. R. Bond, Phys. Rev. D **42**, 3936 (1990); A. R. Liddle, P. Parsons and J. D. Barrow, Phys. Rev. D **50**, 7222 (1994).
- [33] A. D. Linde *Particle Physics and Uninflationary Cosmology*, Harwood Academic, Chur, Switzerland (1990).
- [34] A. D. Linde, Phys. Lett. B **259**, 38 (1991); A. D. Linde, Phys. Rev. D **49**, 748 (1994); E. J. Copeland, A. R. Liddle, D. H. Lyth, E. D. Stewart and D. Wands, Phys. Rev. D **49**, 6410 (1994).
- [35] J. R. Gott, Nature **295**, 304 (1982); M. Sasaki, T. Tanaka, K. Yamamoto and J. Yokoyama, Phys. Lett. B **317**, 510 (1993); M. Bucher, A. S. Goldhaber and N. turok, Phys. Rev. D. **52**, 3314 (1993); A. D. Linde and A. Mezhlumian, Phys. Rev. D **52**, 6789 (1995).
- [36] B. Witt, Phys. Lett B. **145**, 176 (1984); K. Maeda, Phys. Rev. D **39**, 3159 (1989); D. Wands, Class. Quant. Grav. **11**, 269 (1994).
- [37] A. R. Liddle, astro-ph/991124.
- [38] A. H. Guth and S. Y. Pi, Phys. Rev. D **32**, 1899 (1985).
- [39] A. Beesham, Gen. Rel. Grav. **26**, 159 (1994).

- [40] J. W. Moffat, *Phys. Lett. B* **357**, 526 (1995).
- [41] H. Haber, C. Kane and T. Sterling, *Nucl. Phys.* **493** (1979).
- [42] C. Santos and R. Gregory, gr-qc/9611065.
- [43] J. D. Barrow and P. Parson, *Phys. Rev. D* **55**, 1906 (1997).
- [44] E. W. Kolb, *Astrophys. J.* **344**, 543 (1989).
- [45] D. S. Lemons and W. Peter, *Astron. Astrophys.* **265**, 373 (1992).
- [46] C. H. Lineweaver, D. Barbosa, A. Blanchard and J. G. Bartlett, *Astron. Astrophys.* **322**, 365 (1997).
- [47] M. Tegmark, *Astrophys. J. Lett.* **464**, L35 (1996).
- [48] B. Chaboyer, P. Demarque, P. Kerman and L. M. Kraus, astro-ph/9706128.
- [49] M. Birkel and S. Sarkar, *Phys. Lett. B* **408**, 59 (1997).
- [50] V. Petrosian, E. E. Salpeter and P. Szekeres, *Astrophys. J.* **147**, 1222 (1967).
- [51] R. R. Allen, J. Dumoit and A. Mondragón, hep-th/9807141.
- [52] S. J. Kolitch and D. M. Eardley, gr-qc/9405016.
- [53] F. Hoyle and J. V. Narlikar, *Proc. Roy. Soc. London a* **273**, 1 (1963).
- [54] R. M. Wald, *Phys. Rev. D* **28**, 2118 (1983).
- [55] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
- [56] Y. Ng, *Int. J. Mod. Phys. D* **1**, 145 (1992).
- [57] M.P. Bronstein, *PhysZeit. der Sowjetunion* **3**, 73 (1933).
- [58] M. Özer and M. Taha, *Mod. Phys. Lett. A* **A13**, 571 (1998); K. Freese, F. Adams, J. Fieman and E. Mottola, *Nucl. Phys. B* **287**, 797 (1987); P.J.E. Peebles, *Astroph. J.* **325**, L17 (1988); B. Ratra and P.J.E. Peebles, *Phys. Rev. D* **37**, 3406 (1988); M. Reuter and C. Wetterich, *Phys. Lett. B* **188** 38 (1987).

- [59] W. Chen and Y.S. Wu, Phys. Rev. D **41**, 695 (1990).
- [60] J.C. Carvalho, J.A.S. Lima and I. Waga, Phys. Rev. D **46**, 2404 (1992).
- [61] S. Capozziello, R. de Ritis and A.A. Marino, Phys. Lett. **208A**, 214 (1995).
- [62] J. Matyjasek, Phys. Rev. D **51**, 4154 (1995).
- [63] M. Gasperini, Phys. Lett B **194**, 347 (1987).
- [64] A.M. Abdel, Phys. Rev. D **45**, 3497 (1992).
- [65] M. Endo and T. Fukui, Gen. Rel. Grav. **8**, 833 (1977).
- [66] V. Canuto, S.H. Hsieh and P.J. Adams, Phys. Rev. Lett. **39**, 429 (1977).
- [67] D. Kazanas, Astrophys. J. Lett. **241**, L59 (1980).
- [68] O. Bertolami, Il Nuovo Cimento **93B**, 36 (1986); M.S. Berman and M.M. Som, Int. J. Theor. Phys. **29**, 1411 (1990).
- [69] Y.K. Lau, Aust. J. Phys. **38**, 547 (1985).
- [70] J.L. Lopez and D.V. Nanopoulos, Mod. Phys. Lett. **A11**, 1 (1996).
- [71] S.G. Rajeev, Phys. Lett. **125B**, 144 (1983).
- [72] W.A. Hiscock, Phys. Lett. **166B**, 285 (1986).
- [73] M. Özer and M. Taha, Mod. Phys. Lett. **171B**, 363 (1986); R.G. Vishwakarma, Class. Quant. Grav. **14**, 945 (1997);
- [74] M.O. Calvao *et al*, Phys. Rev. D **45**, 3869 (1992); V. Méndez and D. Pavón, Gen. Rel. Grav. **28**, 679 (1996).
- [75] J.M. Overduin and P.S. Wesson and S. Bowyer, Astrophys. J. **404**, 1 (1993).
- [76] T.S. Olson and T.F. Jordan, Phys. Rev. D **35**, 3258 (1987).
- [77] D. Pavón, Phys. Rev. D **43**, 375 (1991).
- [78] M.D. Maia and G.S. Silva, Phys. Rev. D **50**, 7233 (1994).

- [79] V. Silveira and I. Waga, *Phys. Rev. D* **50**, 4890 (1994).
- [80] L.F.B. Torres and I. Waga, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **279**, 712 (1996).
- [81] V. Silveira and I. Waga, *Phys. Rev. D* **56**, 4625 (1997).
- [82] R.F. Sisteró, *Gen. Rel. Grav.* **23**, 1265 (1991).
- [83] D. Kalligas, P. Wesson and C.W.F. Everitt, *Gen. Rel. Grav.* **24**, 351 (1992).
- [84] A.I. Arbab and A.M. Abdel-Rahman, *Phys. Rev. D* **50**, 7725 (1994).
- [85] A. Beesham, *Phys. Rev. D* **48**, 3539 (1993).
- [86] P. Spindel and R. Brout, *Phys. Lett. B* **320**, 241 (1994).
- [87] I. Waga, *Astroph. J.* **414**, 436 (1993).
- [88] J.M. Salim and I. Waga, *Class. Quant. Grav.* **10**, 1767 (1993).
- [89] J.A.S. Lima and J.C. Carvalho, *Gen. Rel. Grav.* **26**, 909 (1994).
- [90] C. Wetterich, *Astron. Astrophys.* **30**, 321 (1995).
- [91] A.I. Arbab, *Gen. Rel. Grav.* **26**, 61 (1997).
- [92] J.A.S. Lima and J.M.F. Maia, *Phys. Rev. D* **49**, 5597 (1994); J.A.S. Lima and M. Trodden, *Phys. Rev. D* **53**, 4280 (1996).
- [93] D. Kalligas, P.S. Wesson and C.W.F. Everitt, *Gen. Rel. Grav.* **27**, 645 (1995).
- [94] J.W. Moffat, *Phys. Rev. D* **56**, 6264 (1997).
- [95] F. Hoyle, G. Buerbidge and J.V. Narlikar, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **286**, 173 (1997).
- [96] M.V. John and K.B. Joseph, *Class. Quant. Grav.* **14**, 1115 (1997).
- [97] E. Gunzig, R. Maartens and A. Nesteruk, *Class. Quant. Grav.* **15**, 923 (1998).
- [98] J. Overduin and F. Cooperstock, *Phys. Rev. D* **58**, 043506 (1998).
- [99] S. Capozziello and R. de Ritis, *Gen. Rel. Grav.* **29**, 1425 (1997).

- [100] R.D. Reasenberg *et al*, *Astrophys. J.* **234**, L219 (1979).
- [101] A. Liddle, A. Mazumdar, and J. Barrow, *Phys. Rev. D* **58** 027302+ (1998).
- [102] F. Dahia and C. Romero, gr-qc/9812001; M. Susperregi and A. Mazumdar, *Phys. Rev. D* **58**, 083512 (1998).
- [103] S. Perlmutter *et.al.*, astro-ph/9812133.
- [104] L.O. Pimentel and L.M. Díaz-Rivera, *Int. J. Mod. Phys A*, (to appear).
- [105] L.O. Pimentel and J. Stein-Schabes, *Phys. Lett. B* **216**, 27 (1989).
- [106] M. Sethi, A. Batra and D. Lohiya, astro-ph/9903084 .
- [107] C. Will, *Theory and experiment in gravitational physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1981).
- [108] H. Dehnen and O. Obregón, *Astrophys. Space Sci.* **17**, 338 (1972); V. Johri and K. Desikan, *Gen. Rel. Grav.* **26**, 1217 (1994).
- [109] C. Lineweaver, *Astrophys. J. Lett.* **505**, 69 (1998).
- [110] M.S. Turner, *Physica Scripta* **T36**, 167 (1991); M.S. Turner, *In the Critical Dialogues in Cosmology* (World Scientific, Singapore, 1997), p. 555; L. Krauss and M.S. Turner, *Gen. Rel. Grav.* **27** 1137 (1995); J.P. Ostriker and P.J. Steinhardt, *Nature* **377** 600 (1995).
- [111] M.S. Turner, in *Proceedings of type Ia Supernova: Theory and Cosmology, Chicago 1998* edited by J. Niemeyer and J. Truran (Cambridge University Press, Cambridge U.K. 1999).
- [112] B. Chaboyer *et. al.*, *Astrophys. J.* **494**, 96 (1998); L.M. Macri *et. al*, *Astrophys. J.* (to be published).
- [113] J. Carminati and R.G. McLenaghan, *J. Math. Phys.* **32**, 3135 (1991).
- [114] J. Géhéniau and R. Debever, *Bull. Cl. Sci. Acad. R. Belg.* **XLII**, 114 (1956).

COASTING COSMOLOGIES WITH TIME DEPENDENT COSMOLOGICAL CONSTANT

LUIS O. PIMENTEL* and LUZ M. DIAZ-RIVERA

*Departamento de Física, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,
A.P. 55-534, CP 09340, México D.F., Mexico*

Received 28 April 1998

Revised 16 June 1998

The effect of a time dependent cosmological constant is considered in a family of scalar-tensor theories. Friedmann–Robertson–Walker cosmological models for vacuum and perfect fluid matter are found. They have a linear expansion factor, the so-called coasting cosmology, the gravitational “constant” decreases inversely with time; that is these models satisfy the Dirac Hypotheses. The cosmological “constant” decreases inversely with the square of time, therefore we can have a very small value for it at present time.

1. Introduction

The renewed interest in the scalar-tensor theories of gravitation is caused by two main factors: Firstly, most of the unified theories, including super-string theories contain a scalar field (dilaton, size of the extra compact space in Kaluza–Klein theories) which play a similar role to the scalar field of the scalar-tensor theories. Secondly, the new scenario of extended inflation which solves the fine tuning problem of the old, new and chaotic inflation has a scalar field that slows the expansion rate of the universe, from exponential to polynomial, allowing the completion of the phase transition from the de Sitter phase to a radiation dominated universe, the graceful exit problem.

In this work we want to consider a family of scalar-tensor theories with a potential that is equivalent to a time dependent cosmological constant. Recently several authors^{1–12} have considered the cosmological consequences of a time varying cosmological constant. Most of them introduce the time dependence in an *ad hoc* manner. In this work we consider an equivalent problem in the well known general scalar-tensor theory of gravity where the time dependence can occur in a natural way, without any new assumption or modification of the theory.

*E-mail: loopr@xanum.uam.mx

2. Field Equations

We start our discussion with the action for the most general scalar-tensor theory of gravitation¹³

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R - \phi^{-1} \omega g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 2\phi \lambda(\phi)] + S_{NG}, \quad (1)$$

where $g = \det(g_{\mu\nu})$ G is Newton's constant, S_{NG} is the action for the nongravitational matter. We shall use the signature $(-, +, +, +)$. The arbitrary functions $\omega(\phi)$ and $\lambda(\phi)$ distinguish the different scalar-tensor theories of gravitation; $\lambda(\phi)$ is a potential function and plays the role of a cosmological constant, $\omega(\phi)$ is the coupling function of the particular theory. General relativity is the limit of this theory when $|\omega| \rightarrow \infty$ and $\lambda(\phi) \rightarrow 0$; and as it is well known, the solar system experiments imply that $|\omega| \geq 500$.

The explicit field equations are

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi T_{\mu\nu}}{\phi} + \lambda(\phi) g_{\mu\nu} + \omega \phi^{-2} \left(\phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{;\lambda} \phi^{;\lambda} \right) + \phi^{-1} (\phi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi), \quad (2)$$

$$\square \phi + \frac{1}{2} \phi_{;\lambda} \phi^{;\lambda} \frac{d}{d\phi} \ln \left(\frac{\omega(\phi)}{\phi} \right) + \frac{1}{2} \frac{\phi}{\omega(\phi)} \left[R + 2 \frac{d}{d\phi} (\phi \lambda(\phi)) \right] = 0, \quad (3)$$

where $G_{\mu\nu}$ is the Einstein tensor. The last equation can be substituted by

$$\square \phi + \frac{2\phi^2 d\lambda/d\phi - 2\phi \lambda(\phi)}{3 + 2\omega(\phi)} = \frac{1}{3 + 2\omega(\phi)} \left(8\pi T - \frac{d\omega}{d\phi} \phi_{;\mu} \phi^{;\mu} \right), \quad (3a)$$

where $T = T^\mu_\mu$ is the trace of the stress-energy matter tensor. The divergenceless condition of the stress-energy matter tensor is satisfied if the field equation (3) is satisfied (as is shown in appendix), therefore we shall consider Eqs. (2) and (3a) as our field equations.

In what follows we shall assume that $\omega(\phi) = \omega_0 = \text{constant}$, $\lambda(\phi) = c\phi^m$, $\phi = \phi_1 t^q$, with c , m and q constants (for recent results when ω is variable see Ref. 14). The field equations for this choice of ω and λ and with a perfect fluid for the matter content in the isotropic and homogeneous line element will be considered,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (4)$$

The field equations are

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{3k}{a^2} - c\phi^m = \frac{8\pi\rho}{\phi} + \left(\frac{\omega}{2} \right) \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right), \quad (5)$$

$$-2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{k}{a^2} + c\phi^m = \frac{8\pi p}{\phi} + \left(\frac{\omega}{2} \right) \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right), \quad (6)$$

$$\left[\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) \right] B = 2c(1 - m)\phi^m + \frac{8\pi(\rho - 3p)}{\phi}, \quad (7)$$

where $B = 3 + 2\omega$. In the next sections we show some exact solutions for these equations when the fluid is a barotropic one, $p = \varepsilon\rho$, including the vacuum case.

3. The Vacuum Solutions

In the case where we neglect all the nongravitational matter we have obtained the following solutions.

3.1. $k \neq 0$

$$a = a_1 t, \quad a_1 = \pm \sqrt{\frac{km^2}{2 + 2m + 2\omega - m^2}}, \quad (8)$$

$$\phi = \phi_1 t^{-2/m}, \quad c = \frac{2(3 + 2\omega)}{\phi_1^m m^2}, \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{t^2}, \quad \lambda_1 = \frac{2(3 + 2\omega)}{m^2} \quad (10)$$

where ϕ_1 and m are arbitrary constants. In order to have real a_1 , the values of ω are restricted in the following way,

$$\omega > \frac{m^2}{2} - m - 1, \quad \text{for } k = 1, \quad (11)$$

$$\omega < \frac{m^2}{2} - m - 1, \quad \text{for } k = -1.$$

The value of ϕ_1 can be related to present day observations if we recall that relation of ϕ at the present time,^{1,4}

$$\phi_0 = G_0^{-1} \frac{4 + 2\omega}{3 + 2\omega}, \quad (12)$$

and the definition of the Hubble constant,

$$H_0 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_0 = \frac{1}{t_0}, \quad (13)$$

(here t_0 is the age of the universe), we obtain the value of the constant ϕ_1 ,

$$\phi_1 = \frac{1}{H_0^{2/m} G_0} \frac{4 + 2\omega}{3 + 2\omega}. \quad (14)$$

3.2. $k = 0$ solutions

$$a = a_1 t, \quad (15)$$

$$\phi = \phi_1 t^{\frac{-2}{1 \pm \sqrt{3 + 2\omega}}}, \quad (16)$$

$$m = 1 \pm \sqrt{3 + 2\omega}, \quad c = \frac{2(m - 1)^2}{m^2 \phi_1^m}, \quad (17)$$

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{t^2}, \quad \lambda_1 = \frac{3 + 2\omega}{\omega + 2 \pm \sqrt{3 + 2\omega}} \quad (18)$$

here a_1 and ϕ_1 are arbitrary constants. The value of ϕ_1 for this case is determined in terms of present day values of G and the Hubble parameter, as above, to be

$$\phi_1 = \frac{1}{H_0^{2/(1+\sqrt{3+2\omega})} G_0} \frac{4+2\omega}{3+2\omega}. \quad (19)$$

4. Barotropic Equation of State

Assuming the equation of state $p = \varepsilon\rho$ we have from the conservation equation $\rho = s/a^{3(\varepsilon+1)}$; substituting into the field equations we obtain the following solution

$$\begin{aligned} a &= a_1 t, & \phi &= \phi_1 t^{-(1+3\varepsilon)}, \\ \rho &= \frac{s}{a^{3(1+\varepsilon)}}, \\ \lambda &= \frac{\lambda_1}{t^2}, & \lambda_1 &= \frac{a_1^2 [\omega(1+5\varepsilon+3\varepsilon^2-9\varepsilon^3) + 2(3\varepsilon+1)] + 2k(1+3\varepsilon)}{2(1+\varepsilon)a_1^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

where

$$\begin{aligned} c &= \frac{a_1^2 [\omega(1+5\varepsilon+3\varepsilon^2-9\varepsilon^3) + 2(3\varepsilon+1)] + 2k(1+3\varepsilon)}{2(1+\varepsilon)a_1^2 \phi_1^{\frac{2}{3\varepsilon+1}}}, \\ s &= \frac{a_1^{1+3\varepsilon} \phi_1}{8\pi(1+\varepsilon)} \{2k - a_1^2 [\omega(9\varepsilon^2+6\varepsilon+1) + 9\varepsilon^2+12\varepsilon+1]\}, \\ m &= \frac{2}{1+3\varepsilon} \end{aligned} \quad (21)$$

and

$$\phi_1 = \frac{1}{H_0^{(1+3\varepsilon)} G_0} \frac{4+2\omega}{3+2\omega}. \quad (22)$$

The above solution is not valid for $\varepsilon = -1$, that is for the equation of state that corresponds to the quantum vacuum. In the next section we consider this particular case.

5. Vacuum Fluid

Here we want to consider the case when $p = -\rho$, i.e. the well-known equation of state for the quantum vacuum. This case means that in addition to the contribution of the gravitational theory to the cosmological constant we have some other contribution(s) from the vacuum spectation value of some quantum fields. Therefore the effective cosmological constant is $\Lambda_{\text{eff}} = 8\pi\rho/\phi + c\dot{\phi}^m$.

For $\varepsilon = -1$ we have obtained the following solution,

$$a = a_1 t, \quad \phi = \phi_1 t^2, \quad \rho = \rho_0 = \text{const}, \quad \lambda = \frac{\lambda_1}{t^2} \quad (23)$$

is determined above, to be

$$(19)$$

ration equation following solution

$$(20)$$

$$+ 3\varepsilon),$$

$$(21)$$

$$(22)$$

quation of state we consider this

$$(23)$$

with

$$a_1 = \sqrt{\frac{k}{2\omega - 1}}, \quad c = \phi_1(6 + 4\omega) - 8\pi\rho_0, \quad (24)$$

$$\lambda_1 = 2 \frac{[\phi_1(2\omega + 3)] - 4\pi\rho_0}{\phi_1}, \quad m = -1.$$

The effective cosmological constant is

$$\Lambda_{\text{eff}} = \frac{8\pi\rho}{\phi} + c\phi^m = \frac{2(3 + 2\omega)}{t^2}. \quad (25)$$

We can see now that in this model regardless of how large is the contribution to the cosmological constant of the vacuum energy of quantum fields the gravitational contribution reduce the value of the effective cosmological constant to the present value of $\simeq 4\omega H_0^2$.

In this case ϕ_1 can also be related to the present value of the gravitational constant,

$$\phi_1 = \frac{H_0^2}{G_0} \frac{4 + 2\omega}{3 + 2\omega}. \quad (26)$$

6. Final Remarks

In this work we have presented a family of solutions to the general scalar-tensor theory of gravity with a potential which plays the role of a time dependent cosmological constant.

The time dependence of the cosmological constant in each obtained solutions has the form $\lambda \sim t^{-2}$. This dependence occurs in a natural way when we use a field potential $\phi \sim t^q$ and we limited to ourself to $a \approx t$ that guarantees a coasting period in which the solutions are true. This type of solutions in general relativity were studied some time ago,^{15,16} where the time dependence of λ is chosen *ad hoc*. The resulting age of the universe, $t_0 = 1/H_0$ is not in conflict with the observational determination.¹⁷⁻¹⁹ Some other astrophysical consequences of the models, like nucleosynthesis,²⁰ remain to be explored.

Acknowledgment

This work was partially supported by CONACyT GRANT 1861-E9212.

Appendix

In this appendix we show that the divergenceless condition is satisfied if the field equation (3) is satisfied.

We start our demonstration with the expression of the stress-energy matter tensor, which can be written from Eq. (2) as

$$8\pi T_{\nu}^{\mu} = \phi \left(R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} R \right) - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \left(\phi^{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} \phi_{;\lambda} \phi^{;\lambda} \right) - (\phi_{;\nu}^{\mu} - \delta_{\nu}^{\mu} \square \phi) - \lambda(\phi) \delta_{\nu}^{\mu} \phi, \quad (A.1)$$

taking the divergence of this last equation and rearranging terms, we get

$$\begin{aligned}
0 = & -\phi_{;\mu} \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} R - \frac{\omega(\phi)}{2\phi^2} \phi_{;\mu} \delta_{\nu}^{\mu} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} + \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \frac{1}{2\phi} \phi_{;\mu} \delta_{\nu}^{\mu} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} \\
& - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \phi^{;\mu}{}_{;\mu} \phi_{,\nu} + \frac{\omega(\phi)}{\phi} \phi^{;\mu} \phi_{,\nu;\mu} - \phi \frac{d\lambda(\phi)}{d\phi} \phi_{;\nu} \\
& - \lambda(\phi) \phi_{;\nu} + \phi_{;\mu} R_{\nu}^{\mu} + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \phi_{;\mu} \phi^{;\mu} \phi_{,\nu} \\
& - \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \frac{1}{\phi} \phi_{;\mu} \phi^{;\mu} \phi_{,\nu} + \frac{\omega(\phi)}{\phi} \phi_{,\lambda;\nu} \phi^{,\lambda} - \phi_{;\nu;\mu}^{\mu} + (\square\phi)_{;\nu}, \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

simplifying this last equation:

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{1}{2} \phi_{;\nu} R + \frac{1}{2} \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \phi_{;\nu} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} - \frac{d\omega(\phi)}{d\phi} \frac{1}{2\phi} \phi_{;\nu} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} \\
& - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \phi^{;\mu}{}_{;\mu} \phi_{,\nu} - \phi \frac{d\lambda(\phi)}{d\phi} \phi_{;\nu} - \lambda(\phi) \phi_{;\nu} \\
& + \phi_{;\mu} R_{\nu}^{\mu} - \phi_{;\nu;\mu}^{\mu} + (\square\phi)_{;\nu}. \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

Taking into account the identities $\phi_{;\mu} R_{\nu}^{\mu} = \square(\phi_{,\nu}) - (\square\phi)_{;\nu}$, in the previous equation, we have

$$0 = -\frac{\omega(\phi)}{\phi} \phi_{;\nu} \left[\square\phi + \frac{1}{2} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} \frac{d}{d\phi} \ln \left(\frac{\omega(\phi)}{\phi} \right) + \frac{1}{2} \frac{\phi}{\omega(\phi)} \left[R + 2 \frac{d}{d\phi} (\phi\lambda(\phi)) \right] \right]. \quad (\text{A.4})$$

This is the field equation (3) times the factor $-\frac{\omega(\phi)}{\phi} \phi_{;\nu}$, therefore if this field equation is satisfied, then the divergenceless condition is satisfied too and it is enough to use Eqs. (2) and (3a) as the field equations of our system from which we obtain Eqs. (5)–(7).

References

1. S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
2. Y. J. Ng, *Int. J. Mod. Phys.* **1**, 145 (1992).
3. J. C. Carvalho, J. A. S. Lima and I. Waga, *Phys. Rev.* **D46**, 2404 (1992).
4. V. Silveira and I. Waga, *Phys. Rev.* **D50**, 4890 (1994).
5. J. Matyjasek, *Phys. Rev.* **D51**, 4154 (1995).
6. D. Kalligas, P. Wesson and C. W. F. Everitt, *Gen. Relativ. Gravit.* **24**, 351 (1992).
7. A. Beesham, *Gen. Relativ. Gravit.* **26**, 159 (1994).
8. D. Kalligas, P. Wesson and C. W. F. Everitt, *Gen. Relativ. Gravit.* **27**, 645 (1995).
9. S. Capozziello and R. de Ritis, "A time dependent cosmological "constant"," astro-ph/9605070.
10. J. W. Moffat, *Phys. Lett.* **B357**, 526 (1995).
11. H. Haber, C. Kane and T. Sterling, *Nucl. Phys.* **493** (1979).
12. M. Özer and M. O. Taha, *Mod. Phys. Lett.* **A13**, 571 (1998).

we get

$$\lambda \phi^{\cdot\lambda}$$

$$|\phi|_{,\nu}, \quad (A.2)$$

$$\delta^{\nu\lambda}$$

$$(A.3)$$

, in the previous

$$(\phi \lambda(\phi)) \Big] \Big]. \quad (A.4)$$

refore if this field
fied too and it is
em from which we

(1992).

t. 24, 351 (1992).

t. 27, 645 (1995).
"constant", astro-

13. C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1981).
14. J. D. Barrow and P. Parsons, *Phys. Rev. D* **55**, 1906 (1997).
15. E. W. Kolb, *ApJ*. **344**, 543 (1989).
16. D. S. Lemons and W. Peter, *Astron. Astrophys.* **265**, 373 (1992).
17. C. H. Lineweaver, D. Barbosa, A. Blanchard and J. G. Bartlett, *Astron. Astrophys.* **322**, 365 (1997).
18. M. Tegmark, *ApJ. Lett.* **464**, L35 (1996).
19. B. Chaboyer, P. Demarque, P. Kerman and L. M. Kraus, "The age of globular clusters in light of Hipparcos: resolving the age problem," astro-ph/9706128.
20. M. Birkel and S. Sarkar, *Phys. Lett. B* **408**, 59 (1997).

Date: Fri, 2 Jul 1999 10:41:02 -0400 (EDT)
From: prd <prd@aps.org>
To: lmdr@abaco.uam.mx
Subject: dd7255 Diaz-Rivera, L

Dear Dr. Diaz-Rivera:

Your paper is being accepted for publication in Physical Review D. The formal notice of acceptance is being sent by postal mail.

Sincerely,

D. Nordstrom
Editor
Physical Review D

***** Manuscript *****

DD7255 D15-1
Cosmological models with a dynamical Λ in scalar-tensor theories
Diaz-Rivera, L.M./Pimentel, L.O.

Cosmological models with dynamical Λ in scalar-tensor theories.

L. M. Díaz-Rivera and L. O. Pimentel

Department of Physics,

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

Apdo. Postal 55-534, 09340 México, D.F., México

(June 8, 1999)

In the context of a family of scalar-tensor theories with a dynamical Λ , that is a binomial on the scalar field, the cosmological equations are considered. A general barotropic state equation $p = (\gamma - 1)\rho$, for a perfect fluid is used for the matter content of the Universe. Some Friedmann-Robertson-Walker exact solutions are found, they have scale factor which shows exponential or power law dependence on time. For some models the singularity can be avoided. Cosmological parameters as Ω_m , Ω_Λ , q_0 and t_0 are obtained and compared with observational data.

I. INTRODUCTION

Unification theories have a nonzero cosmological constant that is about 120 orders of magnitude larger than the observed value for Λ , this constitutes the cosmological constant problem [1]- [2]. In order to explain and solve such a problem, and to make compatible the actual observational data with the inflationary scenario and particle physics expectations, a time dependent cosmological constant was proposed [3]. This old idea has received a lot of attention (see e.g. [4]- [43]). What people have in mind is to make the vacuum energy dynamical. In such a way, during the evolution of the universe, the energy density of the vacuum decays into particles, thus leading to the decrease of the cosmological constant, obtaining as a result, although small, a creation of particles.

A broad summary of cosmological models with time dependent cosmological “constant” is given by Overduin and Cooperstock [44], re-examining there, the evolution of the scale factor when λ is given as function of t , $a(t)$, H , or q . A fairly general equation of state is considered and new numerical solutions are obtained, but as in most of the previous works, the time dependence of the cosmological term is introduced *ad hoc*.

An alternative is an effective time dependent cosmological “constant” in the context of a scalar-tensor theories, which becomes a true constant for $t \gg 0$ [45]. Using Jordan-Brans-Dicke theory (JBD) in particular, the “graceful exit” problem of old inflationary cosmology might be improved. It remains the problem of determining the JBD parameter ω , that according to solar system experiments its value is $\|\omega\| \approx 500$, which has been derived from timing experiments using the Viking space probe [46]. A better estimation of this parameter should be obtained from measure of others cosmological parameters in order to constrain ω more strongly than by means of solar system experiments [47]. However, theories of very early universe as string theory, are better described in the context of JBD, and shows that ω can take negative values [48].

Thus, scalar-tensor theories, and in particular JBD, are better theories, in order to get, in a natural way, a time dependent cosmological constant. Clearly, recent observational results restrict this kind of theory, e.g. the type Ia super nova (SN Ia) results, which in 1998 show that $\Omega_\Lambda \sim 0.6$ [49] implying that our universe is speeding up. Thus, a model which attempts to describe the cosmological constant behavior, should take into account the observational evidences.

In a recent work [50] we investigated the effect of a time dependent cosmological constant, in a family of scalar-tensor theories. There, we get cosmological models in the coasting period, where the time dependence on the cosmological constant occurs in a natural way. In such a models we assumed a simple relation $\lambda(\phi) = c\phi(t)^n$, (with c and n constants).

The existence of inflationary phase in scalar-tensor theories (STT) has been investigated by Pimentel and Stein-Schabes [51], finding inflationary phases for a polynomial cosmological constant in a general STT, which includes Brans-Dicke model with non-zero cosmological constant. On the other hand, Guendelman [52] has investigated the requirements of the potentials in order to have scale invariance. There was found the form of the potential needed by the global invariance, which in addition, its energy in the conformal Einstein frame has the characteristics for a suitable inflationary universe and Λ decaying scenario for the late universe.

Motivated by these ideas, we shall consider a general STT as in our previous work [50], but now we shall consider a binomial λ function on $\phi(t)$, in order to obtain exact solutions of the field equations, from which we obtain some kind of inflationary cosmological models and related cosmological parameters. In fact, we obtain in most of our solutions, a

power law growth for the cosmological scale factor $a(t) \sim t^\sigma$, where $\sigma \gtrsim 1$ implies inflationary models. As it is known, this is a generic feature of a class of models that attempt dynamically to solve the cosmological constant problem. In our models σ is a free parameter (at least in most of our models), in order to be adjusted by physical conditions and to be in agreement with recent data for SN Ia, that implies $\sigma \approx 1$, and which is consistent with the nucleosynthesis [53].

Most of our solutions predict an accelerated expansion, such solutions are in agreement with the SN Ia results, but Ω_m and Ω_Λ , depend on free parameters of our model. In some specific cases we get solutions with exponential growth of the scale factor.

In section II we obtain the field equations and introduce our main ansatz. Section III is devoted to obtain an expression of the density parameter and the corresponding contributions of the matter and scalar field. In section IV we consider the vacuum case and obtain a set of exact solutions as well as cosmological parameters. In section V we consider the general case of a barotropic equation of state and obtain exact solutions for this general case. As example, we calculate specifically the case of a dust fluid and a stiff matter fluid. Also, we get and discuss the solutions of the radiation case in section VI and false vacuum case in section VII. Finally in section VIII we summarize our results.

II. FIELD EQUATIONS

We start with the action for the most general scalar-tensor theory of gravitation [54]

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R - \phi^{-1} \omega g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 2\phi \lambda(\phi)] + S_{NG}, \quad (2.1)$$

where $g = \det (g_{\mu\nu})$, G is Newton's constant, S_{NG} is the action for the non-gravitational matter. We use the signature $(-, +, +, +)$. The arbitrary functions $\omega(\phi)$ and $\lambda(\phi)$ distinguish the different scalar-tensor theories of gravitation; $\lambda(\phi)$ is a potential function and plays the role of a cosmological constant, $\omega(\phi)$ is the coupling function of the particular theory.

The explicit field equations are

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi T_{\mu\nu}}{\phi} + \lambda(\phi) \square g_{\mu\nu} + \omega \phi^{-2} (\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda}) + \phi^{-1} (\phi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi), \quad (2.2)$$

$$\square \phi + \frac{1}{2} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} \frac{d}{d\phi} \ln \left(\frac{\omega(\phi)}{\phi} \right) + \frac{1}{2} \frac{\phi}{\omega(\phi)} \left[R + 2 \frac{d}{d\phi} (\phi \lambda(\phi)) \right] = 0, \quad (2.3)$$

where $G_{\mu\nu}$ is the Einstein tensor. The last equation can be substituted by

$$\square \phi + \frac{2\phi^2 d\lambda/d\phi - 2\phi \lambda(\phi)}{3 + 2\omega(\phi)} = \frac{1}{3 + 2\omega(\phi)} \left(8\pi T - \frac{d\omega}{d\phi} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} \right), \quad (2.4)$$

where $T = T^\mu_\mu$ is the trace of the stress-energy tensor. In a previous work [50] was demonstrated that the divergenceless condition of the stress-energy matter tensor is satisfied if the field equation (2.3) is satisfied too, although our field equations are given by Eqs. (2.2) and (2.4).

In what follows we shall assume $\omega(\phi) = constant$, $\lambda = \lambda(\phi)$. The corresponding field equations with a perfect fluid for the matter content in the isotropic and homogeneous line element

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.5)$$

will be considered. Thus the field equations are

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{3k}{a^2} - \lambda(\phi) - \frac{8\pi \rho}{\phi} - \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + 3 \frac{\dot{a} \dot{\phi}}{a \phi} = 0, \quad (2.6)$$

$$-2 \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{k}{a^2} + \lambda(\phi) - \frac{8\pi p}{\phi} - \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - \frac{\ddot{\phi}}{\phi} - 2 \frac{\dot{a} \dot{\phi}}{a \phi} = 0, \quad (2.7)$$

$$\left[\frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 3 \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} \right] (3 + 2\omega) - 2 \left(\lambda - \phi \frac{d\lambda}{d\phi} \right) - \frac{8\pi}{\phi} (\rho - 3p) = 0. \quad (2.8)$$

Where we have assumed $\phi = \phi(t)$, and the derivatives respect t are denoted by a dot.

Assuming a barotropic equation of state $p = (\gamma - 1)\rho$ and transforming to the time τ defined as

$$\tau = \int \phi^{1/2} dt, \quad (2.9)$$

the set of equations (2.6)-(2.8) are rewritten in the following way

$$3 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 + \frac{3k}{a^2\phi} - \frac{\lambda(\phi)}{\phi} - \frac{8\pi\rho}{\phi^2} - \frac{\omega}{2} \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 + 3 \frac{a'\phi'}{a\phi} = 0, \quad (2.10)$$

$$-2 \frac{a''}{a} - \frac{\phi''}{\phi} - \left(\frac{a'}{a} \right)^2 - \frac{1}{2} (1 + \omega) \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - 3 \frac{a'\phi'}{a\phi} - \frac{k}{a^2\phi} + \frac{\lambda(\phi)}{\phi} - \frac{8\pi\rho(\gamma - 1)}{\phi^2} = 0, \quad (2.11)$$

$$(3 + 2\omega) \left[\frac{\phi''}{\phi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 + 3 \frac{a'\phi'}{a\phi} \right] - 2 \left(\frac{\lambda(\phi)}{\phi} - \frac{d\lambda(\phi)}{d\phi} \right) - \frac{8\pi\rho(4 - 3\gamma)}{\phi^2} = 0, \quad (2.12)$$

where the derivatives respect to τ are denoted by a prime.

In what follows we shall consider two important assumptions:

$$a\phi^m = \alpha, \quad (2.13)$$

$$\lambda(\phi) = \lambda_1\phi^{n_1} + \lambda_2\phi^{n_2}, \quad (2.14)$$

where m , α , λ_1 , λ_2 , n_1 and n_2 are constants. The first assumption is a very well known one (see e.g. [55] and reference therein), and it has been used as a condition for the deceleration parameter to be constant for flat models in Brans-Dicke theory. Furthermore, with this condition our field equations simplify notoriously and allows us to obtain exact solutions. The second condition is the main assumption of the present work which is motivated by the cosmological no-hair theorem for scalar-tensor theories [51], in order to study inflationary solutions in a theory of gravitation with a naturally dynamical cosmological constant. In this work we always work in the Jordan frame, where G is variable, however we could make a conformal transformation to the Einstein frame where G is constant and we have General Relativity plus a minimally coupled scalar field, then our potential becomes an exponential one, i.e., $V_1 + V_2 \sim \exp(\epsilon n_1 \phi_c) + \exp(\epsilon n_2 \phi_c)$ (where ϵ is a constant and ϕ_c is a canonically defined scalar field). This is the type of potential according to Guendelman [52], that is necessary to have scale invariance in a theory of gravitation free of the cosmological constant problem, that is, one with an early expanding phase and a Λ -decaying for late times. Details of the conformal transformation for STT can be seen in Ref. [51]. With these assumptions, from equations (2.10)-(2.12) we get

$$\left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 \left[3m^2 - 3m - \frac{\omega}{2} \right] + \frac{3k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} - \lambda_1 \phi^{n_1-1} - \lambda_2 \phi^{n_2-1} - \frac{8\pi\rho}{\phi^2} = 0, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\phi''}{\phi} (2m - 1) + \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 \left[-3m^2 + m - \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2} \right] - \frac{k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} + \lambda_1 \phi^{n_1-1} + \\ \lambda_2 \phi^{n_2-1} - \frac{8\pi\rho(\gamma - 1)}{\phi^2} = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\phi''}{\phi} (3 + 2\omega) + \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 (3 + 2\omega) \left(\frac{1}{2} - 3m \right) - 2\lambda_1 \phi^{n_1-1} - 2\lambda_2 \phi^{n_2-1} + \\ 2\lambda_1 n_1 \phi^{n_1-1} + 2\lambda_2 n_2 \phi^{n_2-1} \frac{8\pi\rho(4 - 3\gamma)}{\phi^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

In the following sections we shall find exact solutions on different cases, as well as cosmological parameters which allow us to compare with actual observations of today value of Hubble parameter H_0 , the actual value of deceleration parameter q_0 , the density parameter Ω_m as well as the value of the vacuum energy density parameter Ω_Λ .

III. THE DENSITY PARAMETER

Before we compute exact solutions of the set of field equations (2.15)- (2.17), we shall get a general equation for Ω_m and Ω_ϕ , according to our proposed model. Assuming $k = 0$, Eq.(2.6) is written as

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2} \left[\frac{\lambda(\phi)}{8\pi G} + \frac{\rho}{G\phi} + \frac{\omega}{16\pi G} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - \frac{3H}{8\pi G} \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right]. \quad (3.1)$$

Defining

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{8\pi \rho_m}{3H^2} \frac{1}{\phi}, \\ \Omega_\phi &= \frac{1}{3H^2} \left[\lambda(\phi) + \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 - 3H \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

then we get

$$1 = \Omega_m + \Omega_\phi. \quad (3.3)$$

Taking into account the proposed relation (2.13), we get

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{8\pi \rho_m}{3m^2} \frac{1}{\phi} \left(\frac{\phi}{\dot{\phi}} \right)^2, \\ \Omega_\phi &= \frac{1}{3m^2} \left(\frac{\phi}{\dot{\phi}} \right)^2 \lambda(\phi) + \frac{\omega}{6m^2} + \frac{1}{m}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

According to the SN Ia observations [49], the favored value of $\Omega_m \sim 0.4 \pm 0.1$ is given as a constrain to a cosmological constant

$$\Omega_\Lambda = \frac{4}{3}\Omega_m + \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}, \quad (3.5)$$

this implies $\Omega_\Lambda \sim 0.85 \pm 0.2$. It means that the SN Ia results are sensitive to the acceleration of the expansion, and constrain $4\Omega_m/3 - \Omega_\Lambda$, which corresponds to the acceleration parameter at the median redshift of this objects, $z \sim 0.4$. Then the combination $\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_\Lambda$ is constrained by the microwave background radiation (CBR) anisotropy. So that, $\Omega_0 \sim 1 \pm 0.2$ obtained from COBE and other measurements (see e.g., [56]), and together with $\Omega_m \sim 0.4$, define a concordance region for $\Omega_\Lambda \sim 0.6$, becoming the best fit for the universe model [57].

In what follows, we shall compute both parameters of density in addition to the exact solutions of our field equations, in the different cases which we consider in this work.

IV. THE VACUUM CASE

Considering a vacuum case ($\rho = 0$), we get from Eqs. (2.15)-(2.17) the corresponding set of equations

$$\left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 \left[3m^2 - 3m - \frac{\omega}{2} \right] + \frac{3k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} - \lambda_1 \phi^{n_1-1} - \lambda_2 \phi^{n_2-1} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\phi''}{\phi} (2m-1) + \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 \left[-3m^2 + m - \frac{\omega}{2} - \frac{1}{2} \right] - \frac{k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} + \lambda_1 \phi^{n_1-1} + \lambda_2 \phi^{n_2-1} = 0, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\phi''}{\phi} (3+2\omega) + \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 (3+2\omega) \left(\frac{1}{2} - 3m \right) - 2\lambda_1 \phi^{n_1-1} - 2\lambda_2 \phi^{n_2-1} + 2\lambda_1 n_1 \phi^{n_1-1} + \\ 2\lambda_2 n_2 \phi^{n_2-1} = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Naturally for vacuum, the energy density is due to the contribution of the scalar field $\phi(t)$: $\Omega_\phi = 1$. We found exact solutions of this set of equations in the following cases:

1. $k = 0$

- $m = 1/2$ This solution is not relevant for our purpose because $\lambda(\phi)$ becomes null.
- $m = 2/3$

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi_1 t^{1/2} \\ a(t) &= a_1 t^{-1/3} \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t)^{-4}, \\ \omega &= -7/3,\end{aligned}\tag{4.4}$$

where $\phi_1 = \sqrt{2c_1}$, $a_1 = \alpha(2c_1)^{-1/3}$, $\lambda_1 = c_1^2/2$, $\lambda_2 = 0$, and c_1 is an integration constant. This solution was written directly in terms of time t , according to (2.9). Here the expansion factor is decaying with the time, in conflict with observations, and ω has a negative values. A discussion of the meaning of negative values of ω is given in [48].

The Ricci scalar for this case is given by the following expression

$$\mathfrak{R} = \frac{10}{3} t^{-2},\tag{4.5}$$

where we can see that there is an initial singularity. The today deceleration parameter has a negative value, i.e., the present solution is an accelerated cosmological model

$$q_0 = -4, \quad H_0 = -\frac{1}{3} t_0^{-1},\tag{4.6}$$

according to this solution, the actual Hubble parameter has negative values, then we conclude that this model has not physical meaning.

- $m \neq 1/2, 2/3$

On this case we get two families of solutions:

(a) $\omega \neq \frac{3m^2+m-2}{2-3m}$.

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi_1 t^{2\sigma}, \\ a(t) &= a_1 t^{-2m\sigma}, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t)^{-\frac{1}{\sigma}},\end{aligned}\tag{4.7}$$

where

$$\begin{aligned}\mu &\neq -2\nu, \\ \sigma &= \mu/(\mu + 2\nu), \\ a_1 &= \alpha\phi_1^{-m}, \\ \phi_1 &= [c'^{1+\frac{\mu}{\nu}}(\mu + 2\nu)/2]^{\frac{2\mu}{\mu+2\nu}}, \\ \lambda_1 &= (3m^2 - 3m - \omega/2)\mu^2 c'^{2(1+\frac{\mu}{\nu})}, \quad \lambda_2 = 0, \\ \mu &\equiv 12m^2 - 14m + 4, \\ \nu &\equiv -12m^2 + 5m + 4\omega - 6m\omega + 2,\end{aligned}\tag{4.8}$$

and c' is an integration constant. According to the solution of the present case, λ is a monomial function on $\phi(t)$, although a time decaying one. Clearly the present solution requires $m\sigma < 0$ in order to be expanding.

On the other hand, the Ricci scalar is given by

$$\mathfrak{R} = 12m\sigma(4m\sigma + 1)t^{-2}.\tag{4.9}$$

According to this expression, the corresponding solution for the curvature scalar has an initial singularity. For this model, the present deceleration and Hubble parameter, are

$$q_0 = -1 - \frac{1}{2m\sigma}, \quad H_0 = -2m\sigma (t_0)^{-1}, \quad t_0 = \frac{1}{H_0} 2m \|\sigma\|. \quad (4.10)$$

From these last equations we can see that the present model expands with acceleration if $m\sigma < -1/2$. On the other hand, assuming $H_0 \sim 65 \pm 5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [59], we get $t_0 \sim 15.05 \pm 1.96 \|\sigma\| \text{ Gy}$, then the estimated age from this model is small compared with actual accepted values of t_0 .

(b) $\mu = -2\nu \implies \omega = \frac{3m^2+m-2}{2-3m}$.

For this particular relation between ω and m , we get the following solution

$$\begin{aligned} \phi(t) &= c' \exp[\phi_2 t], \\ a(t) &= a_2 \exp[-m\phi_2 t], \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t), \end{aligned} \quad (4.11)$$

where $\phi_2 = c'^{1/2}\mu$, $a_2 = \alpha c'^{-m}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = 4c'(3m^2 - 3m - \omega/2)\nu^2$ and c' is an integration constant. In this case we get an inflationary exponential solution provided that $m\phi_2 < 0 \implies m < 0$ or $1/2 < m < 2/3$. This model is non-singular, as we can see from the Ricci scalar

$$\mathfrak{R} = 24c' m^2 (6m^2 - 7m + 2). \quad (4.12)$$

The present deceleration and Hubble parameters are given by

$$q_0 = -1, \quad H_0 = c' m (12m^2 - 14m + 4), \quad (4.13)$$

thus, this model expands with constant acceleration from a non-singular state, and with constant Hubble parameter.

2. $k \neq 0$

- $m = 1/2$

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_1 t^{-2}, \\ a(t) &= a_1 t, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t), \end{aligned} \quad (4.14)$$

where

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \alpha^2 \frac{3+2\omega}{k}, & a_1 &= \left(\frac{k}{3+2\omega} \right)^{1/2}, \\ \lambda_1 &= \frac{2k}{\alpha^2}, & \lambda_2 &= 0. \end{aligned}$$

According to this solution, $a(t)$ grows linearly with the time at a constant rate. The cosmological “constant” λ decreases with the time. In order to have a real $a(t)$, we must have $k/(3+2\omega) > 0$. This is a coasting cosmological solution which has initial singularities as it is shown from the corresponding Ricci scalar

$$\mathfrak{R} = 12(3+2\omega) t^{-2}. \quad (4.15)$$

On the other hand, as we have said, the today deceleration parameter becomes null, and the Hubble parameter is given by

$$q_0 = 0, \quad H = t_0^{-1}, \quad (4.16)$$

then, $t_0 = 1/H_0 \sim 15.05 \text{ Gy}$, in relative agreement with actual observations.

V. EXACT SOLUTIONS FOR THE CASE WITH A BAROTROPIC EQUATION OF STATE

In what follows we shall consider $\rho \neq 0$, so that returning to the set of equations (2.15)-(2.17), we get from Eq. (2.15)

$$\frac{8\pi\rho}{\phi^2} = \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[3m^2 - 3m - \frac{\omega}{2}\right] + \frac{3k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} - \lambda_1 \phi^{n_1-1} - \lambda_2 \phi^{n_2-1}. \quad (5.1)$$

Using this expression in equations (2.16) and (2.17), the set of field equations are reduced to the following two field equations

$$\begin{aligned} & \frac{\phi''}{\phi} (2m-1) + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[-2m - \omega - \frac{1}{2} - \gamma \left(3m^2 - 3m - \frac{\omega}{2}\right) \right] + \\ & \frac{(2-3\gamma)k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} + \gamma(\lambda_1 \phi^{n_1-1} + \lambda_2 \phi^{n_2-1}) = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\phi''}{\phi} (3+2\omega) + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[-12m^2 + 3m - 6\omega m + 3\omega + \frac{3}{2} + 3\gamma \left(3m^2 - 3m - \frac{\omega}{2}\right) \right] \\ & + 3(3\gamma-4) \frac{k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} + (2-3\gamma)(\lambda_1 \phi^{n_1-1} + \lambda_2 \phi^{n_2-1}) + 2(\lambda_1 n_1 \phi^{n_1-1} + \lambda_2 \phi^{n_2-1}) = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

From equation (5.2) with $\gamma \neq 0$ (the false vacuum case will be consider in section VII), we have

$$\begin{aligned} \lambda_1 \phi^{n_1-1} + \lambda_2 \phi^{n_2-1} = & \frac{1-2m}{\gamma} \frac{\phi''}{\phi} - \frac{1}{\gamma} \left[-2m - \omega - \frac{1}{2} - \gamma \left(3m^2 - 3m - \frac{\omega}{2}\right) \right] \frac{\phi'^2}{\phi^2} - \\ & \frac{(2-3\gamma)k}{\gamma\alpha^2} \phi^{2m-1}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Using this expression and its derivative in Eq. (5.3) we get the following equation

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\gamma} (1-2m) \frac{\phi'''}{\phi} \frac{\phi}{\phi'} + \frac{\phi''}{\phi} \left[\frac{4}{\gamma} (m + \omega + 1) + 6m(2m-1) \right] + \\ & \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[-12m^2 - 3m - 6m\omega \right] + \frac{k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} \left[12m - \frac{4}{\gamma} (2m+1) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

In order to solve this differential equation, we shall consider the value $m = 1/2$, so that equation (5.5) is reduced to the following one

$$\frac{\phi''}{\phi} - \frac{3\gamma}{4} \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 + \frac{3\gamma-4}{3+2\omega} \frac{k}{\alpha^2} = 0. \quad (5.6)$$

From this differential equation we have the two possible cases: $k = 0$ and $k \neq 0$. The case $\gamma = 4/3$ will be consider in section VI.

1. For $k = 0$ we get the following solution which we write in terms of time t as

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_1 t^\sigma, \\ a(t) &= a_1 t^{-\sigma/2}, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t)^{-2/\sigma}, \\ \rho &= \rho_1 a(t)^{-3\gamma}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

where

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= c_1 \left[-\frac{3\gamma-2}{3\gamma-4} c_1^{1/2} \right]^{\frac{4}{2-3\gamma}}, \\
\sigma &= \frac{4}{2-3\gamma}, \\
a_1 &= \frac{\alpha}{c_1^{1/2}} \left[-\frac{3\gamma-2}{3\gamma-4} c_1^{1/2} \right]^{\frac{2}{3\gamma-2}}, \\
\rho_1 &= \frac{1}{\pi} \frac{1-2\omega}{\gamma(4-3\gamma)^2} c_1^{2-\frac{3\gamma}{2}}, \alpha^{3\gamma} \\
\lambda_1 &= \left[\omega \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{3}{2} \right) \right] \left(-\frac{4}{4-3\gamma} \right)^2 c_1^{2-\frac{3\gamma}{2}}, \quad \lambda_2 = 0,
\end{aligned}$$

and c_1 is an integration constant. From this solution the expansion condition is $\sigma < 0 \implies \gamma > 2/3$.

In this case, the Ricci scalar and deceleration and Hubble parameters are given by the following expressions

$$\mathfrak{R} = 36 \frac{(2-\gamma)}{(3\gamma-2)^2} \frac{1}{t^2}, \quad (5.8)$$

$$q_0 = \frac{3}{2}\gamma - 2, \quad H_0 = \frac{2}{3\gamma-2} \frac{1}{t_0}, \quad \implies t_0 = \frac{2}{3\gamma-2} \frac{1}{H_0}. \quad (5.9)$$

Causality requires $0 \leq \gamma \leq 2$, so that this is an accelerated model for $\gamma < 4/3$, just at $\gamma = 4/3$, $q_0 = 0$. On the other hand, $t_0 \sim 1/H_0 \sim 15.05$ Gy for $\gamma \sim 4/3$. Then this is a kind of solution where the cosmic expansion is driven by the big-bang impulse.

The energy density parameter and the contribution of the scalar field $\phi(t)$ are given as follow

$$\begin{aligned}
\Omega_m &= \frac{2}{3\gamma} - \frac{4\omega}{3\gamma}, \\
\Omega_\phi &= \frac{4\omega}{3\gamma} - \frac{2}{3\gamma} + 1.
\end{aligned} \quad (5.10)$$

In order to have a positive values of Ω_m , $\omega < 1/2$ is required, including negative values of ω . On the other hand, $\Omega_m \sim 0.4 \pm 0.1$, and $0 \leq \gamma \leq 2$, from our equations for Ω_m and Ω_ϕ , we get a restriction for ω : $-0.1 \leq \omega \leq 1/2$.

2. Considering now the case $k \neq 0$ from Eq. (5.6), we get the following solution in terms of the parameter τ :

- for $\frac{k}{3+2\omega} > 0$

$$\phi(\tau) = c_1 \left[\cosh(\beta\tau) \right]^\sigma, \quad k \neq 0, \gamma \neq 0, 4/3 \quad (5.11)$$

where now $\sigma = \frac{4}{4-3\gamma}$, $\beta = \frac{(3\gamma-4)}{2\alpha} \sqrt{\frac{k}{3+2\omega}}$, and c_1 is an integration constant. According to Eq. (2.13) we get

$$a(\tau) = a_1 \left[\cosh(\beta\tau) \right]^{-\frac{\sigma}{2}}, \quad k \neq 0, \gamma \neq 0, 4/3 \quad (5.12)$$

The Ricci scalar on this case is given by

$$\mathfrak{R} = r_1(r_2 + r_3) \cosh^\sigma[\beta\tau] - r_1 r_2 \cosh^{\sigma-2}[\beta\tau]. \quad (5.13)$$

where $a_1 = \alpha c_1^{-1/2}$, $r_1 = \frac{3c_1}{\alpha^2} \frac{k}{3+2\omega}$, $r_2 = 3(2+\gamma)$, and $r_3 = 3\gamma + 2 + 4\omega$. In order to know the singularities of this solution, we calculate the nonzero curvature invariant [60], which for this case, are given by

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{3}{4} \left[\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{k}{a^2} \right]^2, \\
R_2 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} R_1^{3/2}, \\
R_3 &= \frac{7}{12} R_1^2,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

then, it is enough to calculate R_1 :

$$\begin{aligned}
R_1 &= s_1(s_2 - s_3)^2 \cosh^{2\sigma-4} [\beta\tau] + s_1(s_3 + s_4)^2 \cosh^{2\sigma} [\beta\tau] + \\
& 2s_1(s_2 - s_3)(s_3 + s_4) \cosh^{2\sigma-2} [\beta\tau].
\end{aligned} \tag{5.15}$$

where

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{3}{4} \frac{c_1^2}{\alpha^4(3+2\omega)^2}, \\
s_2 &= k \left(2 - \frac{3}{2}\gamma \right), \\
s_3 &= k, \\
s_4 &= k(3+2\omega).
\end{aligned}$$

From equation (5.13), $\mathfrak{R} \rightarrow \infty$ provided that $\tau \rightarrow \pm\infty$, and at least one exponent is positive, i.e., $\sigma > 0$ or $\sigma > 2$. On the other hand, from the curvature invariant, Eq. (5.15), $R_1 \rightarrow \infty$ requires that $\tau \rightarrow \pm\infty$, and $\sigma > 2$ ($\gamma > 2/3$), $\sigma > 0$ ($\gamma < 4/3$) or $\sigma > 1$ ($\gamma > 0$). So that the solutions of this case, are singular for $0 < \gamma < 4/3$, and $\tau \rightarrow \pm\infty$.

- for $\frac{k}{3+2\omega} < 0$

$$\phi(\tau) = c_1 \left[\cos(\beta\tau) \right]^\sigma, \quad k \neq 0, \gamma \neq 0, 4/3 \tag{5.16}$$

$$a(\tau) = a_1 \left[\cos(\beta\tau) \right]^{-\frac{\sigma}{2}}, \quad k \neq 0, \gamma \neq 0, 4/3 \tag{5.17}$$

where σ and a_1 are defined as in the paragraph under equation (5.11) and (5.13). In this case, $\beta = \frac{3\gamma-4}{2\alpha} \sqrt{\left\| \frac{k}{3+2\omega} \right\|}$.

$$\mathfrak{R} = r_1(r_3 - r_2) \cos^\sigma [\beta\tau] + r_1 r_2 \cos^{\sigma-2} [\beta\tau], \tag{5.18}$$

where now

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{3c_1}{\alpha^2} \left\| \frac{k}{3+2\omega} \right\|, \\
r_2 &= 3(2-\gamma), \\
r_3 &= (4-3\gamma) + 2\left\| 3+2\omega \right\|.
\end{aligned}$$

According to (5.14), as in the previous case, we need to calculate R_1 only, which for this case is given by

$$\begin{aligned}
R_1 &= s_1(s_2 + s_3)^2 \cos^{2\sigma-4} [\beta\tau] + s_1(s_4 - s_3)^2 \cos^{2\sigma} [\beta\tau] + \\
& 2s_1(s_2 + s_3)(s_4 - s_3) \cos^{2\sigma-2} [\beta\tau],
\end{aligned} \tag{5.19}$$

where

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{3}{4} \frac{c_1^2}{\alpha^4 |3+2\omega|^2}, \\
s_2 &= \|k\| \left(2 - \frac{3}{2}\gamma \right), \\
s_3 &= \|k\|, \\
s_4 &= k \|3+2\omega\|.
\end{aligned}$$

From Eqs. (5.18) and (5.19), $\mathfrak{R} \rightarrow \infty$ as well as $R_1 \rightarrow \infty$, if $|\beta\tau| \rightarrow \pm(2n+1)\pi/2$ and at least one exponent on the respective expressions of \mathfrak{R} and R_1 is negative: $\sigma < 2$ ($\gamma < 2/3$), $\sigma < 1$ ($\gamma < 0$) or $\sigma < 0$ ($\gamma > 4/3$). Then we have the two ranges of γ for which the solutions of the present case, are singular: $0 < \gamma < 2/3$ and $4/3 < \gamma \leq 2$, since furthermore causality requires γ to be in the interval $0 \leq \gamma \leq 2$.

On the other hand, from equations (5.1) and (5.4) we get respectively, for both possibilities $\frac{k}{3+2\omega} < 0$ or $\frac{k}{3+2\omega} > 0$

$$\rho = \rho_1 a(\tau)^{-3\gamma}, \quad (5.20)$$

$$\lambda(\phi) = \lambda_1 \phi(\tau)^{\frac{3}{2}\gamma-1} + \lambda_2 \phi(\tau), \quad (5.21)$$

where

$$\rho_1 = \frac{k c_1^{2-\frac{3\gamma}{2}}}{4\pi\alpha^{2\gamma}} \alpha^{3\gamma}, \quad \lambda_1 = \frac{k c_1^{2-\frac{3\gamma}{2}}}{\alpha^2} \left(1 - \frac{2}{\gamma}\right), \quad \lambda_2 = \frac{2k}{\alpha^2}.$$

As we can see, $\lambda(\phi)$ remains as a binomial function of ϕ if $\gamma \neq 4/3$. In order to analyze the behavior of the obtained solution in terms of the cosmological time t , we shall give some examples.

A. Dust fluid

One interesting application of a barotropic equation of state corresponds to a dust fluid ($\gamma = 1$), on that case the solution reads as follows

1. $k = 0$

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_1 t^{-4}, \\ a(t) &= a_1 t^2, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t)^{1/2}, \\ \rho &= \rho_1 a(t)^{-3}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Where $\phi_1 = c_1^{-1}$, $a_1 = \alpha c_1^{1/2}$, $\lambda_1 = 4(2\omega - 5)c_1^{1/2}$, $\lambda_2 = 0$, $\rho_1 = \frac{1-2\omega}{\pi} c_1^{1/2} \alpha^3$, and c_1 is an integration constant. This is an extended inflationary solution, with a time decaying cosmological constant and initial singularity, as it is shown by the corresponding Ricci scalar

$$\mathfrak{R} = 36 t^{-2}. \quad (5.23)$$

The expansion takes place with a constant acceleration

$$q_0 = -\frac{1}{2}, \quad H_0 = \frac{2}{t_0}, \quad \implies \quad t_0 \sim \frac{2}{H_0}. \quad (5.24)$$

With $H_0 \sim 65 \pm 5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, we obtain $t_0 \sim 30.1 \text{ Gy}$, which is too big value compared with the globular cluster age.

The density parameters for a dust fluid are given by

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{2}{3} - \frac{4\omega}{3}, \\ \Omega_\phi &= \frac{4\omega}{3} + \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

On this case, as in the general case, in order to have a positive values of Ω_m , it is required that $\omega < 1/2$, including negative values. On the other hand, according to observational results, $\Omega_m \sim 0.4 \pm 0.1$ and $\Omega_\Lambda \sim 0.6$, then ω is restricted to be $\omega \sim 1/5$.

2. $k \neq 0$

- For $\frac{k}{3+2\omega} > 0$

The solutions in terms of the time t is given by

$$\begin{aligned}\phi(t) &= c_1[1 - \phi_1 t^2]^{-2}, \\ a(t) &= a_1[1 - \phi_1 t^2], \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1\phi(t) + \lambda_2\phi(t)^{1/2} \\ \rho &= \rho_1 a(t)^{-3},\end{aligned}\tag{5.26}$$

where

$$a_1 = \alpha/c_1^{1/2}, \quad \phi_1 = \frac{c_1}{4\alpha^2} \frac{k}{3+2\omega}, \quad \lambda_1 = \frac{2k}{\alpha^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{kc_1^{1/2}}{\alpha^2}, \quad \rho_1 = \frac{kc_1^{1/2}}{4\pi\alpha^2}\alpha^3,$$

and c_1 is an integration constant. Clearly $a(t)$ and $\phi(t)$ must be positive, in order to be physically significant; this requirement restricts the range of values which t can take: $t < \phi_1^{-1/2}$, and $c_1 > 0$ as we can see from the definition of ϕ_1 . In this case the cosmological term, in spite of being a binomial function on ϕ , decays with the time.

The corresponding Ricci scalar and curvature invariant show that this solution is singular:

$$\mathfrak{R} = \frac{6}{[1 - \phi_1 t^2]^2} \left[6\phi_1^2 t^2 - 2\phi_1 + \frac{k}{a_1^2} \right],\tag{5.27}$$

$$R_1 = \frac{3}{4} \frac{1}{[1 - \phi_1 t^2]^4} \left[-2\phi_1^2 t^2 - 2\phi_1 - \frac{k}{a_1^2} \right]^2,\tag{5.28}$$

According to our analysis of the general solution, for $\sigma = 4/(4-3\gamma)$, with $\gamma = 1$ we get $\sigma = 4$. Taking into account the general equations of the Ricci scalar and curvature invariant, Eqs. (5.13) and (5.15), $\mathfrak{R} \rightarrow \infty$ and $R_1 \rightarrow \infty$ for $\sigma = 4$ and $\tau \rightarrow \pm\infty$, which corresponds to a finite value of t , according to the time dependent solution (5.26). Furthermore $\gamma = 1 < 4/3$, is consistent with our singularity requirement in our discussion for the general case with $\frac{k}{3+2\omega} > 0$.

The today values of the deceleration and Hubble parameters are given by the following expressions

$$q_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\phi_1 t_0^2} - 1 \right), \quad H_0 = \frac{2\phi_1 t_0}{\phi_1 t_0^2 - 1}, \quad t_0 = \frac{1}{H_0} \pm \sqrt{\frac{1}{H_0^2} + \frac{1}{\phi_1}}.\tag{5.29}$$

Because $\phi_1 t_0^2 < 1$, then $q_0 > 0$. This model expands from $t = -\phi_1^{-1/2}$ until $t = 0$, then it contracts until $t = \phi_1^{-1/2}$, in both cases with positive deceleration parameter. The numerical value for t_0 depends on the values of the free constants.

- For $\frac{k}{3+2\omega} < 0$

The corresponding solution in terms of the time t is given as

$$\begin{aligned}\phi(t) &= c_1[1 + \phi_1 t^2]^{-2}, \\ a(t) &= a_1[1 + \phi_1 t^2], \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1\phi(t) + \lambda_2\phi(t)^{1/2} \\ \rho &= \rho_1 a(t)^{-3},\end{aligned}\tag{5.30}$$

where

$$\phi_1 = \frac{c_1}{4\alpha^2} \left\| \frac{k}{3+2\omega} \right\|, \quad a_1 = \alpha/c_1^{1/2}, \quad \lambda_1 = \frac{2k}{\alpha^2}, \quad \lambda_2 = -\frac{kc_1^{1/2}}{\alpha^2}, \quad \rho_1 = \frac{kc_1^{1/2}}{4\pi\alpha^2}\alpha^3,$$

and c_1 is an integration constant. In this case we have not restrictions on the values which t can take. If $-1/\phi_1 < (t_0 + c)^2$, the expansion takes place with non-constant acceleration and without singularity, as it is shown from the corresponding Ricci scalar and curvature invariant

$$\mathfrak{R} = \frac{6}{[1 + \phi_1 t^2]^2} \left[6\phi_1^2 t^2 + 2\phi_1 + \frac{k}{a_1^2} \right], \quad (5.31)$$

$$R_1 = \frac{3}{4} \frac{1}{[1 + \phi_1 t^2]^4} \left[-2\phi_1^2 t^2 + 2\phi_1 - \frac{k}{a_1^2} \right]^2. \quad (5.32)$$

According to our general analysis of this case, from (5.18) and (5.19), \mathfrak{R} and R_1 do not diverge for $\sigma = 4$ and $|\beta\tau| \rightarrow \pm(2n+1)\pi/2$, in agreement with the time dependent solution (5.30) which has not singularities. $\gamma = 1 < 4/3$ in this model, which is consistent with our condition $\gamma > 4/3$ as requirement for existence of singularities.

For this solution, the corresponding present values of the density and Hubble parameters are given as

$$q_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\phi_1} t_0^{-2}, \quad H_0 = \frac{2\phi_1 t_0}{\phi_1 t_0^2 + 1}, \quad t_0 = \frac{1}{H_0} \pm \sqrt{\frac{1}{H_0^2} - \frac{1}{\phi_1}}. \quad (5.33)$$

As in the previous case, the values of t_0 depends on the free constants of our model, but in this case, for $H_0^2 \sim \phi_1 \implies t_0 \sim 1/H_0$.

B. Stiff matter fluid

Another interesting application of a barotropic equation of state is a stiff matter fluid for which $\gamma = 2$. In such a case, the solutions (5.7), (5.11), (5.12), (5.16), and (5.17) are the following ones

1. $k=0$

The solution in terms of the physical time t is given by

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_1 (c-t)^{-1}, \\ a(t) &= a_1 (c-t)^{1/2}, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t)^2, \\ \rho &= \rho_1 a(t)^{-6}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

where now

$$\phi_1 = \frac{c_1^{1/2}}{2}, \quad a_1 = \frac{\alpha\sqrt{2}}{c_1^{1/4}}, \quad \lambda_1 = -\frac{4}{c_1}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \rho_1 = \frac{1}{8\pi} \frac{1-2\omega}{c_1} \alpha^6.$$

This solution has a physical meaning for $t < c$, where c is an integration constant and the scale factor increases very slowly with the time, and with constant deceleration. The Ricci scalar and Hubble parameter, are given by

$$\mathfrak{R} = 0, \quad (5.35)$$

$$q_0 = 1, \quad H_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{t_0 - c}, \quad (5.36)$$

Naturally this model is not valid today because it shrink for the allowed range of t .

The corresponding density parameters are

$$\begin{aligned}\Omega_m &= \frac{1}{3} - \frac{2\omega}{3}, \\ \Omega_\phi &= \frac{2}{3} + \frac{2\omega}{3}.\end{aligned}\tag{5.37}$$

In order to have a positive values of Ω_m , then $\omega < 1/2$, as we have claimed in the discussion of the general solution. The observational results $\Omega_m = 0.4$ and $\Omega_\Lambda = 0.6$, determine $\omega = -0.1$.

2. $k \neq 0$

- For $\frac{k}{3+2\omega} > 0$

The solution of this case, in terms of the time t is given as

$$\begin{aligned}\phi(t) &= c_1 \left[1 + \phi_1 t^2 \right]^{-1}, \\ a(t) &= a_1 \left[1 + \phi_1 t^2 \right]^{1/2}, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t), \\ \rho &= \rho_1 a(t)^{-6},\end{aligned}\tag{5.38}$$

where $\phi_1 = \frac{c_1 k}{\alpha^2 (3+2\omega)}$, ($\phi_1 > 0$ for $c_1 > 0$), $a_1 = \alpha c_1^{-1/2}$, $\lambda_1 = \frac{2k}{\alpha^2}$, $\lambda_2 = 0$, $\rho_1 = \frac{k}{8\pi c_1} \alpha^4$, and c_1 is an integration constant. Here $a(t)$ grows with the time, from a minimum radius a_1 there is a non-singular state. The expansion takes place with non-constant acceleration, as we can see from the corresponding Ricci scalar and curvature invariant, which are given by

$$\mathfrak{R} = \frac{6}{[1 + \phi_1 t^2]} \left(\phi_1 + \frac{k c_1}{\alpha^2} \right),\tag{5.39}$$

$$R_1 = \frac{3}{4} \frac{1}{[1 + \phi_1 t^2]^4} \left[-\phi_1 t^2 \left(\phi_1 + \frac{c_1 k}{\alpha^2} \right) + \phi_1 - \frac{k c_1}{\alpha^2} \right]^2.\tag{5.40}$$

In this case $\gamma = 2$ implies $\sigma = -2$. from Eqs. (5.13) and (5.15) with this value of σ , neither \mathfrak{R} nor R_1 diverge for $\tau \rightarrow \pm\infty$ which is consistent with our requirement $\gamma > 4/3$ for the avoidance of singularities. This analysis is in agreement with the inspection of Eqs. (5.39) and (5.40).

The deceleration and Hubble parameters are

$$\begin{aligned}q_0 &= -\frac{1}{\phi_1} t_0^{-2}, \\ H_0 &= \frac{c_1 k}{\alpha^2 (3+2\omega)} \frac{t_0}{1 + \frac{c_1 k}{\alpha^2 (3+2\omega)} t_0^2}, \\ t_0 &= \frac{1}{2H_0} \pm \sqrt{\frac{1}{4H_0^2} - \frac{\alpha^2 (3+2\omega)}{c_1 k}}.\end{aligned}\tag{5.41}$$

- For $\frac{k}{3+2\omega} < 0$

$$\begin{aligned}\phi(t) &= c_1 \left[1 - \phi_1 t^2 \right]^{-1}, \\ a(t) &= a_1 \left[1 - \phi_1 t^2 \right]^{1/2}, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t), \\ \rho &= \rho_1 a(t)^{-6},\end{aligned}\tag{5.42}$$

where $\phi_1 = \frac{c}{\alpha^2} \left\| \frac{k}{3+2\omega} \right\|$. In order to have a physically solution, it is required that $\phi_1 < 0 \implies c < 0$. The corresponding Ricci scalar and curvature invariant in the present case, are given by

$$\mathfrak{R} = \frac{6}{[1 - \phi_1 t^2]} \left(\frac{kc_1}{\alpha^2} - \phi_1 \right), \quad (5.43)$$

$$R_1 = \frac{3}{4} \frac{1}{[1 - \phi_1 t^2]^4} \left[-\phi_1 t^2 \left(\phi_1 - \frac{c_1 k}{\alpha^2} \right) - \phi_1 - \frac{kc_1}{\alpha^2} \right]^2. \quad (5.44)$$

In this case $\gamma = 2$, then $\sigma = -2$; such that in the general solution (Eqs. (5.16)- (5.19)), $\mathfrak{R} \longrightarrow \infty$ and $R_1 \longrightarrow \infty$, i.e., the solution for this case is singular provided that $[\beta\tau] \implies \pm(2n+1)\pi/2$, which corresponds to $t = \phi_1^{-1/2}$. According to our singularity discussion under equation (5.19), for $\gamma = 2$ the corresponding solution should being singular, as we can verify from inspection of Eq. (5.43) and (5.44).

the present deceleration and Hubble parameters are

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{\phi_1} t_0^{-2}, \\ H_0 &= -\frac{c_1}{\alpha^2} \left\| \frac{k}{3+2\omega} \right\| \frac{t_0}{1 - \frac{c_1}{\alpha^2} \left\| \frac{k}{3+2\omega} \right\| t_0^2}, \\ t_0 &= \frac{1}{2H_0} \pm \sqrt{\frac{1}{4H_0^2} + \frac{\alpha^2}{c_1} \frac{3+2\omega}{k}}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

As we can see, $\phi_1 < 0 \implies q_0 < 0$, then this model is accelerated. The numerical values of H_0 and t_0 depend on the values of the free constants.

VI. THE RADIATION CASE

We shall consider the radiation case for which $\gamma = 4/3$, so that returning to Eqs. (2.15)-(2.17) and following a similar procedure as in section V, we get Eq. (5.5) with $\gamma = 4/3$. In order to solve this differential equation, we shall assume $m = 1/2$, then we have for this case

$$\frac{\phi''}{\phi} - \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 = 0, \quad (6.1)$$

for which $\omega \neq -3/2$. This differential equation has the following solution

$$\phi(\tau) = c_1 e^{c\tau}, \quad (6.2)$$

where c and c_1 are integration constants. According to Equations (2.13), (5.1) and (5.4) with $\gamma = 4/3$ and $m = 1/2$ we get respectively

$$\begin{aligned} a(\tau) &= a_1 e^{-c\tau/2}, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(\tau), \quad \lambda_2 = 0, \\ \rho &= \rho_1 a(\tau)^{-4}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

where $a_1 = \alpha c_1^{-1/2}$, $\lambda_1 = \left[\frac{c^2}{8}(3+2\omega) + \frac{3}{2} \frac{k}{\alpha^2} \right]$ and $\rho_1 = \frac{3}{16\pi} \left[\frac{k}{\alpha^2} - \frac{\omega c^2}{2} - \frac{3c^2}{4} \right] \alpha^4$. In terms of the time t , this solution is given as follows

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_1 t^{-2}, \\ a(t) &= a_1 t, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t), \\ \rho &= \rho_1 a(t)^{-4}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

where $\phi_1 = \frac{4}{c^2}$, $a_2 = \frac{\alpha c}{2}$ and $\lambda_2 = 0$. This is a singular solution according to the Ricci scalar which for this case is given by

$$\mathfrak{R} = 6 \left(1 + \frac{k}{a_1^2}\right) t^{-2}. \quad (6.5)$$

The deceleration parameter becomes null, instead the today Hubble parameter is given as

$$q_0 = 0, \quad H_0 = \frac{1}{t_0}, \quad (6.6)$$

and therefore $t_0 = 1/H_0 \sim 15.05$ Gy.

The case $k = 0$ is not excluded from the solution (6.4). For $k = 0$ we get the density parameter from the matter and the scalar field as

$$\begin{aligned} \Omega_m &= -\omega - \frac{3}{2}, \\ \Omega_\phi &= \omega + \frac{5}{2}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

It is required that $\omega < -3/2$, in order to have $\Omega_m > 0$, and the observational accepted values of Ω_m and Ω_ϕ , determine $\omega = -1.9$.

VII. THE FALSE VACUUM CASE

We analyze now the case $\gamma = 0$. We shall follow a similar procedure as in section V, then we get from Eqs. (5.2) and (5.3) with $\gamma = 0$, the following set of equations

$$\frac{\phi''}{\phi}(2m-1) + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[-2m - \omega - \frac{1}{2}\right] + \frac{2k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} = 0, \quad (7.1)$$

$$\frac{\phi''}{\phi}(3+2\omega) + \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 \left[-12m^2 + 3m - 6\omega m + 3\omega + \frac{3}{2}\right] + \frac{12k}{\alpha^2} \phi^{2m-1} + 2\frac{\lambda(\phi)}{\phi} + 2\frac{d\lambda(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (7.2)$$

We consider first the case $k = 0$

- $k = 0$

The set of equations (7.1)-(7.2) with $k = 0$ has the two possible set of solution depending on the relation between m and ω :

1. $\omega = -1 - m$

$$\begin{aligned} \phi(t) &= c_1 \exp[\phi_1 t], \\ a(t) &= a_1 \exp[-m\phi_1 t], \\ \lambda(\phi) &= \frac{\lambda_1}{\phi(t)} + \lambda_2, \\ \rho &= -\frac{c_1}{8\pi}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

where

$$\phi_1 = c_3^{1/2}(2m-1), \quad a_1 = \alpha c_1^{-m}, \quad \lambda_1 = c_1, \quad \lambda_2 = \frac{c_1}{2}(2m-1)^3(3m-1).$$

This is an inflationary solution if $m\phi_1 < 0$. This condition means $0 < m < 1/2$, which implies a condition on the range of the values of ω : $1/2 < \omega < 1$. In order to have physical solutions, $c_1 > 0$, which means $\rho < 0$. Of course, these solutions have not singularities, as we can see from the Ricci scalar

$$\mathfrak{R} = 12c_1m^2(2m-1)^2. \quad (7.4)$$

The deceleration and Hubble parameters are given by

$$q_0 = -1, \quad H_0 = m(1-2m)c_1^{1/2}, \quad (7.5)$$

thus the model is accelerated. On the other hand, the density parameter due to the matter and scalar field, are

$$\begin{aligned} \Omega_m &= -\frac{1}{3m^2} c_2 \phi_1^{-2} \exp[-\phi_1 t], \\ \Omega_\phi &= \frac{1}{3m^2} c_2 \phi_1^{-2} \exp[-\phi_1 t] + 1. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Here, it is required $c_2/c_3 < 0$, in order to have a positive values of Ω_m . As we have seen, $0 < m < 1/2 \implies m > 0$ and $\phi_1 < 0$, which means Ω_m and Ω_ϕ increase exponentially with the time, keeping $\Omega_m + \Omega_\phi = 1$.

2. $\omega \neq -1 - m$

with this condition and $k = 0$, the corresponding exact solutions to the set of equations (7.1)-(7.2) are

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_1 (c - t)^\sigma, \\ a(t) &= a_1 (c - t)^{-m\sigma}, \\ \lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t)^{n_1} + \frac{\lambda_2}{\phi(t)}, \\ \rho &= -\frac{c_1}{8\pi}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

where

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1-2m}{m+\omega+1}, \\ \phi_1 &= c_1 [c_1^{1/2} (m+\omega+1)]^\sigma, \\ a_1 &= \alpha \phi_1^{-m}, \\ n_1 &= \frac{2\omega+3}{2m-1} + 1 = -\frac{2}{\sigma}, \\ \lambda_1 &= -\frac{c_1^{1-n_1}}{4} \frac{(2m-1)^2}{2m+\omega+1/2} \left[(3+2\omega)(2m+\omega+1/2) + (2m-1)(-12m^2+3m-6m\omega+3\omega+3/2) \right], \\ \lambda_2 &= c_2. \end{aligned}$$

This solution corresponds to an extended inflationary model if $m\sigma < 0$. In order to have a physical solution, it is required $t < c$. The cosmological constant is a decaying function of time: $\lambda \sim t^{-2} + t^{-\sigma}$, with $\sigma > 0$. But according to the above mentioned condition $m\sigma < 0$, it is clear that m should be negative.

This set of solutions is singular just at $t = c$, as we can see from the Ricci scalar

$$\mathfrak{R} = 6m(2m-1) \frac{4m^2 - 3m - \omega - 1}{(m+\omega+1)^2} \frac{1}{(c-t)^2}. \quad (7.8)$$

The present deceleration and Hubble parameters for this model, are given as

$$q_0 = 1 - \frac{m+\omega+1}{m(2m-1)}, \quad H_0 = -\frac{m(1-2m)}{m+\omega+1} (c-t_0)^{-1}, \quad t_0 = c - \frac{m(1-2m)}{m+\omega+1} \frac{1}{H_0}. \quad (7.9)$$

According to this results, the expansion of this model takes place in accelerated way if $q_0 = 1 + 1/m\sigma < 0$, but we have seen that $m\sigma < 0$, then $\|m\sigma\| < 1$ is the required condition for accelerated expansion. The value of t_0 clearly depend on the value of m and ω , but we know that, because the restriction on t , this model is not relevant at present times.

The corresponding density parameters due to the matter and scalar field for the present case, are given by

$$\begin{aligned}\Omega_m &= \frac{1}{3m^2} \frac{1}{\sigma^2} \phi_1^{-2/\sigma} \left[8\pi\rho_1 - c_2\phi(t)^{\frac{4m+2\omega+1}{1-2m}} \right], \\ \Omega_\phi &= \frac{1}{3m^2} \frac{1}{\sigma^2} \phi_1^{-2/\sigma} \left[\lambda_1 + \lambda_2\phi(t)^{\frac{4m+2\omega+1}{1-2m}} \right] + \frac{\omega}{6m^2} + \frac{1}{m}.\end{aligned}\quad (7.10)$$

Both values depend on the free constants, but for all time, it is satisfied that $\Omega_m + \Omega_\phi = 1$.

• $k \neq 0$

In order to solve the set of equations (7.1)- (7.2) with $k \neq 0$, we shall assume $m = 1/2$, then we have respectively

$$\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 (3 + 2\omega) - \frac{4k}{\alpha^2} = 0, \quad (7.11)$$

$$\frac{\phi''}{\phi} (3 + 2\omega) - \frac{12k}{\alpha^2} + 2\frac{\lambda(\phi)}{\phi} + 2\frac{d\lambda(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (7.12)$$

From Eq. (7.11) we get

$$\frac{\phi'}{\phi} = \left[\frac{4k}{\alpha^2(3 + 2\omega)} \right]^{1/2}, \quad (7.13)$$

solution to this equation is given by

$$\phi(\tau) = c_1 e^{\frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{3+2\omega}} \tau}. \quad (7.14)$$

From Eq. (7.13) we get

$$\frac{\phi''}{\phi} = \frac{4k}{\alpha^2(3 + 2\omega)}. \quad (7.15)$$

We use this last equation in Eq. (7.12) from which we get a differential equation for $\lambda(\phi)$:

$$\frac{d\lambda(\phi)}{d\phi} + \frac{\lambda(\phi)}{\phi} - \frac{4k}{\alpha^2} = 0, \quad (7.16)$$

the solution of this equation reads as follows

$$\lambda(\phi) = \frac{2k}{\alpha^2} \phi(\tau) + \frac{c_1}{\phi(\tau)}. \quad (7.17)$$

From Eqs. (2.13) and (5.1) with $m = 1/2$, we get respectively

$$a(\tau) = a_1 e^{-\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{3+2\omega}} \tau}, \quad (7.18)$$

$$\rho = -\frac{c_1}{8\pi}, \quad (7.19)$$

where $a_1 \equiv \alpha c_1^{-1/2}$. In terms of t , this solution becomes

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \phi_1 t^{-2}, \\
a(t) &= a_1 t, \\
\lambda(\phi) &= \lambda_1 \phi(t) + \lambda_2 \phi(t)^{-1}, \\
\rho &= -\frac{c_1}{8\pi},
\end{aligned} \tag{7.20}$$

where $\phi_1 = \frac{\alpha^2}{k}(3 + 2\omega)$, $a_1 = \sqrt{\frac{k}{3+2\omega}}$, $\lambda_1 = \frac{2k}{\alpha^2}$ and $\lambda_2 = c_1$. This solution has an initial singularity, as we can see from the Ricci scalar

$$\mathfrak{R} = 12(2 + \omega) t^{-2}. \tag{7.21}$$

$\lambda(\phi)$ increases with the time, in contradiction with the actual observations. However, for a particular combination of the today values of the free constants in this model we can get a small value of λ_0

$$\left[\frac{2}{\alpha^2} \left\| \frac{k}{c} \right\| \phi_1^2 \right]_0^{1/4} \sim t_0 \tag{7.22}$$

The today values of the corresponding deceleration and Hubble parameters are given by

$$q_0 = 0, \quad H_0 = \frac{1}{t_0}, \tag{7.23}$$

such that $t_0 = 1/H_0 \sim 15.05$ Gy.

VIII. FINAL REMARKS

We have considered a Brans-Dicke scalar-tensor theory, obtaining Friedmann-Robertson-Walker cosmological models with time dependent cosmological constant. The time dependence occurs in a natural way. Two ansatz were proposed: $a\phi^m = \alpha$, with α constant, and $\lambda(t) = \lambda_1\phi(t)^{n_1} + \lambda_2\phi(t)^{n_2}$, in order to get exact inflationary solutions of the field equations, with a general state equation $p = (\gamma - 1)\rho$. Our set of exact solutions depend on the values of γ , k , m and ω .

We classify the exact solutions of each case which we deal, according to the values of the free constants of our model. For vacuum with $k = 0$ and $m = 1/2$, we get a non-relevant solution (according to our goal), with $\lambda = 0$. For $k = 0$, $m = 2/3$, we get a singular solution for which the scale factor decreases with the time as $a(t) \sim t^{-1/3}$, in accelerated way, but its predicted age is a negative value, then we conclude that this model has not physical meaning today.

Furthermore for vacuum, we get for a flat case, an extended inflationary solution with initial singularity, and an exponential inflationary solution without singularity. For a not flat case we get a coasting singular solution. In all this models, the values of t_0 and Ω_ϕ (usually called Ω_Λ) are similar to the actual accepted values.

We obtain exact solutions for a general equation of state $p = (\gamma - 1)\rho$. In the flat case ($k = 0$) we get an extended inflationary solution with initial singularity. The expansion of this model occurs in a accelerated way, independently of the equation of state. The values of t_0 , Ω_m and Ω_ϕ depend on the value of the undetermined constants γ , and ω .

The solution of the non-flat case cannot be expressed in terms of the cosmological time, but in terms of the parameter τ . In such models the initial singularities can be avoided for some values of γ .

As examples of our general solutions, we calculate the models for a dust and stiff matter fluid. For a flat dust model we get a slow extended inflationary solution with acceleration and time decaying cosmological constant. This solution has an initial singularity and its estimated age is $t_0 \sim 2/H_0$, which is too big according to actual known values. A bigger growth rate is required in order to have smaller values of t_0 and to be consistent with actual observations.

On the other hand, for a non-flat dust model we get a slowly expanding solution $a(t) \sim t^2$, with non-constant acceleration or deceleration depending on the relation between our free constants $k/(3 + 2\omega) > 0$ or $k/(3 + 2\omega) < 0$ respectively. The models are singular or non-singular depending on the free constants α , k and ω .

As another application of our solutions with a general state equation, we consider a stiff matter fluid for which $\gamma = 2$. The solution of the corresponding flat case is a slowly expanding model $a(t) \sim t^{1/2}$, with acceleration, without

singularities and with a time decaying cosmological “constant”: $\lambda \sim t^{1/2}$. The validity of this model is restricted to some values of t . The actual age of the Universe predicted by this model, $t_0 \sim 1/2H_0 \sim 7.5$ Gy, with $H_0 \sim 65 \pm 5$ km s⁻¹Mpc⁻¹; clearly this model is not applicable today.

In the non-flat case for a stiff matter fluid, we get cosmological models for which the scale factor grows with the time from a minimum radius, and the cosmological “constant” decreases with the time, but as in the dust model, we have a set of free constants, whose values should determine the characteristics of this model. Thus, for $k/(3 + 2\omega) > 0$ we have a non-constant accelerated model without singularities, while for $k/(3 + 2\omega) < 0$, our solution is a non-constant accelerated model with initial singularities and which validity is restricted to some values of t . In both cases the actual predicted age of the Universe, depend on the numerical value of the free constants.

We solve separately the case of a radiation fluid ($\gamma = 4/3$) and a false vacuum fluid ($\gamma = 0$). For the radiation fluid we get a coasting model $a(t) \sim t$, with a decaying cosmological “constant” and with initial singularity, independently of the curvature. The value of $t_0 \sim 15.05$ Gy, obtained from this model is in fair agreement with actual observations.

For a false vacuum fluid, we obtain a set of solutions which we classify depending on the range of values which our free constants may take. For the flat case, we get two family of solutions, one of them, corresponds to an exponential inflationary model with acceleration and without singularities. Another set of solutions is a kind of power law inflationary model $a(t) \sim (c - t)^\epsilon$, where ϵ depend on the “free” constants m and ω , restricted by physical requirements. For this last solution the cosmological constant is a binomial function of t , which decreases under specific conditions on the free constants.

Additionally, we get a solution for the not flat case of a false vacuum fluid. In such a case we get a coasting model $a(t) \sim t$, which has initial singularity and with cosmological “constant” which is a binomial function of t : $\lambda \sim \lambda_1 t^{-2} + \lambda_2 t^2$. Such a cosmological “constant” would increases with the time in contradiction with the actual accepted value of λ . For a particular combination of the today values of the free constants in this model, it is possible to obtain small values of λ_0 . The actual age predicted by this model is $t_0 \sim 15.05$ Gy, which is again in fair agreement with the actual accepted value.

Then, as we can see from the description of our exact solutions, some of them have not physical meaning today, some others are restricted to be valid during a specific period. Most of them are valid from an initial singularity until today, predicting an inflationary epoch, a cosmological “constant” which decreases with the time and the today observed acceleration, as well as an actual age of the universe which is in reasonable agreement with the actual observations.

IX. ACKNOWLEDGMENTS

Both authors thanks to CONACYT-Mexico by partial financial support.

-
- [1] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
 - [2] Y. Ng, *Int. J. Mod. Phys. D* **1**, 145 (1992).
 - [3] M.P. Bronstein, *PhysZeit. der Sowjetunion* **3**, 73 (1933).
 - [4] M. Özer and M. Taha, *Mod. Phys. Lett. A* **A13**, 571 (1998); K. Freese, F.Adams, J. Fieman and E. Mottola, *Nucl. Phys. B* **287**, 797 (1987); P.J.E. Peebles, *Astroph. J.* **325**, L17 (1988); B. Ratra and P.J.E. Peebles, *Phys. Rev. D* **37**, 3406 (1988); M. Reuter and C. Wetterich, *Phys. Lett. B* **188** 38 (1987).
 - [5] W. Chen and Y.S. Wu, *Phys. Rev. D* **41**, 695 (1990).
 - [6] J.C. Carvalho, J.A.S. Lima and I. Waga, *Phys. Rev. D* **46**, 2404 (1992).
 - [7] S. Capozziello, R. de Ritis and A.A. Marino, *Phys. Lett.* **208A**, 214 (1995).
 - [8] J. Matyjasek, *Phys. Rev. D* **51**, 4154 (1995).
 - [9] M. Gasperini, *Phys. Lett B* **194**, 347 (1987).
 - [10] A.M. Abdel, *Phys. Rev. D* **45**, 3497 (1992).
 - [11] M. Endo and T. Fukui, *Gen. Rel. Grav.* **8**, 833 (1977).
 - [12] V. Canuto, S.H. Hsieh and P.J. Adams, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 429 (1977).
 - [13] D. Kazanas, *Astrophs. J. Lett.* **241**, L59 (1980).
 - [14] O. Bertolami, *Il Nuovo Cimento* **93B**, 36 (1986); M.S. Berman and M.M. Som, *Int. J. Theor. Phys.* **29**, 1411 (1990).
 - [15] Y.K. Lau, *Aust. J. Phys.* **38**, 547 (1985).
 - [16] J.L. Lopez and D.V. Nanopoulos, *Mod. Phys. Lett.* **A11**, 1 (1996).
 - [17] S.G. Rajeev, *Phys. Lett.* **125B**, 144 (1983).

- [18] W.A. Hiscock, Phys. Lett. **166B**, 285 (1986).
- [19] M. Özer and M. Taha, Mod. Phys. Lett. **171B**, 363 (1986); R.G. Vishwakarma, Class. Quant. Grav. **14**, 945 (1997);
- [20] M.O. Calvao *et al*, Phys. Rev. D **45**, 3869 (1992); V. Méndez and D. Pavón, Gen. Rel. Grav. **28**, 679 (1996).
- [21] J.M. Overduin and P.S. Wesson and S. Bowyer, Astrophys. J. **404**, 1 (1993).
- [22] T.S. Olson and T.F. Jordan, Phys. Rev. D **35**, 3258 (1987).
- [23] D. Pavón, Phys. Rev. D **43**, 375 (1991).
- [24] M.D. Maia and G.S. Silva, Phys. Rev. D **50**, 7233 (1994).
- [25] V. Silveira and I. Waga, Phys. Rev. D **50**, 4890 (1994).
- [26] L.F.B. Torres and I. Waga, Mon. Not. R. Astron. Soc. **279**, 712 (1996).
- [27] V. Silveira and I. Waga, Phys. Rev. D **56**, 4625 (1997).
- [28] R.F. Sisteró, Gen. Rel. Grav. **23**, 1265 (1991).
- [29] D. Kalligas, P. Wesson and C.W.F. Everitt, Gen. Rel. Grav. **24**, 351 (1992).
- [30] A.I. Arbab and A.M. Abdel-Rahman, Phys. Rev. D **50**, 7725 (1994).
- [31] A. Beesham, Phys. Rev. D **48**, 3539 (1993).
- [32] P. Spindel and R. Brout, Phys. Lett. B **320**, 241 (1994).
- [33] I. Waga, Astroph. J. **414**, 436 (1993).
- [34] J.M. Salim and I. Waga, Class. Quant. Grav. **10**, 1767 (1993).
- [35] J.A.S. Lima and J.C. Carvalho, Gen. Rel. Grav. **26**, 909 (1994).
- [36] C. Wetterich, Astron. Astrophys. **30**, 321 (1995).
- [37] A.I. Arbab, Gen. Rel. Grav. **26**, 61 (1997).
- [38] J.A.S. Lima and J.M.F. Maia, Phys. Rev. D **49**, 5597 (1994); J.A.S. Lima and M. Trodden, Phys. Rev. D **53**, 4280 (1996).
- [39] D. Kalligas, P.S. Wesson and C.W.F. Everitt, Gen. Rel. Grav. **27**, 645 (1995).
- [40] J.W. Moffat, Phys. Rev. D **56**, 6264 (1997).
- [41] F. Hoyle, G. Buerbidge and J.V. Narlikar, Mon. Not. R. Astron. Soc. **286**, 173 (1997).
- [42] M.V. John and K.B. Joseph, Class. Quant. Grav. **14**, 1115 (1997).
- [43] E. Gunzig, R. Maartens and A. Nesteruk, Class. Quant. Grav. **15**, 923 (1998).
- [44] J. Overduin and F. Cooperstock, Phys. Rev. D **58**, 043506 (1998).
- [45] S. Capozziello and R. de Ritis, Gen. Rel. Grav. **29**, 1425 (1997).
- [46] R.D. Reasenberg *et al*, Astrophys. J. **234**, L219 (1979).
- [47] A. Liddle, A. Mazumdar, and J. Barrow, Phys. Rev. D **58** 027302+ (1998).
- [48] F. Dahia and C. Romero, gr-qc/9812001; M. Susperregi and A. Mazumdar, Phys. Rev. D **58**, 083512 (1998).
- [49] S. Perlmutter *et.al.*, astro-ph/9812133.
- [50] L.O. Pimentel and L.M. Díaz-Rivera, Int. J. Mod. Phys A, (to appear).
- [51] L.O. Pimentel and J. Stein-Schabes, Phys. Lett. B **216**, 27 (1989).
- [52] E. I. Guendelman, gr-qc 9901017; E. I. Guendelman, gr-qc 9901067.
- [53] M. Sethi, A. Batra and D. Lohiya, astro-ph/9903084 .
- [54] C. Will, *Theory and experiment in gravitational physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1981).
- [55] H. Dehnen and O. Obregón, Astrophys. Space Sci. **17**, 338 (1972); V. Johri and K. Desikan, Gen. Rel. Grav. **26**, 1217 (1994).
- [56] C. Lineweaver, Astrophys. J. Lett. **505**, 69 (1998).
- [57] M.S. Turner, Physica Scripta **T36**, 167 (1991); M.S. Turner, *In the Critical Dialogues in Cosmology* (World Scientific, Singapore, 1997), p. 555; L. Krauss and M.S. Turner, Gen. Rel. Grav. **27** 1137 (1995); J.P. Ostriker and P.J. Steinhardt, Nature **377** 600 (1995).
- [58] M.S. Turner, in *Proceedings of type Ia Supernova: Theory and Cosmology, Chicago 1998* edited by J. Niemeyer and J. Truran (Cambridge University Press, Cambridge U.K. 1999).
- [59] B. Chaboyer *et. al.*, Astrophys. J. **494**, 96 (1998); L.M. Macri *et. al*, Astrophys. J. (to be published).
- [60] J. Karminati and R.G. McLenaghan, J. Math. Phys. **32**, 3135 (1991).