Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

La normatividad en la filosofía de las matemáticas del Tractatus Logico-Philosophicus

Tesista: Lic. Edgar Avendaño Mejía

Asesor: Dr. José Jorge Max Fernández de Castro Tapia

Lectores: Dr. José Silvio Mota Pinto y Dr. Víctor Cantero Flores

Maestría en Humanidades

Filosofía de las Ciencias y del Lenguaje

Julio de 2016

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Fecha : 14/07/2016

CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO de MAESTRO EN HUMANIDADES (FILOSOFIA) del alumno EDGAR AVENDAÑO MEJIA, matrícula 2143801283, quien cumplió con los 120 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha veinte de julio del 2016 presentó la DEFENSA de su EXAMEN DE GRADO cuya denominación es:

LA NORMATIVIDAD EN LA FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS DEL TRACTATUS LOGICO-PHILOSOPHICUS

Cabe mencionar que la aprobación tiene un valor de 40 créditos y el programa consta de 160 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

APROBAR

JURADO

Presidente

DR. JOSE JORGE MAX FERNANDEZ DE CASTRO TAPIA

Secretario

DR. SILVIO JOSE MOTA PINTO

Vocal

DR. VICTOR CANTERO FLORES

Coordinación de Sistemas Escolares
Av. San Rafael Atlixco 186. Col. Vicentina, México, D.F. C.P. 09340 Tels. 5804-4880 y 5804-4883 csera@xanum.uam.mx www.izt.uam.mx

Índice

Presentación

Dado que suele hablarse de leyes en lógica y matemáticas (e.g. ley de conmutatividad en aritmética, la ley del tercero excluido en lógica), puede plantearse el problema de si en verdad hay una normatividad en estas disciplinas y qué tipo de normatividad está en juego. Es decir, si concedemos que hay una normatividad en estas disciplinas, puede plantearse la cuestión de si esas normas están fundamentalmente *prescribiendo* como las leyes del Estado o las reglas de un juego, si están *describiendo* como las leyes de las ciencias naturales, o si tienen algún otro tipo de normatividad. Este planteamiento tiene la virtud de que al abordar las consecuencias filosóficas de cada postura, se choca contra distintas intuiciones sobre la lógica y las matemáticas: que son objetivas, a priori, epistemológicamente relevantes, etc.

En el primer capítulo se hace intuitiva la idea de que hay una normatividad en lógica y matemáticas por diversas vías y se abordan las ventajas y desventajas de cada postura. Después se estudian los casos de las filosofías de Frege, Russell y Wittgenstein, tres filósofos que se ocupan de esta cuestión, si bien cada uno hace énfasis en distintos aspectos del problema y no se considera explícitamente un problema central para sus filosofías.

Se abordan las posturas de Frege y Russell para compararlas con la respuesta del Tractatus Logico-Philosophicus y se elige dar énfasis a esta postura por dos razones, una exegética y una filosófica: la razón exegética es que la filosofía de las matemáticas del TLP suele considerarse fundamentalmente formalista en el sentido de que lo fundamental de las matemáticas es la manipulación de símbolos por medio de reglas. En este capítulo se pone en cuestión esta exégesis y se empieza a argumentar en contra de ella. La razón filosófica para elegir el TLP es que su postura promete un anti-platonismo que rescate la intuición de que el conocimiento matemático es objetivo y no-arbitrario.

En el segundo capítulo se expone la teoría metafísica y lingüística del TLP con el fin de explicitar las partes de la teoría que servirán para mostrar que su filosofía de las matemáticas no puede llamarse simplemente formalista y aclarar en qué sentido las normas de la lógica y matemáticas están conectadas con las condiciones necesarias para hacer representaciones simbólicas significativas acerca del mundo. Particularmente se enfatiza la manera en que una familia de conceptos metafísico-lingüísticos centrales (forma lógica, propiedades y relaciones formales/estructurales) contribuye en el argumento de que hay un aspecto no-arbitrario en la normatividad del lenguaje.

Por último, se revisan los pasajes sobre las matemáticas en el TLP con ayuda de la exégesis de Frasquola sobre la teoría de las operaciones que condensaría su filosofía de las matemáticas. Sobre esta base (metafísica, teoría pictórica y teoría de las operaciones formales) se evalúa cuál es el fundamento de la validez de las expresiones matemáticas según la filosofía del TLP para dilucidar el tipo de normatividad que esta teoría adjudica a lógica y matemáticas.

La conclusión de esta investigación es que su normatividad no es completamente prescriptiva y que no es descriptiva, sino que es lo que von Wright llamaría *anankástica:* consta de reglas *técnicas* (de la forma: si se quiere obtener p, entonces debe hacerse q) pero cuyo antecedente es *necesario* para obtener el resultado deseado; en el caso de lógica y matemáticas, su normatividad se basa en las condiciones necesarias *para la posibilidad de la representación simbólica.* Es decir, el aspecto trascendental de la filosofía del TLP es el que ofrece una respuesta a la cuestión de la normatividad de las ciencias formales.

Esta conclusión que en principio es meramente exegética ofrece un motivo de reflexión para la filosofía de las matemáticas y el debate sobre su objetividad y contenido: es una estrategia que intenta rescatar el carácter objetivo del conocimiento matemático sin apelar a objetos matemáticos.

Capítulo I: Normatividad matemática

1.1 El problema de la normatividad en la filosofía de las ciencias formales

En lógica y matemáticas suele hablarse de "leyes". En "Norma y Acción", G.H. von Wright habla de esta intuición:

> […] we find that there are, in logic and mathematics, several types of proposition which are or may be called 'laws'. […] As examples of laws of logic, we shall instance the Law of Excluded Middle in the formulation 'Every proposition is either true or false' and the Law of Contradiction in the formulation 'No proposition is both true and false'. (von Wright, 1963, pág. 12)

Uno podría preguntarse qué tipo de normatividad tienen las leyes de la lógica y las matemáticas considerando que el término 'ley' es ambiguo. Es decir, no basta con decir que hay leyes, sino que hay que decir si están describiendo regularidades de la realidad como las "leyes de la naturaleza", si están señalando permisos, obligaciones, prohibiciones, etc. como las leyes del Estado, si tan sólo constituyen y determinan un juego simbólico que por casualidad sirve para modelar algún aspecto de la realidad, etc.

En esto consiste el problema de la normatividad de la lógica y las matemáticas, en averiguar a qué clase de normatividad pertenecen sus leyes o reglas, dado que su aparente independencia de la experiencia hace dudosa la idea de que su normatividad sea descriptiva como en otras ciencias, y por su objetividad y no-arbitrariedad no es obvio que su normatividad sea como la de las leyes del Estado o las reglas de un juego.

En este primer capítulo se tratarán en conjunto las leyes lógicas y las de la *aritmética*, debido a que la cuestión de si hay una conexión entre ellas y cuál es esa conexión resulta importante para los autores que se revisarán: Frege, Russell y Wittgenstein. La conexión entre leyes de la lógica y leyes de la matemática que propone Frege, por ejemplo, es que ambas son indispensables para el pensamiento:

> W]e have only to try denying any of […] [the laws of arithmetic and logic], and complete confusion ensues. Even to think at all seems no longer possible. The basis of arithmetic lies deeper, it seems, than that of any empirical sciences, and even than that of geometry. The

> truths of arithmetic govern all that is numerable. This is the widest domain of all; for to it belongs not only the actual, not only the intuitable, but everything thinkable. Should not the laws of number, then, be connected very intimately with the laws of thought? (21) (Frege, 1960)

Esto sirve para plantear la cuestión de la normatividad en la lógica junto con la de la normatividad matemática aún de cara al fracaso del proyecto logicista, en el sentido de que tanto leyes lógicas como aritméticas podrían considerarse, como sugiere Frege, conectadas íntimamente con todo lo que es pensable. Sin embargo, más adelante, al explorar la postura del TLP, se verá que la teoría ahí propuesta deja lugar a algún tipo de diferencia entre las afirmaciones de la lógica y las matemáticas, por lo que cabe la posibilidad de que sus normatividades sean distintas.

1.1.1 Aproximaciones al normativismo

Hay varias cuestiones en torno a la lógica y las matemáticas que nos aproximan a su carácter normativo: (i) la cuestión de trazar una distinción entre lógica y psicología, (ii) cómo caracterizar el quehacer de la lógica y las matemáticas, (iii) la cuestión de la dirección de ajuste intencional de las expresiones lógicas y matemáticas, (iv) el problema de dar cuenta de su objetividad y a prioricidad. Revisaremos estas aproximaciones a continuación. La siguiente cita de Kant ofrece un esbozo de algunas de estas intuiciones:

> Logic is a science of reason...a science a priori of the necessary laws of thought, not in regard to particular objects, however, but to all objects in general;-hence a science of the correct use of the understanding and of reason in general, not subjectively, however, i.e., not according to empirical (psychological) principles for how the understanding does think, but objectively, i.e., according to principles a priori for how it ought to think. (Kant, 1992, pág. 531)

En cuanto a la cuestión (i), si bien tanto lógica como psicología estudian el *pensamiento*, se distingue que la psicología estudia cómo *de hecho* pensamos mientras que la lógica estudia cómo *deberíamos* pensar. Es decir, el *hecho* psicológico es que algunas veces pensamos correctamente y otras veces cometemos errores de razonamiento, pero el *criterio* para decidir si estamos pensando correcta o incorrectamente es dado por la lógica, ella estudia los criterios de corrección para el razonamiento. Esta distinción sugiere que la normatividad de la lógica es prescriptiva simplemente porque nos dice qué está prohibido, qué es obligatorio, qué está permitido, etc. al pensar.

Conectada con esta distinción se encuentra la cuestión (ii), cómo caracterizar el estudio de la lógica: (a) la lógica *describe* las condiciones de validez del razonamiento o (b) la lógica *prescribe* cómo *debemos* razonar. Hay una tensión entre estas dos afirmaciones porque en una se habla de una investigación sobre ciertos hechos con base en los cuales se establecen leyes descriptivas (las condiciones de validez del razonamiento) y la otra puede concebirse como una labor de *establecer* criterios de validez por medio de leyes prescriptivas que prohíben, permiten, obligan, etc. sobre el pensamiento. El *tipo* de justificación que requiere establecer prescripciones (criterios pragmáticos, convencionales, técnicos etc.) es distinto al tipo de justificación que requiere aseverar descripciones (verdad, evidencia, etc.), así que la manera en que se entiende la normatividad de la lógica cambia sustancialmente dependiendo del tipo de leyes que uno defienda que están en juego.

Otra manera de aproximarse a la normatividad de las ciencias formales es (iv) a partir de su carácter a priori, su independencia de la experiencia. Esto involucra a todas las expresiones de las ciencias formales y no solamente a lo que llamamos sus "leyes". Meter dos objetos en una bolsa y luego otros dos y luego contar que hay cinco objetos en la bolsa nos haría suponer que ya había antes un objeto en la bolsa o que contamos mal, no que dos más dos no sea igual a cuatro. Es decir, cualquiera que sea el criterio de validez para '2+2=4', es independiente de la experiencia.[1]

La conexión de esto con la normatividad se encuentra en la aproximación (iii): una manera de explicar esta independencia sería considerar que la *dirección de ajuste intencional* de las expresiones matemáticas no es del lenguaje al mundo, es decir, que son independientes de los hechos porque no están describiendo hechos, sino prescribiendo normas. Es decir, la

[1] En respuesta a un señalamiento del doctor Víctor Cantero Flores sobre el uso habitual del concepto de "validez", aclaro que me parece peligroso hablar de "la verdad de '2+2=4'" en este contexto, dado que justamente se está cuestionando si este tipo de expresiones hablan sobre hechos o prescriben sobre cómo pensar o cómo manipular símbolos, etc. Si estuvieran prescribiendo, ¿en qué sentido podrían ser verdaderas o falsas? Por eso preferí hablar de "validez" aunque sea para plantear la cuestión, pero hablaré de "*criterio* de validez" para dejar aún más abiertas las posibilidades al tipo de justificación que requieran las ecuaciones (ya sea apelar a otras normas, contrastar con hechos generales, etc.)

peculiaridad estaría en el modo de sus expresiones (prescriptivo y no aseverativo) y no en su contenido (psicológico, abstracto, ideal, etc.).

> […] los miembros de la clase directiva de los actos de habla --órdenes, mandatos, ruegos. etc.- y los miembros de la clase conmisiva -promesas, juramentos, compromisos, etc.--: no se supone que deban encajar con una realidad que existe independientemente, sino que más bien se supone que deben producir cambios en el mundo de manera que el mundo encaje con el contenido proposicional del acto de habla; y, en la medida en que lo hacen o no, no decimos que son verdaderos o falsos, sino cosas tales como que son obedecidos o desobedecidos, satisfechos, cumplidos, mantenidos o rotos. (Searle, 1999, pág. 23)

> Si el enunciado no es verdadero, es el enunciado el que falla, no el mundo; si la orden es desobedecida o la promesa rota no es la orden o la promesa lo que falla, sino el mundo en la persona del que desobedece la orden o rompe la promesa. *Intuitivamente podríamos decir que la idea de dirección de ajuste es la de responsabilidad de ajustar*. Si el enunciado es falso, la culpa es del enunciado (dirección de ajuste palabra-a-mundo). Si la promesa se rompe, la culpa es del que promete (dirección de ajuste mundo-a-palabra). (Searle, 1999, pág. 23) (cursivas añadidas).

Es así como la idea de que las expresiones de la lógica y las matemáticas son prescriptivas -incluidas sus leyes fundamentales- armoniza con su carácter a priori: no será ningún hecho del mundo lo que invalide una expresión lógica o matemática porque, siendo sus expresiones prescriptivas, la responsabilidad de ajustar recae más bien en quienes obedezcan o desobedezcan estas leyes.

Sin embargo esto no agota el problema porque la postura prescriptivista debe una explicación de por qué la lógica y la aritmética no son arbitrarias, sino objetivas y en algún sentido importante relacionadas con lo que consideramos verdadero, lo cual sí puede explicar quien considera que estas leyes están describiendo hechos objetivos.

> The a priori nature of the laws of logic seems easier to reconcile with a view of them as prescriptive laws. Shall we then say that the laws of logic prescribe how we ought to think and how we may and must not think? Perhaps we can say this, but it is also obvious on reflection that the sense in which the laws of logic ‘prescribe’ (order, permit, prohibit) is a different sense from that in which the laws of the state prescribe. (von Wright, 1963, pág. 12)

Hay una diferencia crucial entre desobedecer las leyes de un Estado, que son claramente prescriptivas, y desobedecer las leyes de la lógica y las matemáticas. En el primer caso la desobediencia no entra en conflicto con la verdad, mientras que razonar utilizando reglas de inferencia lógicamente inválidas o calcular números con reglas distintas de las que regularmente usamos sí entra en conflicto con la verdad, lo cual apoya más bien la idea de que las leyes en cuestión son descriptivas de algún ámbito de la realidad.[2]

> The belief in the law of contradiction is a belief about things, not only about thoughts. It is not, e.g., the belief that if we *think* a certain tree is a beech, we cannot at the same time *think* that it is not a beech; it is the belief that if a tree *is* a beech, it cannot at the same time *be* not a beech. Thus the law of contradiction is about things, and not merely about thoughts; and although belief in the law of contradiction is a thought, the law of contradiction itself is not a thought, but a fact concerning the things in the world. If this, which we believe when we believe the law of contradiction, were not true of the things in the world, the fact that we were compelled to *think* it true would not save the law of contradiction from being false; and this shows that the law is not a law of *thought*. (Russell, The Problems of Philosophy, 1912, pág. 42) .
>
> Whereas the man who plays against the rules of a game sins only against the rules, the man who thinks against the rules of logic is in conflict with truth. The rules of a game are man-made and can be altered by convention or at will. The standards of truth are not conventional. (von Wright, 1963, pág. 14).

Uno podría entonces decantarse por una postura descriptivista, dado que considerar prescriptivas las leyes de la lógica y las matemáticas no parece poder rescatar su carácter objetivo. Von Wright señala algunos de los problemas que conlleva la postura descriptivista:

---

[2] Un ejemplo sería que si alguien razona tomando como ley que afirmando la verdad del consecuente de un condicional se puede afirmar la verdad del antecedente, podría concluir una falsedad. El Dr. Silvio Pinto, lector de esta tesis, señala el ejemplo de la matemática intuicionista, donde se razona sin utilizar la ley del tercero excluido y no hay conflicto con la verdad. Me parece que este ejemplo mostraría solamente que el mero hecho de razonar sin utilizar el principio del tercero excluido *no es suficiente* para entrar en conflicto con la verdad, así como abstenerse de utilizar la regla del modus tollens tampoco basta para entrar en conflicto con la verdad, pero el punto es que no cualquier regla es una regla que permita razonar con verdad porque sería posible entrar en conflicto con ella (por ejemplo, afirmar el antecedente afirmando el consecuente) y que en cambio desobedecer las reglas de tránsito, por ejemplo, no podría entrar en conflicto con la verdad.

> […] what do they describe? The way people think? This suggestion is not very satisfactory. For, first of all, it is not clear in itself what it weans to think according to the law, for example, that no proposition is both true and false. Secondly, the idea that the laws of logic describe how people think seems difficult to reconcile with the notion that these laws are a priori and thus true independently of experience—including experience of how people think. (von Wright, 1963, pág. 12)

Considerar que las leyes de la lógica describen cómo la gente *de hecho* piensa entra en conflicto con la intuición de que las leyes de la lógica son a priori o independientes de la experiencia. Además se borra la distinción entre psicología y lógica que reside justamente en que la psicología nos dice cómo la gente *de hecho* piensa y, la segunda, cómo distinguir entre los pensamientos correctos e incorrectos.

Sin embargo, el psicologismo no es la única alternativa para quien prefiera defender que estas leyes son descriptivas. Podría decirse que describen los rasgos más generales de la realidad, leyes de los conceptos, leyes de la verdad, leyes de una realidad abstracta. Es decir, la postura descriptivista no conlleva necesariamente un psicologismo, pero sí debe explicar el carácter a priori de las leyes de la lógica y matemáticas según la realidad que estas se proponga que están describiendo.[3]

Otro problema para la postura prescriptivista que no tiene la postura descriptivista tiene que ver justamente con el uso del concepto *a priori*.[4] Cito el comentario del Dr. Víctor Cantero: “Ser a priori es una propiedad epistémica que se atribuye o bien a oraciones afirmativas o proposiciones, las cuales son candidatos a tener un valor de verdad. Pero si las afirmaciones o proposiciones matemáticas son prescripciones que no son verdaderas ni falsas, entonces no pueden ser a priori (o a posteriori). ¿Cómo resolver esta tensión?”. Estas problemáticas se ordenarán en la siguiente sección.

1.1.2 Planteamiento del problema

---

[3] Dicho de otra forma, desde el punto de vista de la filosofía del lenguaje, la dirección de ajuste intencional de las expresiones lógicas no parece ser del mundo al simbolismo.

[4] Este problema me fue señalado por el lector de esta tesis, el doctor Victor Cantero Flores.

El problema a grandes rasgos es que si se dice que las leyes de lógica y matemáticas son descriptivas, hace falta explicar por qué son válidas independientemente de la experiencia, es decir, explicar su carácter a priori. Si se dice que son prescriptivas, hace falta explicar por qué no son arbitrarias, cuál es la base objetiva que respalda el que tengamos la lógica y las matemáticas que de hecho tenemos, y en qué sentido son a priori si son prescripciones y por ello no son candidatas a un valor de verdad.

Pueden considerarse las siguientes dos maneras de plantear las disyuntivas filosóficas a las que nos enfrenta la cuestión de la normatividad de las ciencias formales:

1) Por un lado, está la cuestión de si, en general, las expresiones matemáticas son descriptivas o prescriptivas.

Si *describen* alguna realidad (ya sea empírica, metafísica, platónica, psicológica, lingüística, etc.) hay que explicar el carácter sui generis de la contrastación entre sus descripciones y lo que describen; el hecho de que una vez demostrada una expresión matemática parece ser más bien irrefutable por cualquier tipo de experiencia (e.g. un platonista que acepta objetos abstractos, fuera del espacio y el tiempo, apela a este carácter abstracto, independiente del mundo empírico, para explicar su independencia del mundo físico, pero debe una explicación del acceso epistémico a estos objetos).

Si más bien *prescriben* (ya sea manipulación de símbolos, inferencias, etc.) hay que explicar qué tipo de prescripciones están en juego (condicionales, categóricas, etc.), dar cuenta tanto de la *justificación* para estas prescripciones (que varía según el tipo de prescripción y considerando que no se puede apelar a nada parecido a un concepto verdad por correspondencia), de su peculiar fuerza normativa (que no parecen ser arbitrarias ni convencionales) y explicar su verdad como una ilusión dado que se supone que las prescripciones no son candidatas a tener un valor de verdad.

2) Por otro lado, se encuentra la cuestión de si la normatividad en las matemáticas es fundamental o derivada.

En analogía[5] con la cuestión de si el significado determina o es determinado por las reglas para el uso del lenguaje, se puede plantear la cuestión de si las reglas matemáticas constituyen lo que cuenta como verdades matemáticas[6] o si hay verdades matemáticas que determinan las reglas que han de utilizarse en la práctica matemática.

Claramente podemos trazar conexiones entre las distintas posturas en ambos puntos:

Alguien que de entrada acepta que las matemáticas describen algún ámbito de la realidad (punto 1), no podría sostener que la normatividad matemática es fundamental o constitutiva del quehacer matemático (punto 2), es decir, tiene que explicar la normatividad matemática como derivada de aquello que está siendo descrito por las matemáticas, o bien, si niega incluso la normatividad matemática, tendrá que explicar de dónde surge la *ilusión* de normatividad.

En cambio, alguien que acepta que las matemáticas prescriben no podría tener interés en sostener que la normatividad matemática es derivada, pues ya de entrada asume las reglas como constitutivas de la validez matemática, sólo queda pendiente la pregunta por la validez objetiva de las reglas mismas. Es decir, ya que estas reglas no descansan en hechos matemáticos, sino que los constituyen, podría aún plantearse la pregunta por el fundamento y validez objetiva de estas reglas, ya no directamente por la validez matemática.

1.1.3 Ventajas y desventajas del prescripcionismo

Como el presente trabajo se concentra en la filosofía del *Tractatus Logico-Philosophicus,* y es una postura que parece inclinarse por la idea de que las leyes de las ciencias formales son prescriptivas, hay que mencionar las dificultades y ventajas particulares que saltan a la vista en una postura normativista sobre las matemáticas en el sentido de 1), es decir, en el sentido de que su modo es prescriptivo y no aseverativo.

Las ventajas serían:

---

[5] La idea de la analogía es meramente aclarar el punto, en ambos casos hay una postura a considerar solamente invirtiendo lo que está en el fundamento: en el caso del lenguaje, significado/reglas; en el caso de lógica y matemáticas, verdad/reglas. No es que por analogía con la problemática mencionada en filosofía del lenguaje se pueda defender la idea de que las reglas matemáticas constituyen la verdad en matemáticas.

[6] Más afín a las etapas posteriores de Wittgenstein y, en general, a cualquier postura prescriptivista.

i) Si de entrada se considera que las matemáticas expresan reglas o permisos inferenciales para manipular símbolos, ya no hace falta preguntarse qué realidad están describiendo ni cómo tenemos acceso a ella.

ii) Rescata la idea de que no es ningún aspecto del mundo empírico lo que *confirma* o *refuta* a las matemáticas. Es decir, hace sentido de su aparente carácter a priori.

Las dificultades para la postura normativista serían:

i) Ofrecer un criterio de justificación adecuado para la adopción de estas reglas de tal manera que no se trivialice el conocimiento matemático, es decir, explicar por qué se aceptan ciertas reglas y no otras[7]. Este es un punto muy sensible, ya que fácilmente puede caerse en una relativización del conocimiento matemático y parece que uno de los enigmas a explicar es más bien la no-arbitrariedad de las matemáticas.

ii) Hace falta aclarar la manera en que las expresiones de la lógica y las matemáticas *adquieren significado*, ya que aún si las ciencias formales no fueran más que un sistema de reglas para manipular símbolos, tienen una dimensión semántica de la que carecen otros sistemas de reglas como los juegos.[8] Debe aclararse cuál es la aportación semántica de una expresión matemática en una proposición.[9]

iii) Explicar en qué sentido armoniza mejor con la idea de que lógica y matemáticas son a priori, dado que no aseveran proposiciones. Quizá debe explicarse en términos de una ilusión de aprioricidad. Wittgenstein en el TLP por ejemplo afirma que no existen verdades a priori (2.225).

---

[7] Me parece que el TLP sí se ocupa de este problema directamente, al proponer que las reglas en las que se basan las operaciones tienen la tarea de expresar relaciones formales entre símbolos, si bien no de describirlas. Esto se abordará en el último capítulo, una vez expuestas las partes de la teoría necesarias para tratar la teoría de las operaciones del TLP.

[8] Von Wright señala que uno de los retos para quien defienda que la normatividad de las ciencias formales es análoga a la de las reglas de un juego, es explicar la dimensión semántica de los símbolos con los que se está "jugando", algo que está ausente en los juegos.

[9] Aunque expresiones como las tautologías y ecuaciones no expresaran proposiciones por considerarse prescriptivas, hay expresiones de lógica y matemática que sí tienen relevancia semántica y eso es lo que debe explicarse. Por ejemplo, considérense las afirmaciones "hay cinco manzanas en el escritorio" y "hay cuatro manzanas en el escritorio". Hay una diferencia entre el significado de ambas proposiciones y reside en las expresiones numéricas que en ellas aparecen.

Por último, un asunto que no es claramente una ventaja o una desventaja es el de la aplicabilidad de las matemáticas. Para algunos, esta postura ofrece una solución al problema de la aplicabilidad de las matemáticas *en el discurso* empírico:

> Arithmetic equations do not describe relations between abstract entities, but are norms for describing the numbers of objects in the empirical world, that is, substitution rules. '2 + 2 = 4' licenses one to pass from 'There are two pairs of apples in the bucket' to 'There are four apples in the bucket.' By the same token, an inequation like '4 > 3' permits the characterizing of a quartet as larger in number than a trio, and precludes 'This trio is larger in number than that quartet'. Geometrical propositions are rules for describing the shapes of and spatial relations among objects, and for the use of words like 'length', 'equal length', etc. They also set up ideals or norms for describing a measurement as accurate. 'The sum of the angles of a triangle is 180°' specifies that if figure A is a triangle, its angles must add up to 180°.
>
> The idea that mathematical propositions are norms of description correctly explains applied mathematics, by identifying the role of mathematical propositions within empirical discourse. (Glock, 1996, pág. 234)

Pero haría falta evaluar si explicar la aplicabilidad de las expresiones matemáticas en el discurso empírico es suficiente para explicar la aplicabilidad y relevancia epistemológica de las matemáticas en las ciencias naturales. Por ejemplo, Wigner problematiza la cuestión de la aplicabilidad en su famoso “The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences” y no es obvio que el aspecto discursivo de la aplicación de las matemáticas en una teoría sea suficiente para dar cuenta de la mejora en predicciones empíricas de la cienca, parece haber una mejora en la comprensión del mundo y no solo en la economía o eficiencia lingüística de la jerga científica.

1.2 Frege, Russell y Wittgenstein: descripción o prescripción

Como ejemplos de posturas que ofrecen una respuesta a la cuestión de la normatividad matemática se revisarán muy brevemente las filosofías de Frege y Russell, y el énfasis se centrará en la filosofía de las matemáticas del Tractatus Logico-Philosophicus de Wittgenstein, debido a que es una cuestión a discutir cuál es exactamente su filosofía de las matemáticas en esta obra y porque suele asumirse que su postura es que las expresiones de las ciencias formales están basadas fundamentalmente en reglas y suele rechazarse su postura como incapaz de dar cuenta de la validez objetiva de estas expresiones.

Sin embargo, a lo largo de este trabajo se defenderá que la cuestión es más intrincada y que esta filosofía no deriva en la falta de objetividad de la lógica y las matemáticas a pesar de que considera a sus expresiones como prescripciones para manipular símbolos.

La postura del TLP ofrecería una solución a las disyuntivas filosóficas planteadas en la sección 1.1.2 del presente capítulo y vale la pena revisar antes cómo abordan la cuestión sus maestros Frege y Russell.

1.2.1 Frege: leyes de la verdad y leyes del pensamiento

En la filosofía de Frege hay principalmente dos puntos que resaltar sobre este problema de la normatividad: (i) el hecho de que hace explícita la cuestión entre leyes descriptivas y leyes prescriptivas y (ii) su explicación de la relación entre las dimensiones descriptiva y prescriptiva de las leyes de la lógica y la aritmética.

En los textos de Frege aparece una distinción explícita entre leyes descriptivas y prescriptivas:

> It is commonly granted that the logical laws are guidelines which thought should follow […]; but it is too easily forgotten. The ambiguity of the word ‘law’ here is fatal. In one sense it says what is, in the other it prescribes what ought to be. Only in the latter sense can the logical laws be called laws of thought, in so far as they legislate how one ought to think. (15) (Frege, 1960).

No sólo se hace explícita la distinción, sino que también se defiende en este pasaje una postura prescriptivista respecto de las leyes lógicas, si han de entenderse como ‘leyes del pensamiento’[10]. La imagen de la lógica que se presenta aquí es la de una actividad que *legisla* sobre cómo debemos pensar, es decir, su postura es más bien prescriptivista. Pero en otros pasajes enfatiza más bien su carácter descriptivo al considerar que las leyes de la lógica y la aritmética se parecen más a las leyes de la naturaleza debido a que, como ciencia

[10] A continuación se señalará la crucial distinción fregeana entre leyes del pensamiento y leyes de la verdad.

genuina, su tarea es descubrir verdades, es decir, por su conexión con la realidad o con 'lo que ocurre':

> To discover truths is the task of all sciences; it falls to logic to discern the laws of truth. The word 'law' is used in two senses. When we speak of moral or civil laws we mean prescriptions, which ought to be obeyed but with which actual occurrences are not always in conformity. Laws of nature are general features of what happens in nature, and occurrences in nature are always in accordance with them. It is rather in this sense that I speak of laws of truth. -'Logical Investigations: I Thoughts' 351, en (Mezzadri, 2015).

Aunque aquí también se hace la distinción entre tipos de leyes, se ofrece una imagen de la lógica como una ciencia que trata de discernir cuáles son *de hecho* las 'leyes de la verdad'. La ambigüedad entre estas dos caracterizaciones del quehacer de la lógica remite al problema planteado en el primer capítulo del presente trabajo donde se plantean dos maneras de caracterizar el quehacer de la lógica: (i) la lógica *estudia* las condiciones de validez del pensamiento y (ii) la lógica *prescribe* cómo *debemos* pensar.

Frege no se decanta terminantemente por ninguna de las dos posturas porque más bien intenta explicar una en términos de la otra. Así propone Mezzadri (2015) que se entienda la explicación de la normatividad de la lógica en Frege, tratando de armonizar lo descriptivo y lo prescriptivo de estas leyes. Citando, como lo hace Mezzadri, a Peter Sullivan:

> It would be wrong […] to say that for Frege logic is a prescriptive rather than descriptive discipline. That […] is only to make the best of a bad job. Prescriptions must always rest on a basis of descriptive theory: […] logic in its prescriptive aspect rests on its more fundamental characterization as comprising laws of truth. (683)[11], en (Mezzadri, 2015)

Aunque Frege reconoce que hay ambos tipos de normatividad involucrados en la lógica y la aritmética, parece que considera fundamental su carácter descriptivo. Además ofrece respuestas interesantes a los retos del descriptivismo, en buena medida gracias a la distinción entre leyes de la verdad y leyes del pensamiento. La distinción entre lógica y psicología, por ejemplo, sí logra mantenerse:

[11] Sullivan, Peter. 'Frege's Logic.' Handbook of the History of Logic. Eds. D. Gabbay and M. Woods. Vol. 3. Elsevier BV, 2004.
659–750.

> […] on Frege's conception, only in so far as the laws of logic are descriptive laws of truth can they have a prescriptive role in guiding one's thinking. Laws of logic are laws of thought only because they are, at bottom, laws of truth: in their being laws of truth, laws of logic are laws of judgement and of valid inference, for from their role as descriptive laws of what is true, there follow prescriptions about how one ought to think if one wants to attain truth, namely about how judgements and inferences ought to be performed. (Mezzadri, 2015, pág. 586).

La lógica no prescribe sobre qué debería ser verdadero, sino sobre cómo se debería pensar *si se ha de pensar con verdad*. La base de estas *prescripciones sobre el pensamiento* son *hechos sobre la verdad*, no hechos sobre nuestras mentes. Es decir, las leyes de la lógica no son descriptivas sobre el pensamiento sino sobre la verdad, y no son prescriptivas sobre la verdad sino sobre el pensamiento. Las leyes de la psicología en cambio sí son leyes descriptivas sobre el pensamiento, por ello se puede seguir diciendo que la psicología se ocupa de cómo de hecho pensamos y la lógica de cómo debemos pensar: la lógica se ocupa en lo fundamental de discernir leyes descriptivas sobre la verdad y con base en ellas hace prescripciones sobre el pensamiento.

> '[f]rom the laws of truth there follow prescriptions about asserting, thinking, judging, inferring. And we may very well speak of laws of thought in this way too' ('Logical Investigations: I Thoughts' 351, en (Mezzadri, 2015)

Hay mucha discusión con respecto a la concepción del concepto de "verdad" de Frege, lo cual dificulta hacer clara la distinción entre leyes de la verdad y leyes del pensamiento. Pero podría aventurarse que la distinción pretende separar dos aspectos de las inferencias lógicas. El aspecto descriptivo sería que (i) es un hecho que si p implica q es verdadero y p es verdadero, entonces q es verdadero; de ahí se seguiría el aspecto prescriptivo: que (ii) si se juzga que p implica q y que p, entonces está permitido juzgar que q. La justificación para esa permisión es el hecho (i): la relación entre la verdad de p implica q, la verdad de p y la verdad de q.

A manera de observación, las prescripciones de la lógica de acuerdo con Frege están condicionadas a razonar con verdad. No son pues prescripciones categóricas, sino hipotéticas, dependen de un compromiso con la verdad.

1.2.2 Russell: el carácter a priori

La filosofía de las matemáticas de The Principles of Mathematics (1903) es representativa de una postura descriptivista sobre las leyes de la lógica y, por el logicismo, de la aritmética. En los pocos pasajes donde trata el asunto de las reglas y hechos lógicos, su postura es decididamente que los hechos son descritos por las reglas, es decir, son fundamentales los hechos y derivadas las reglas.

> Our calculus studies the relation of *implication* between propositions. (Russell, The Principles of Mathematics, 2010, pág. 14).

> The fact is, of course, that any implication warranted by a rule of inference does actually hold, and is not merely implied by the rule. (Russell, The Principles of Mathematics, 2010, pág. 42).

Para Russell, cualquier relación de implicación entre proposiciones se da como un hecho antes de que se haga explícita la regla de inferencia que la respalda, no al revés. No es la regla lo que conlleva la existencia de la relación lógica de implicación, sino que la relación se da y la regla da cuenta de ella. En este sentido, su postura es claramente que las leyes de la lógica son fundamentalmente descriptivas.

> What symbolic logic does investigate is the general rules by which inferences are made […]. (Russell, The Principles of Mathematics, 2010, pág. 11).

Russell caracteriza a la lógica como una *investigación* de las reglas generales de inferencia y mantiene esta postura en textos posteriores como *Our Knowledge of the External World*, y como también es posterior su famosa caracterización de la lógica como un estudio de los rasgos más generales de la realidad, se mantiene su descriptivismo.

Pero, a diferencia de Frege, Russell sí menciona la relación de la aprioricidad de lógica y matemáticas con su normatividad. En "The problems of philosophy" de 1912, por ejemplo, argumenta en contra del término "leyes del pensamiento" cuando se interpreta como leyes de lo que *debemos* pensar, es decir, argumenta en contra de una interpretación prescriptiva de las leyes de la lógica y las matemáticas. En este argumento, considera que la motivación principal de esta postura es un intento por explicar el carácter a priori de los juicios de estas disciplinas, un intento fallido a su parecer.

> Apart from the special doctrines advocated by Kant, it is very common among philosophers to regard what is a priori as in some sense mental, as concerned rather with the way we must think than with any fact of the outer world.
>
> […] This [the law of contradiction] is commonly stated in the form 'Nothing can both be and not be', which is intended to express the *fact* that nothing can at once have and not have a given quality.
>
> Now what makes it natural to call this principle a law of thought is that it is by thought rather than by outward observation that we persuade ourselves of its necessary truth. When we have seen that a tree is a beech, we do not need to look again in order to ascertain whether it is also not a beech; thought alone makes us know that this is impossible. (Russell, The Problems of Philosophy, 1912, pág. 88) (Subrayado añadido)

El argumento de Russell pretende mostrar, primero, por qué parece tener sentido la idea de que los juicios a priori, como las leyes de la lógica, sean leyes del *pensamiento*, y lo adjudica a que es por el *pensamiento*, no por contrastación empírica, como se juzga su validez. Esto remite a una de las vías de aproximación a la normatividad de la lógica y las matemáticas mencionada en la primera parte de este capítulo, de alguna manera está considerando la idea de que hay algo distinto en la dirección de ajuste intencional de estas expresiones de la lógica y las matemáticas en contraste con las ciencias empíricas. Sin embargo, Russell argumenta que considerarlas como leyes sobre cómo debemos pensar sería un error:

> But the conclusion that the law of contradiction is a law of *thought* is nevertheless erroneous. What we believe, when we believe the law of contradiction, is not that the mind is so made that it must believe the law of contradiction. *This* belief is a subsequent result of psychological reflection, which presupposes the belief in the law of contradiction. The belief in the law of contradiction is a belief about things, not only about thoughts. It is not, e.g., the belief that if we *think* a certain tree is a beech, we cannot at the same time *think* that it is not a beech; it is the belief that if a tree *is* a beech, it cannot at the same time *be* not a beech. Thus the law of contradiction is about things, and not merely about thoughts; and although

> belief in the law of contradiction is a thought, the law of contradiction itself is not a thought, but a fact concerning the things in the world. If this, which we believe when we believe the law of contradiction, were not true of the things in the world, the fact that we were compelled to *think* it true would not save the law of contradiction from being false; and this shows that the law is not a law of *thought*. (Russell, The Problems of Philosophy, 1912, pág. 89)

Russell identifica la aseveración de que las leyes de la lógica son prescriptivas sobre lo que debemos pensar con la idea de que están aseverando que la mente está constituida de tal manera que *debe* pensar según esas leyes. Relacionar el carácter a priori de estas leyes con nuestras características mentales chocaría con la intuición de que estas leyes están relacionadas con la verdad y que su validez no depende solamente de cómo sea nuestra mente, sino que es mucho más general e independiente de la mente humana[12]. Si la validez de estas leyes dependiera de nuestras estructuras mentales, nada más allá de estas estructuras aseguraría que no fueran falsas, pero como parecen ser necesariamente verdaderas, resulta absurdo pensar que dependan de nuestra constitución mental.

> A similar argument applies to any other *a priori* judgement. When we judge that two and two are four, we are not making a judgement about our thoughts, but about all actual or possible couples. The fact that our minds are so constituted as to believe that two and two are four, though it is true, is emphatically not what we assert when we assert that two and two are four. And no fact about the constitution of our minds could make it *true* that two and two are four. Thus our *a priori* knowledge, if it is not erroneous, is not merely knowledge about the constitution of our minds, but is applicable to whatever the world may contain, both what is mental and what is non-mental. (Russell, The Problems of Philosophy, 1912, pág. 89).

Sin embargo, este argumento en contra del término "leyes del pensamiento" no afecta a la postura de Frege. Lo que Russell ataca es la idea de que la lógica *se basa en hechos sobre nuestras mentes* cuando la base para esa afirmación es que la justificación de sus

[12] Me parece que la noción de a priori que Russell tiene en mente es justamente la kantiana, pero como su argumento está intentando reconstruir una postura que confunde el que cierto conocimiento sea justificado a priori con que cierto conocimiento sea conocimiento sobre nuestras estructuras mentales, la noción de a priori en estos pasajes es justo lo que no queda claro, dado que Russell intenta mostrar que se está entendiendo equivocadamente.

afirmaciones es a priori. Pero Frege defiende que la lógica *sí describe hechos* sobre la verdad y que con base en esas descripciones *prescribe* leyes del pensamiento, pero dicha distinción no apela en ningún momento el carácter a priori de la lógica.

Russell en cambio no menciona la dimensión prescriptiva que sí puede tener la lógica y que la distingue de la psicología porque adjudica el habla de prescripciones a una confusión entre la aprioricidad y la prescriptividad. Aún así no cae en el psicologismo, ya que la lógica estaría describiendo hechos generales del mundo y no particularmente de nuestra constitución mental.

La postura de Russell tiene entonces la virtud de ser completamente descriptivista y aún así mantener una distinción entre los estudios de la lógica y la psicología: la lógica estudia los rasgos más generales del mundo, su estudio no se interesa particularmente por la mente humana.

Sin embargo, tiene el defecto de que no intenta lidiar con el carácter prescriptivo de la lógica, ni siquiera en términos de una ilusión de prescriptividad. En este sentido, la respuesta de Frege es más completa porque rescata la intuición de que la lógica y las matemáticas se ocupan de verdades y a la vez que prescriben guías para distinguir entre pensamiento correcto e incorrecto.

1.2.3 Wittgenstein: Operaciones y reglas

La postura de Wittgenstein respecto de la normatividad de las ciencias formales en el TLP se puede encontrar en tres de sus principales tesis:

1) La aritmética consiste fundamentalmente en operaciones, que son manipulaciones simbólicas basadas en reglas.

> The fundamental idea of math. is the idea of calculus represented here by the idea of operation. The beginning of logic presupposes calculation and so number. Number is the fundamental idea of calculus and must be introduced as such (Lewy, 1967, pp. 421–2), en (Floyd, Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics, 2005)

> “The concept of the operation is quite generally that according to which signs can be constructed according to a rule” (NB, entry 22/11/16), en (Floyd, Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics, 2005)

2) Los resultados de estas manipulaciones, las ecuaciones y tautologías, expresan a su vez reglas; es decir, las expresiones matemáticas no sólo son resultados de reglas de manipulación simbólica, sino que constituyen a su vez reglas.[13]

3) “El cálculo no es un experimento”; hay una conexión entre la necesidad, la informatividad y la aprioricidad de las ciencias formales. El cálculo no revela información a posteriori y contingente sobre el mundo, sino que ofrece un resultado que se reconoce a priori como válido, sin necesidad de contrastarse con la experiencia, que no es informativo y que, solamente porque trata con aspectos *formales* de la representación y *no de contenido*, es necesario o válido en todo mundo posible.

Sin embargo, dar preeminencia a las reglas de manipulación simbólica conlleva los problemas del prescripcionismo del que se habló en la primera sección de este capítulo: entra en tensión con la intuición de que sí podemos hablar de ecuaciones verdaderas y falsas, o correctas e incorrectas, y que *no cualquier ecuación podría proponerse como una nueva regla para sustituir símbolos*. Las matemáticas *no son arbitrarias*, no dependen de la arbitraria voluntad de los matemáticos, sino que tienen un carácter *objetivo*. Si las ecuaciones no describen ningún hecho matemático en función del cuál sean verdaderas o falsas, hay que explicar por qué aún así podemos tener un criterio de validez objetivo para ellas.

La salida que ofrece la filosofía de Wittgenstein a estos problemas podría encontrarse en que su teoría distingue, de entre las reglas que rigen a los lenguajes, algunas que no son arbitrarias, e identifica parte de esas reglas con las reglas de la lógica.

---

[13] Las ecuaciones, por ejemplo, permiten sustituir símbolos con la garantía de que tienen el mismo significado. Las reglas de inferencia de la lógica se pueden expresar como tautologías y viceversa, toda tautología puede verse como una regla de inferencia. Así lo sugiere, por ejemplo, S. Pinto en “El Antiplatonismo del Tractatus”.

> 3.34 La proposición posee rasgos esenciales y casuales. Casuales son los rasgos que emanan del modo peculiar de elaboración del signo proposicional. Esenciales, sólo los que capacitan a la proposición para expresar su sentido.
>
> 3.341 Lo esencial en la proposición es, pues, lo común a todas las proposiciones que pueden expresar el mismo sentido.
>
> Y asimismo, generalmente, lo esencial en el símbolo es lo que todos los símbolos que pueden cumplir el mismo fin tienen en común.
>
> 3.3411 Cabría, pues, decir: el nombre genuino es lo que tienen en común todos los símbolos que designan el objeto. Se seguiría así, sucesivamente, que ninguna clase de composición resulta esencial al nombre.
>
> 3.342 En nuestras notaciones hay, ciertamente, algo arbitrario, pero *esto* no es arbitrario: que *si* hemos determinado arbitrariamente algo, entonces algo diferente ha de ser el caso. (Esto depende de la *esencia* de la notación).
>
> 5.475 Lo único que importa es formar un sistema de signos de un determinado número de dimensiones de una multiplicidad matemática determinada.
>
> 5.476 Está claro que aquí no se trata de un *número de conceptos fundamentales* que deben ser designados, sino de la expresión de una regla.
>
> 6.124 Las proposiciones lógicas describen el armazón del mundo o, más bien, lo representan. No "tratan" de nada. Presuponen que los nombres tienen significado y, las proposiciones elementales, sentido; y ésta es su conexión con el mundo. […] Decíamos que algo hay de arbitrario en los símbolos que usamos y algo hay que no lo es. En la lógica sólo esto se expresa: Pero ello quiere decir que en la lógica no expresamos *nosotros* lo que queremos con ayuda de los sígnos, sino que en la lógica es la propia naturaleza de los signos naturalmente necesarios lo que se expresa […] (Wittgenstein, 1999)

Para aclarar cuáles son estas reglas no-arbitrarias será necesario abordar la teoría pictórica y la metafísica del TLP y a esa tarea se dedica el segundo capítulo del presente trabajo, ya que estas reglas se basan en aspectos *formales* de las proposiciones (y en el TLP se ofrece una noción específica de estos aspectos).

> (5.2) Las estructuras de las proposiciones están en relaciones internas entre sí.

> (5.21) Podemos resaltar estas relaciones internas en nuestro modo de expresión representando una proposición como resultado de una operación que la obtiene a partir de otras proposiciones (las bases de la operación).

Otro asunto a considerar es que en el TLP no parece haber un logicismo y si acaso lo hubiera sería completamente distinto de los logicismos de Frege y Russell, pero sí hay una conexión entre lógica y matemáticas y hay que aclarar cuál es esa conexión según el TLP.

En principio, para Wittgenstein las expresiones lógicas son de distinto tipo de las expresiones aritméticas: las primeras, tautologías y contradicciones, son el resultado de operaciones de verdad –representadas por constantes lógicas- sobre proposiciones, ellas remiten a todo mundo posible o a ninguno respectivamente, no en virtud de un contenido proposicional, sino tan sólo en virtud de las propiedades formales de las proposiciones. Las expresiones numéricas se definen como iteraciones operacionales, las ecuaciones tan sólo expresarían la posibilidad de sustituir dos expresiones en virtud de que tienen el mismo significado[14], es decir, en virtud de que ambas pueden obtenerse de la misma iteración operacional.[15]

Para explicar el origen de las ecuaciones, Wittgenstein pretende derivar el concepto de número del concepto general de *operación*, que como ya se vio es un concepto normativo porque una operación es una regla para manipular símbolos, y dichas reglas se basan en aspectos formales de las proposiciones. Por lo tanto, si la teoría logra dar cuenta de la objetividad de la base para dichas reglas (los aspectos formales para las proposiciones), será capaz de dar cuenta de la objetividad del conocimiento matemático.

Se puede pensar la postura de Wittgenstein como un intento por mostrar que tiene sentido pensar las teorías lógicas de sus maestros como *cálculos* que *operan* con valores de verdad de proposiciones, así como en la aritmética se *opera* con números (es en este sentido que la

[14] Dicha postura sobre las ecuaciones, que solamente expresan una igualdad de significado, es ciertamente controversial y puede señalarse cuando menos el siguiente motivo para no estar de acuerdo con ella: en una ecuación como 3+1=4 la composicionalidad de lo que se encuentra del lado izquierdo (una operación aritmética sobre dos números) es bastante distinta de lo que se encuentra del lado derecho (tan solo un número), alguien como Frege podría argumentar que ambas expresiones refieren a un mismo objeto pero a través de distintos sentidos, es decir, sus significados no serían idénticos.

[15] Para aclarar por qué sólo en apariencia son descriptivas hay que considerar con cierto detalle las tesis de la teoría pictórica del lenguaje.

postura del TLP se acerca al formalismo), es decir, que lo fundamental tanto en lógica como en matemáticas es aquello que da sustento a las reglas de manipulación simbólica, las operaciones, y que por lo tanto lo que hay que averiguar es más bien si el concepto de operación es capaz de dar cuenta de la objetividad aparente de las ciencias formales. Considérense nuevamente las notas escritas en la copia del TLP de Frank Ramsey:

> The fundamental idea of math. is the idea of calculus represented here by the idea of operation. The beginning of logic presupposes calculation and so number. Number is the fundamental idea of calculus and must be introduced as such (Lewy, 1967, pp. 421–2), en (Floyd, Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics, 2005)

Quizás la diferencia más importante entre la filosofía de Wittgenstein y las de Frege y Russell sería que aunque los tres reconocen que hay diferencias entre las ciencias formales y las ciencias empíricas, Wittgenstein defiende que hay una distinción de *tipo* entre las primeras y las segundas, mientras que Frege y Russell parecen hacer más bien una distinción de *grado* de abstracción y generalidad.

1.3 Diferencia de grado o diferencia de tipo

El TLP ofrece una postura en la que se sugiere constantemente una distinción de *tipo* entre ciencias formales y ciencias empíricas, se sostiene que la justificación en las ciencias formales está dada por reglas de manipulación simbólica y no por contrastación empírica. Pero para no perder la objetividad de estas ciencias, Wittgenstein habla de que obedecen a propiedades y relaciones *formales*, en contraste con *materiales*. De esto se hablará a detalle en los capítulos siguientes, pero aquí se ofrece un esbozo general de cómo esta estrategia les confiere un carácter *trascendental*, el cual se abordará con mayor profundidad en el último capítulo, una vez expuesto el resto de su teoría.

En el libro *The New Wittgenstein*, Hilary Putnam escribe un capítulo llamado “Rethinking Mathematical Necessity” donde se resalta el carácter kantiano en la filosofía de Wittgenstein. Si bien no se centra en la filosofía del Tractatus, delinea algunas intuiciones filosóficas importantes que se mantendrán a lo largo de la carrera del filósofo vienés y que permiten ver en una perspectiva general sobre qué tipo de filosofía de las matemáticas intentaba hacer sentido.

En la primera parte, Putnam considera las críticas de Quine al convencionalismo y a la distinción analítico/sintetico. Quine sugiere que lo que nos queda después de esta crítica es asumir que la postulación de objetos matemáticos es tan razonable como la postulación de entidades físicas inobservables de las que hablan nuestras mejores teorías científicas, dado que las matemáticas están involucradas en todas ellas.

Putnam, buscando una salida a esta conclusión, reconsidera la idea kantiana de que la lógica es una condición para el pensar y no otra verdad empírica más, aunque fundamental, en la que se base nuestro conocimiento. No es, pues, que las *cosas en sí* de Kant no violen el principio de no contradicción y que con base en esa conjetura mantengamos dicho principio, sino que pensar que pudieran hacerlo sería imposible, pues un pensamiento que violara las leyes de la lógica no sería siquiera un juicio, sino una representación incoherente sin más.[16]

la alternativa en cuestión es que lo que hace verdaderas a las verdades lógicas no es algo que sólo se encuentre en un grado de abstracción y generalidad más alto que lo que hace verdaderas a las verdades de la física, la biología, etc., sino algo de distinto tipo, a saber, las condiciones de posibilidad del pensamiento.

La caracterización de la verdad lógica como aquella que vale no solo en el mundo actual, sino en todo mundo posible, deja abierta la posibilidad de mantener un compromiso descriptivista de la lógica, ya que la lógica podría concebirse como *describiendo* los aspectos que valen en todo mundo posible.

Para cerrar esta posibilidad y dejar sentado que Kant tiene una concepción no-ontológica de la lógica, Putnam caracteriza su postura como una doctrina de la forma del pensamiento coherente. Es decir, las verdades de la lógica son más bien un presupuesto formal, no material, del pensar. Es en este sentido que Putnam propone que se entienda una de las tesis filosóficas sobre lógica y matemáticas que Wittgenstein defenderá en sus distintas etapas.

---

[16] "No sabríamos qué sería que algo rompiera las leyes de la lógica" es un asunto que aborda Barry Stroud en relación con la ponderación de las críticas de Dummet al segundo Wittgenstein en "Wittgenstein and Logical Necessity" (1965).

En el TLP es claro que pretende trazarse justamente una diferencia de tipo y no de grado entre las expresiones de las ciencias formales y las que hablan sobre el mundo empírico. La teoría figurativa intenta explicar cómo adquieren significado las expresiones sobre el mundo empírico y es una teoría que por sí misma no explica el significado de las expresiones de las ciencias formales: la teoría figurativa explica la semántica de nombres y proposiciones formadas por nombres, pero dado que las expresiones de lógica y matemáticas requieren constantes lógicas y estas no son nombres ni proposiciones, ella no puede explicar su relevancia semántica, sino que el TLP recurre a otros conceptos para explicar el significado de estas expresiones.

El TLP sí ofrece una serie de consideraciones para explicar la manera en que adquieren significado y validez las expresiones de las ciencias formales. Incluso hay una distinción semántica entre proposiciones genuinas con sentido, proposiciones sin sentido y pseudo-proposiciones sin sentido, las proposiciones de la ciencia, las de la lógica y las de las matemáticas.

La relación entre esta distinción de tipo y el problema de la normatividad es la siguiente: Las leyes de la lógica y las matemáticas se consideran parte de las condiciones de posibilidad para la representación. Es decir, sus expresiones son válidas *en tanto que* hacen posible la representación simbólica. Son entonces normativas en un sentido similar a las reglas técnicas que adecúan medios a fines: "si haces b, obtienes a", con la diferencia de que son condiciones *necesarias* y no sólo suficientes, es decir, tienen la forma: "sólo si haces b obtienes a", donde b son las leyes en cuestión y a es cualquier representación genuina de algún hecho del mundo. Para identificar exactamente cuáles de las reglas involucradas en el lenguaje tienen esta normatividad particular, se abordará la teoría figurativa y la metafísica del TLP en el siguiente capítulo.

Conclusiones

La cuestión de la normatividad de las ciencias formales recibe distintas respuestas de parte de Frege, Russell y el primer Wittgenstein. Frege tiene una postura que rescata tanto el carácter descriptivo como el prescriptivo de las leyes de las ciencias formales y Russell parece estar interesado únicamente por el aspecto descriptivo dejando sin explicar el normativo. Wittgenstein recurre a un estudio detallado del fenómeno de la intencionalidad que permitirá explicar la peculiar a prioricidad de las ciencias formales y explicar con mayor detalle sobre qué prescriben las leyes lógicas y matemáticas, y a la vez en qué aspectos objetivos de la realidad se basan esas reglas.

La principal distinción que pretende rescatarse es la de hacer una separación de *tipo* y no meramente de *grado* entre los objetos de estudio de ciencias formales y ciencias naturales, a través de una distinción metafísica entre aspectos formales y aspectos materiales del mundo.

Es un asunto a discutir en el último capítulo si su filosofía realmente concibe a las matemáticas como una serie de normas sobre la manipulación simbólica, es decir, si en la cuestión de la normatividad de las ciencias formales toma una postura completamente prescriptivista como lo sugieren algunos exégetas.

Capítulo II: La teoría del Tractatus Logico-Philosophicus

2.1 La teoría figurativa y la metafísica

Para abordar las partes de la teoría figurativa y de la metafísica que resultan relevantes para la cuestión de la normatividad de las matemáticas, se considerarán solamente los aspectos que tienen que ver con el concepto de *operación* en su teoría y son dos: que las constantes lógicas no representan nada y que las operaciones expresan relaciones formales entre contenidos proposicionales.[17]

En cuanto a la teoría figurativa, la operación en el TLP sí tiene relevancia semántica, pero es distinta de la que aportan nombres y proposiciones. A grandes rasgos, los nombres representan objetos y las proposiciones figuran estados de cosas y en esos términos se explica su relevancia semántica, pero los signos de operaciones no representan objetos ni figuran estados de cosas, así que debe explicarse cómo es que contribuyen semánticamente en las expresiones donde aparecen sin ser ni nombres de objetos ni proposiciones figurativas.

Metafísicamente, las operaciones tienen la tarea de expresar relaciones *formales* entre sus bases y sus resultados, son relaciones entre contenidos proposicionales y no meramente entre símbolos. Todos estos términos deben aclararse, ya que la metafísica del TLP ofrece una distinción entre relaciones y propiedades formales o internas de materiales o externas que también se menciona en la teoría figurativa y que resulta crucial para evaluar su propuesta. Esto se revisará en el presente capítulo.

La conexión de estos dos asuntos -el metafísico y el de la intencionalidad- con la normatividad de las matemáticas se puede ver de la siguiente manera: a la pregunta de si las leyes de la lógica y las matemáticas son descriptivas, prescriptivas, etc. la filosofía del TLP explicaría que (normatividad) *prescriben* sobre la manipulación de símbolos basándose en (metafísica) *hechos formales*,[18] pero (intencionalidad) *sin figurar hechos* del mundo como las proposiciones genuinas. Su normatividad sería la de las reglas *anankásticas*, en el

[17] Las operaciones expresarían relaciones formales entre contenidos al dictar reglas para manipular símbolos.
[18] 4.122, 4.124 y 4.125 sustentan el hablar de hechos formales en el TLP.

sentido de von Wright, porque los aspectos formales en los que se basan dan las condiciones *necesarias* para la representación.

2.1.1 La metafísica del TLP

Para llegar a la cuestión de las relaciones y propiedades formales, considérese que en la metafísica del TLP hay una diferencia entre hechos como estados de cosas o configuraciones de objetos contingentes y los aspectos del mundo que no tienen que ver con que se dé o no tal o cual estado de cosas, los pretendidos aspectos *formales* del mundo, en oposición a los aspectos *materiales.*

Estos aspectos formales del mundo constituyen lo que es común a todo mundo posible y como se supone que todos los hechos genuinos son contingentes, es decir, ninguno de ellos se da en todo mundo posible, por ello se sostiene que los aspectos formales del mundo no son hechos, al menos no en el sentido del TLP de configuraciones de objetos, propiedades y relaciones. Los siguientes pasajes son explícitos al respecto:

> 2.022 Es manifiesto que por muy diferente del real que se piense un mundo ha de tener algo en común con él –una forma-.
>
> 2.023 Lo que constituye esta forma fija son precisamente los objetos.
>
> 2.0231 La substancia del mundo sólo *puede* determinar una forma y no propiedades materiales. Porque estas sólo vienen a ser representadas por las proposiciones, sólo vienen a ser formadas por la configuración de objetos
>
> 2.024 La substancia es lo que persiste independientemente de lo que es el caso.

En estos pasajes se habla de *objetos* y de *substancia.* La substancia del mundo se supone que son los objetos del mundo *independientemente de sus configuraciones actuales* (2.024), es decir, son a su vez los constituyentes de los estados de cosas: un estado de cosas está determinado por la manera en que los objetos que lo constituyen interactúan entre sí.

> (2.021) El estado de cosas es una configuración de objetos (cosas).

En el TLP se habla de objetos, propiedades y relaciones, pero es materia de discusión si la teoría defiende una diferencia al nivel ontológico entre estas tres categorías. Hay quienes la interpretan como una teoría para la que tanto propiedades como relaciones pueden llamarse objetos argumentando que si un objeto se define en la teoría como aquello que es parte constituyente de un estado de cosas, y las propiedades y relaciones son constituyentes de estados de cosas, entonces también son objetos. Esta interpretación también va de acuerdo con la metáfora de la cadena para hablar de las relaciones entre objetos:

> (2.03) En el estado de cosas los objetos están unidos entre sí como los eslabones de una cadena.

Es decir, no hay objetos y además relaciones entre ellos, sino que las relaciones se cuentan dentro de la categoría de objetos, siempre y cuando se esté tratando esta categoría desde el punto de vista de lo que constituye los estados de cosas.

Otra asunción exegética será con respecto a los términos ‘hecho’ y ‘estado de cosas’, que se han utilizado en los párrafos anteriores. Interpretaré la diferencia entre ‘hechos’ y ‘estados de cosas’ de la siguiente manera: un estado de cosas puede darse o no darse en un mundo posible, pero cuando se da en algún mundo posible, en ese mundo posible se le llama un hecho. Así, hablamos de ‘los unicornios son blancos’ como un estado de cosas posible que en este mundo no es un hecho. En cambio, en el mundo actual es un hecho que la Luna gira alrededor de la Tierra, tan sólo porque es un estado de cosas que se da efectivamente en el mundo actual.

Así se entiende la tesis de que el mundo es la totalidad de los hechos y no de las cosas. La idea es que lo que distingue los distintos mundos posibles es que se dan efectivamente distintos estados de cosas, hay distintos hechos, pero no se supone que la materia básica, los objetos que se comportan de tal o cual manera, sean distintos en cada mundo posible, sino que lo que varía son las combinaciones. Es decir, a distintas *configuraciones* de objetos corresponden distintos mundos posibles.

De manera similar, cada objeto puede entrar en distintas configuraciones de objetos. Aquí viene una asunción metafísica crucial para la teoría del TLP, que es la idea de que estas posibilidades de combinación de los objetos constituyen la *forma lógica* de los objetos. Resulta crucial porque asumir que los objetos del mundo tienen, objetivamente hablando, una forma lógica, permitirá evitar la arbitrariedad de las reglas del lenguaje natural al proponer que esas posibilidades de combinación objetivas deben ser copiadas por los nombres de esos objetos, teniendo análogas posibilidades de combinación con otros nombres de otros objetos. Esta cuestión de la forma lógica de los objetos se abordará con mayor detalle a continuación al exponer la teoría figurativa.

2.2.2 Evitando la arbitrariedad

Para la teoría figurativa no es importante que en enunciados como "el gato está a la izquierda del perro", lo designado por la expresión que aparezca antes de 'está a la izquierda de' sea el objeto que se encuentra a la izquierda de lo designado por la expresión final, ese sería un asunto convencional de la gramática española porque podría haberse adoptado una regla que invirtiera los lugares. Pero que haya *alguna* regla para determinar cuál de los objetos nombrados en una expresión que describa la posición relativa 'estar a la izquierda de' sí resultaría indispensable para la posibilidad de expresar dicha proposición. Considérese el siguiente caso:

Tenemos las expresiones 'A está a la izquierda de B' y 'A está a un lado de B'. Para la primera expresión resulta esencial una regla que es completamente prescindible en la segunda. La regla es: <R1: lo representado por la expresión que aparezca *antes de* la expresión en cuestión ('está a la izquierda de') es lo que se encuentra en la relación expresada por la expresión en cuestión ('está a la izquierda de') en relación con lo que esté representado por la expresión que aparezca al final>. Lo crucial es esa clásula "antes de". Para la segunda expresión esa cláusula es irrelevante, el hecho que pretende figurarse no distingue entre estar a la izquierda o a la derecha, sino tan sólo estar a un lado. En el otro caso, esta regla está justificada porque, si prescindiéramos de la clásula "antes de" y de cualquier otra que nos indicara este mismo hecho sobre posiciones relativas, nos quedaríamos con una expresión como 'A está a un lado de B' que sí logra figurar un hecho, pero no es el mismo que pretende figurarse con el primer enunciado. Así, no es esencial que en el español exista específicamente la regla R1, pero sí es esencial para que este lenguaje sea capaz de expresar esa proposición (que algo está a la izquierda de otra cosa) que exista alguna regla con una clásula que cumpla la misma función que "antes de".

De esta forma la teoría figurativa ofrece un criterio de justificación para cada una de las distintas reglas particulares que regulan la gramática (en el sentido de semántica) y que vinculan nombres con objetos, a pesar de ser reglas convencionales y aparentemente arbitrarias: cualquiera de ellas queda justificada por el mero hecho de ofrecer al simbolismo la posibilidad de representar ciertos estados de cosas.[19] Es decir, no son reglas del todo arbitrarias, sino que se constriñen a la condición de otorgar capacidad expresiva a un simbolismo.

Esa capacidad expresiva de las representaciones simbólicas se adjudica en el TLP a las *posibilidades combinatorias* permitidas por las reglas en un simbolismo dado. Wittgenstein acuña a estas posibilidades el célebre término 'forma lógica' y las reglas lógico-sintácticas juegan el papel fundamental para conformar la capacidad expresiva. Podría decirse así que lo que *manda* es la capacidad expresiva o la capacidad combinatoria de los símbolos *pero sólo en tanto que esa capacidad combinatoria sea análoga a la capacidad combinatoria de los objetos involucrados en los estados de cosas que pretenden figurarse.* Así, aunque las reglas que estamos tratando parecen ser arbitrarias, el TLP propone que sí hay restricciones sobre qué reglas serán adecuadas para expresar ciertos estados de cosas y esas restricciones no son convencionales, sino dadas metafísicamente.

Por ejemplo[20], para figurar el tamaño relativo entre dos objetos podríamos adoptar las siguientes convenciones: 'Ab' significa que lo designado por 'A' es más grande que 'b'; 'aB', que lo designado por 'a' es más chico que lo designado por 'B'; 'ab' o 'AB' que 'a' y 'b' son del mismo tamaño. Estas convenciones serían suficientes para expresar en cualquier caso alguna dimensión del tamaño relativo entre dos objetos.

Pero supongamos que queremos utilizar las siguientes convenciones: 'ab' o 'AB' significa que 'a' es más chico que 'b'; 'ba' o 'BA' significa que 'b' es más chico que 'a' y nada más. Es decir, lo que importa en este simbolismo es el orden de las letras y no hay ninguna otra regla para formar más expresiones. ¿Cómo expresamos en este simbolismo que dos objetos

---

[19] Aquí puede plantearse la cuestión de qué papel tienen este tipo de reglas en particular para la formación del significado lingüístico en el marco del debate sobre la normatividad del contenido/significado.
[20] Ejemplo tomado del libro de Carpintero, *Las palabras, las ideas y las cosas,* pp. 295-296.

tienen el mismo tamaño? No podemos “poner ambas letras primero”, no tenemos las reglas adecuadas en nuestro simbolismo para hacer algo así.

Estas convenciones sólo serían adecuadas si dos objetos nunca tuvieran el mismo tamaño, pero en el mundo actual sería un simbolismo con una capacidad expresiva insuficiente para hablar de tamaños relativos y esa insuficiencia se debería a la falta de una regla en el simbolismo[21]; esto no es cuestión de convención, sino una función de lo que queremos expresar y de cómo es el mundo metafísicamente hablando, dada la posibilidad de que dos objetos tengan el mismo tamaño.

Considérese lo que al respecto de la arbitrariedad de las reglas dice Stenius en *Wittgenstein’s Tractatus* respecto del aforismo 4.1211, que se relaciona con la tesis tractariana de que ninguna combinación de símbolos es ilegítima de por sí, sino hasta que se consideran en el contexto de ciertas reglas lógico-sintácticas, de lo cual se habla en 5.473:

> In 4.1211 Wittgesntein presents the following example of what language exhibits: ‘Thus a sentence “fa” shows that in its sense the object a occurs…” But is this true? Is there any essential difference ‘to the eye’ between the ways in which the symbols ‘f’ and ‘a’ occur in ‘fa’ showing that only the second can be understood as the name of an object? In one sense it is, because the difference between the symbols ‘f’ and ‘a’ is indeed not only a difference in meaning but also a difference in the way in which they occur in ‘fa’. But in another and important sense it is not: ‘the sign determines a logical form only according with its use according to logical syntax (seine logisch syntaktische Verwendung)’ Wittgensteins says in 3.327; and this means that for the ‘eye’ to see any difference between these ways it most be accustomed to symbolic logic and ‘know’ the syntactical difference between the two symbols, thus ‘knowing’ that the fact ‘fa’ should be analysed as a linguistic object ‘a’ possessing the linguistic quality of ‘being to the right of an “f”’. There is not, and cannot be, any objective feature in the field ‘fa’ showing this to be the correct analysis of it. The correctness… is a matter of a conventional linguistic rule, and rules of this kind are an essential part of the logical syntax of a symbolic language. (Stenius, 1960, págs. 190, 191)

(5.473) La lógica debe cuidarse por sí misma.

[21] Quizá bastaría añadir la negación y la conjunción: ¬ab y ¬ba, por lo tanto a y b tienen el mismo tamaño.

> Un signo *posible* debe también poder designar.
>
> Todo lo que es posible en la lógica está también permitido. ("Sócrates es idéntico" no quiere decir nada porque no hay ninguna propiedad que se llame "idéntico". La proposición es absurda porque no hemos establecido una determinación arbitraria, pero no porque el símbolo no estuviera permitido en y por sí mismo.)
>
> En cierto sentido, no podemos equivocarnos en la lógica.
>
> (4.1211) Así una proposición "fa" muestra que en su sentido aparece el objeto a; dos proposiciones "fa" y "ga", que en ambas se habla del mismo objeto. El que dos proposiciones se contradigan entre sí lo muestra su estructura; de igual modo, el que una se siga de la otra. Etc.

Si bien parece ser correcto que de acuerdo con las tesis del TLP el criterio de corrección del análisis es dado por reglas que poseen un carácter convencional, también parece ser que la teoría figurativa sí ofrece criterios objetivos y no convencionales para la adopción de estas reglas, evitando así que la teoría completa colapse en un convencionalismo.

> (3.3421) Puede que un modo peculiar de designación carezca de importancia, pero siempre es importante que se trate de un *posible* modo de designación. Y así sucede siempre en filosofía: lo individual se revela una y otra vez como no importante, pero la posibilidad de cada singular nos procura una ilustración sobre la esencia del mundo.

Tratamos entonces con reglas *condicionales*, o reglas técnicas, dado que siempre presentan una condición de expresividad: si ha de poder expresarse A en el simbolismo L, entonces utilícese la regla R1. Esta condición (que algo pueda expresarse en un simbolismo) tiene la ventaja de que no es subjetiva, no depende de las intenciones de un hablante en particular, sino que busca basarse en el hecho objetivo de lo que hace falta para que un simbolismo exprese tal o cual cosa, brindando así una base objetiva y no arbitraria para el establecimiento de las normas simbólicas. [22]

---

[22] Pero además Wittgenstein propondrá que es una condición necesaria y no sólo suficiente, y de ahí derivará el carácter trascendental de estas reglas. Esto se revisará en el último capítulo.

En resumen, la teoría figurativa del TLP propone que a pesar de que hay muchas reglas arbitrarias y convencionales en las gramáticas de los lenguajes naturales, hay también reglas, o dimensiones de las reglas, que podríamos denominar lógico-sintácticas y que no son arbitrarias. Es decir, imponen un estándar no-arbitrario para formular reglas gramaticales y presentan como restricción objetiva que haya un isomorfismo entre las capacidades combinatorias de nombres y objetos.

2.1.3 Normatividad en la teoría figurativa

En el TLP podemos identificar que se habla de cuando menos tres tipos de reglas: reglas gramaticales que son convencionales y aparentemente arbitrarias, reglas lógico-sintácticas que no son ni convencionales ni arbitrarias y reglas operacionales, que son las reglas constitutivas de la lógica y las matemáticas.[23]

Se habla tanto de las reglas en el lenguaje natural que le permiten tener intencionalidad hacia el mundo, como del carácter normativo de las matemáticas a través de la noción de operación. La dimensión normativa no queda entonces restringida únicamente a la lógica y las matemáticas, sino que la teoría figurativa también considera que se requiere la vigencia de ciertas reglas para que un símbolo dado tenga significado.

Hay dos conexiones entre el lenguaje y el mundo que la teoría figurativa propone explicar en términos de reglas. La primera involucra las reglas que asocian nombres y objetos simples; la segunda, las reglas gramaticales y las configuraciones de objetos. Ambos grupos de reglas poseen una dimensión arbitraria y una no-arbitraria.

> (3.34) La proposición posee rasgos esenciales y casuales. Casuales son los rasgos que emanan del modo peculiar de elaboración del signo proposicional. Esenciales, sólo los que capacitan a la proposición para expresar su sentido.
>
> (3.3411) Cabría, pues, decir: el nombre genuino es lo que tienen en común todos los símbolos que designan el objeto. Se seguiría así, sucesivamente, que ninguna clase de composición resulta esencial al nombre.

---

[23] A lo largo de este capítulo trataré de dilucidar si esta caracterización funciona mejor hablando en términos de tipos de reglas o de distintas dimensiones normativas en una misma regla. Que se encuentran estos tres tipos de reglas en el TLP es discutible y trataré de defender esta exégesis.

> (3.343) Definiciones son reglas de traducción de un lenguaje a otro. Cualquier lenguaje sígnico correcto ha de resultar traducible a cualquier otro de acuerdo con tales reglas: *esto* es lo que todos ellos tienen en común.

Los rasgos casuales de los que habla 3.34 corresponderían, en la teoría figurativa, al nombre utilizado para referirse a un objeto particular.[24] Por ello se habla de la irrelevancia de la composicionalidad en el signo de un nombre en 3.3411 para que logre referirse a un objeto. Pero así como las relaciones entre nombres en el simbolismo corresponden a relaciones entre objetos en el mundo, las convenciones gramaticales que regulan estas combinaciones de nombres serían rasgos casuales del simbolismo[25].

Así, la teoría figurativa rescata el hecho de que tenemos una variedad de lenguajes naturales con distintos vocablos y distintas gramáticas que logran expresar las mismas proposiciones. Pero surge el enigma de que, si son completamente distintos, ¿cómo es que logran representar los mismos hechos? La respuesta del TLP es que estas reglas, que aparentemente son por completo arbitrarias y convencionales, poseen un carácter no arbitrario porque deben cumplir con una condición objetiva: ser suficiente para otorgar al simbolismo capacidad expresiva.

2.2 Distinciones de tipo (formal, material; decir, mostrar; interno, externo)

Los conceptos que la teoría del TLP pone en juego para dejar sentado el contraste de tipo y no de grado entre ciencias formales y ciencias empíricas son los conceptos de propiedades y relaciones *formales/internas* y sus contrapartes *materiales/externas*, así como la distinción *decir/mostrar*. Las primeras son distinciones a nivel metafísico, la segunda involucra una noción epistemológica, la informatividad, pero se encuentran a nivel lingüístico: se dice de expresiones lingüísticas que *dicen* o *muestran* tal o cual cosa.

---

[24] Sin embargo, para establecer esta correspondencia no basta con una definición como en las teorías de Frege y Russell, sino que se da solo cuando el nombre posee la misma forma lógica –es decir, las mismas capacidades para combinarse con ciertos nombres en una proposición- que un objeto –cuya forma lógica consiste en sus capacidades para combinarse con ciertos objetos en un estado de cosas. Lo casual, convencional y arbitrario es solamente el tipo de signo utilizado (el sol, the sun, die Sonne).

[25] Si bien estas convenciones no son del todo arbitrarias, pues deben respetar la dimensión lógico-sintáctica de la normatividad, de la cual hablaremos más adelante.

Aquí se da una maniobra representativa del giro lingüístico: apelando a una distinción a nivel lingüístico se intenta defender una distinción análoga a nivel epistemológico y metafísico. La propuesta es que las expresiones lingüísticas de las ciencias formales adquieren significado de otra manera que las expresiones de las ciencias empíricas (nivel lingüístico), y así pretende mostrarse que el sentido en que nos dan información es distinto (epistemológico) y las bases objetivas de su validez son distintas (metafísico).

Los conceptos tractarianos relacionan estos niveles de la siguiente manera: lo que se puede *decir* es *informativo* y corresponde a un estado de cosas que involucra *propiedades* o *relaciones materiales* o *externas* y es meramente *posible*; lo que solamente se puede *mostrar no* es *informativo* y *no* corresponde a un *posible* estado de cosas, sino a algo que *no podría ser* de otra manera, a *propiedades* o *relaciones formales* o *internas*.

Decir	***Mostrar***
Informativo	No-informativo
Figura un estado de cosas	No figura un estado de cosas
Su contenido es meramente posible	Su contenido es necesario
Retoma aspectos *materiales* del mundo	Retoma aspectos *formales* del mundo

Estas distinciones deben aclararse para explicar cómo funcionan las reglas en la teoría general de las operaciones propuesta en el TLP. La razón es que Wittgenstein mismo es explícito en el TLP cuando dice, por un lado, que las operaciones expresan *relaciones internas* entre proposiciones y, por otro lado, que las operaciones son transformaciones simbólicas basadas en reglas.

> (5.2) Las estructuras de las proposiciones están en relaciones internas entre sí.
>
> (5.21) Podemos resaltar estas relaciones internas en nuestro modo de expresión representando una proposición como resultado de una operación que la obtiene a partir de otras proposiciones (las bases de la operación).
>
> The concept of the operation is quite generally that according to which signs can be constructed according to a rule. (NB, entry 22/11/16), en (Floyd, Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics, 2005).

Así, las reglas que se siguen al aplicar operaciones no son arbitrarias, sino que tienen la tarea específica de expresar las relaciones formales entre expresiones significativas. ¿Qué son estas relaciones formales o internas?

Una manera de identificarlas y marcar la diferencia entre ellas es por las propiedades epistémicas de las expresiones simbólicas que las figuran.[26] Las materiales o externas serían todas aquellas de las que se puede decir informativamente que se dan en un objeto o entre varios objetos, por ejemplo: tener cierto peso, cierto color, cierto tamaño, ser más grande que otro objeto, estar más cerca de uno que de otro, etc. Las segundas serían todas aquellas que no es posible decir informativamente que se dan en un objeto o entre varios objetos, por ejemplo: que *dos tonos de azul están en la relación ser más claro o más oscuro*, que *dos tonos de sonido están en la relación de ser más alto o más bajo*, que *un punto del campo visual tiene algún color*, que *si p es verdadero, pvq es verdadero*.[27]

En el TLP, toda proposición genuina figura algún estado de cosas, una configuración de objetos, que consiste básicamente en la afirmación de que ciertos objetos tienen ciertas propiedades o relaciones materiales o externas, pero es imposible que haya proposiciones genuinas sobre propiedades o relaciones formales o internas. No es que no haya propiedades y relaciones de este tipo, sino que su carácter de formales o internas evita cualquier posibilidad de que sean figuradas por cualquier sistema simbólico, lo cual se aclarará en la siguiente sección “Decir y mostrar”.[28]

---

[26] Cuando hablo de que las expresiones tienen propiedades epistémicas quiero decir que ciertas expresiones tienen la propiedad de ser capaces de cargar contenido informativo. Por ejemplo, “llueve” tiene esa capacidad, pero “llueve o no llueve” no la tiene dada su estructura lógica.

[27] La idea es que no es posible que dos distintos tonos de sonido no estén en la relación más agudo o más grave. Claro que es informativo si un tono es más agudo o más grave que otro, pero no es informativo que se encuentran en esa relación (tomando en cuenta, claro, que un tono se distingue por qué tan agudo o grave es, por lo que no puede haber dos tonos distintos con el mismo grado de agudez o gravedad). No es informativo que dos tonos distintos de azul están en la relación más claro o más oscuro, porque si en verdad son distintos es porque no tienen el mismo tono, y la diferencia de tono consiste justamente en ser más claro o más oscuro.

[28] Coincido en que toda esta parte de la teoría sobre propiedades y relaciones formales es una parte muy sospechosa de su teoría, como me ha señalado el doctor Víctor Cantero, pero creo que sí logra llenar un hueco explicativo crucial con estos conceptos. Sí se pueden formular proposiciones acerca de ellas, aunque sean pseudo-proposiciones bajo los estándares del TLP. Creo que los ejemplos ya mencionados sirven a este fin, por ejemplo, citando el pasaje 4.123: “…este color azul y aquél están eo ipso en la relación interna de más claro y más oscuro. Es impensable que estos dos objetos no estuvieran en esta relación.” Que un sonido tenga un tono, por ejemplo, también sería una propiedad formal porque no depende de qué configuraciones de estados de cosas se den en un mundo posible dado, sino tan sólo de que algo sea un sonido. La relación de

Esta peculiaridad marcará la distinción de tipo entre las proposiciones genuinas de las ciencias naturales y las expresiones de ciencias formales, pues la idea sería que estas últimas sólo forman pseudo-proposiciones (expresiones que parecen proposiciones, pero no lo son) que *muestran* las propiedades formales o internas de las expresiones simbólicas, por ello no figuran nada, porque no *dicen* nada, y por ello son irrefutables, porque al no figurar no son susceptibles de acuerdo o desacuerdo entre lo que dicen y lo que es el caso, y por ello se supone que no pueden ser tampoco informativas, sólo pueden impresionar la mente humana por la limitada capacidad de ésta y Wittgenstein propone que pueden ayudar a aclarar el pensamiento, pero no porque estén informando genuinamente como las proposiciones de las ciencias naturales.

2.2.1 Decir y mostrar

Para detallar las distinciones metafísicas y profundizar en sus consecuencias debe abordarse la distinción *decir*/*mostrar*, porque cuando pretendemos señalar cuáles son las relaciones formales o internas para distinguirlas de las materiales o externas, nos topamos con que no hay nada de informativo en el reconocimiento de estas relaciones y este peculiar fenómeno lo explica esa distinción: esas propiedades y relaciones sólo pueden *mostrarse* en las expresiones simbólicas, pero no pueden formar parte del contenido informativo de una proposición.

Adoptaremos la exégesis que propone que *decir* es informar algo nuevo por medio del contenido de una proposición y *mostrar* es sólo exhibir ciertas propiedades o relaciones por medio de una proposición, pero no como resultado de una figuración, no como parte del contenido expresado en la proposición, sino como parte del medio de expresión.

Por ejemplo, la forma lógica de una proposición es mostrada por la proposición, independientemente de cuál sea su contenido, y por eso es parte del medio de expresión. Si su contenido fuera acerca de su propia forma lógica, no podría ser un contenido informativo porque se supone que quien comprende la proposición conoce ya todo acerca de su medio de expresión: signos, reglas de combinación, etc., y su forma lógica es parte de esos medios

---

'seguirse lógicamente de' también sería interna y resulta crucial defender esto para aclarar en qué sentido la lógica y las matemáticas no informan nada en esta teoría.

de expresión, parte de lo que se tiene que entender para entender la proposición. En este sentido, la relación entre la forma lógica de una proposición y la proposición es *interna*.

Otro ejemplo sería la relación entre p&q y q: cuando p&q es verdadero, q es verdadero. No es posible hablar sobre esta relación de manera informativa, porque quien entiende las expresiones en cuestión no puede no saber que esa relación es el caso. En este sentido, se *muestra* que se da esta relación y no se puede *decir*. Esto se debe, según el autor del TLP, justamente a que estas relaciones y propiedades son internas, no podrían no darse, no son configuraciones contingentes de objetos, y esta peculiaridad modal las hace incapaces de ser representadas intencionalmente. Sí forman parte del fenómeno de la intencionalidad, incluso lo explican según la teoría del TLP: la forma lógica de los estados de cosas y los objetos es rescatada en la forma lógica de los nombres y las proposiciones, eso explicaría la capacidad de nombres para representar y de proposiciones para tener sentido. El punto es que no pueden ser representadas, no puede decirse que tal y cual objeto tiene tal y cual propiedad formal, sólo puede mostrarse en una proposición cuyos nombres se comporten de isomórficamente con esas propiedades y relaciones formales.

La relación entre la modalidad de una proposición y su informatividad se asume en el TLP como perfectamente simétrica como ya lo refleja la tabla al principio de esta sección: si es necesario, no puede ser informativo; si no es necesario, puede ser informativo. Para el primer Wittgenstein, la informatividad de una proposición se debe a que el hecho de figurar un posible estado de cosas hace que la proposición sea contingente y no necesaria (y sólo se puede conocer su valor de verdad *a posteriori*, al revisar si el estado de cosas que figura es el caso o no), así que una expresión aparentemente proposicional que sea necesaria no figura ningún estado de cosas, por lo tanto no es una expresión proposicional genuina (y es *a priori*, porque es por medio del signo, no por comparación, como se determina su verdad o falsedad).

En este marco teórico se encuentra el antiplatonismo wittgensteiniano: el carácter no figurativo de las expresiones necesarias (en particular, todas las matemáticas) significa que sus constituyentes no representan nada, no es por medio de la correspondencia entre nombre y objeto que adquieren significado, así que no hay necesidad de postular objetos matemáticos abstractos sólo porque haya expresiones significativas con términos matemáticos, ni hechos matemáticos sólo porque hay expresiones matemáticas verdaderas y falsas[29]. Pero entonces la cuestión es cómo adquieren significado las expresiones de las ciencias formales, si no es figurativamente. La respuesta se relaciona con la cuestión de las propiedades y relaciones formales o internas o estructurales entre expresiones simbólicas.

La idea es que hay ciertas expresiones simbólicas que tienen la tarea de expresar reglas para transformar proposiciones con base en sus propiedades y relaciones internas. Estas transformaciones son *operaciones*, y tienen a sus representantes lingüísticos en las constantes lógicas que no aportan contenido representando objetos del mundo, sino operando con los valores de verdad de las proposiciones.

La idea es que las expresiones de las ciencias formales están conformadas por estos símbolos que no adquieren significado por medio de su referencia a un objeto y sin embargo sí son significativos en algún sentido. Esta cuestión se abordará en el último capítulo, una vez expuesta la teoría general de las operaciones del TLP.

2.3 El contraste entre ciencias formales y ciencias empíricas

Una vez expuestas las tesis metafísicas y sobre el lenguaje del TLP que atañen al problema de la normatividad de las ciencias formales, podemos reaproximarnos a esta cuestión señalando los contrastes que esta teoría propone entre ciencias formales y ciencias empíricas. Estos contrastes apuntan a que la postura del TLP considera a las leyes y expresiones de las ciencias formales como prescriptivas sobre la manipulación simbólica, lo cual nos llevará a averiguar cómo enfrenta los retos señalados en el primer capítulo para quien toma esta postura.

2.3.1 Contraste en las expresiones significativas

Victor Rodych caracteriza la filosofía de las matemáticas del Tractatus en la entrada de la Stanford Encyclopedia of Philosophy *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics* de la siguiente manera:

---

[29] Esta posibilidad recuerda a la teoría de las descripciones definidas de Russell, donde la reescritura lógica de las expresiones donde aparecen permite evitar el problema de postular entidades abstractas con un dudoso estatus ontológico.

> Wittgenstein's non-referential, formalist conception of mathematical propositions and terms begins in the Tractatus. Indeed, insofar as he sketches a rudimentary Philosophy of Mathematics in the Tractatus, he does so by contrasting mathematics and mathematical equations with genuine (contingent) propositions, sense, thought, propositional signs and their constituent names, and truth-by-correspondence. (Stanford Encyclopedia of Philosophy, Rodych, 2011)

La caracterización por contraste que sugiere Rodych es bastante útil porque el contraste entre expresiones que son verdaderas por correspondencia y expresiones que son válidas en un sentido muy distinto al asociado con el de la verdad por correspondencia, va de acuerdo con la idea de hacer una distinción de tipo entre ciencias formales y ciencias empíricas.

El contraste entre proposiciones empíricas y expresiones lógicas y matemáticas se delinearía en varios órdenes:

a) En términos de contenido expresado. Lo que expresa un enunciado con contenido empírico son proposiciones contingentes acerca del mundo que conectan con hechos contingentes del mundo. Lo que expresan los enunciados lógicos y matemáticos *parecen* proposiciones necesarias sobre hechos necesarios del mundo, pero en realidad no expresan contenido alguno, no se conectan con hechos verdaderos en todo mundo posible como si fueran el resultado de una especie de "súper-física" o estudio metafísico del mundo, sino que consisten solamente en un adecuado seguimiento de cierto tipo de reglas fundamentales. Para explicar su objetividad y aceptación universal Wittgenstein ofrecerá argumentos de tipo trascendental sobre el hecho mismo de representar.

En última instancia, la lógica y las matemáticas se presentan como un destilado de las condiciones de posibilidad mínimas para la representación, las cuales ofrecerían algo así como normas mínimas para la manipulación simbólica que han de seguirse si ha de haber representación. Son las reglas lógico-sintácticas[30] mencionadas en la sección anterior y que

[30] El doctor Silvio Pinto señala que no son meramente sintácticas. Estoy de acuerdo, pero creo que la noción de "lógico-sintáctico" ya se adecúa un poco más a estas observaciones gracias a los comentarios anteriores. Son reglas que trabajan con los supuestos formales de las proposiciones (que tienen un valor de verdad) y de las constantes lógicas (que se pueden reiterar un número de veces), sólo por eso conservaría la terminología, para distinguirlas de las reglas que asignan objetos a nombres y estados de cosas a proposiciones.

se abordarán con respecto al problema de la normatividad matemática en el siguiente capítulo.

b) En términos de sus tratamientos analíticos. Cómo adquieren significado los enunciados y qué los hace verdaderos o falsos son preguntas que se abordan de manera radicalmente distinta según el tipo de enunciado que estemos tratando, ya sea una expresión de una proposición empírica o un enunciado lógico o matemático.

Para las primeras se echa mano de la teoría figurativa y la idea es que el análisis completo de las proposiciones revela que toda proposición está, o bien compuesta de otras proposiciones más simples conectadas por medio de constantes lógicas, o bien es simple –atómica- y se compone solamente de nombres que representan elementos simples –átomos- del mundo. Los nombres de estos simples se configuran en la trama de la proposición análogamente a la manera en que se configuran los elementos simples en el estado de cosas figurado por la proposición. Es decir, se trata de una teoría esencialmente referencialista: Las proposiciones adquieren significado porque los nombres que las componen se refieren a átomos básicos del mundo, y las configuraciones de estos nombres (proposiciones) responden a configuraciones de átomos básicos (estados de cosas).[31]

En cambio, las expresiones lógicas (tautologías y contradicciones) tan sólo resultan de la bipolaridad de las proposiciones y el carácter operativo de las constantes lógicas: no figuran estados de cosas, aún cuando su materia prima son proposiciones que sí figuran estados de cosas y operan con los valores de verdad de dichas proposiciones produciendo expresiones que remiten a todo mundo posible (tautologías) o a ninguno (contradicciones) dando la impresión de que nos hablan acerca de hechos necesarios que o bien se dan en todo mundo posible o en ninguno.

Las expresiones matemáticas no tendrían como base ni siquiera el carácter bipolar de las proposiciones genuinas, sino que tan sólo requieren del carácter operativo de la manipulación simbólica. No operan con valores de verdad como la lógica, sino con la mera

[31] Cabe mencionar que no es del todo representacionalista porque las proposiciones no representan estados de cosas, sino que tienen un sentido o condiciones de verdad. Es decir, no están en lugar de un estado de cosas como un nombre está en lugar de un objeto, sino que figuran sus propias condiciones de verdad y en virtud del estado de cosas figurado se puede determinar su valor de verdad.

equivalencia de significado entre signos manipulados de acuerdo con reglas-operaciones-algoritmos. Es decir, se analizan en términos de reglas, algoritmos y operaciones simbólicas y es en este sentido que su postura se parece al formalismo, aunque considerando que tales reglas se basan en las así llamadas propiedades y relaciones formales y que las operaciones lógicas trabajan con las condiciones de verdad de las proposiciones, ya su postura se aleja del formalismo.[32]

Esto también se retomará y se explicará con mayor detalle en el próximo capítulo.

c) En términos de intencionalidad de la representación. Mientras que las expresiones empíricas tienen una dirección de ajuste intencional desde el mundo hacia la representación (en el sentido de que son aspectos del mundo los que las hacen verdaderas o falsas; los hechos del mundo conforman el criterio que ajusta los valores de verdad), las expresiones lógicas y matemáticas podrían pensarse como expresiones que no tienen intencionalidad hacia el mundo.

Aunque quedan pocos aspectos en común entre expresiones de proposiciones empíricas y expresiones lógicas y matemáticas, sí se mantienen semejanzas valiosas: los principios de contexto y composicionalidad se mantienen en ambos grupos. También conservan forma lógica en el sentido del TLP, si bien juega roles distintos en las expresiones figurativas y en el resto de las expresiones; de hecho, este concepto que en la teoría figurativa explica la conexión intencional entre las expresiones proposicionales y los hechos que las hacen verdaderas o falsas, es el que explica a su vez por qué las tautologías, contradicciones y ecuaciones matemáticas no figuran nada.

---

[32] El doctor Silvio Pinto señala que las constantes lógicas no operan sobre valores de verdad, sino sobre condiciones de verdad. Lo que me parece delicado de decir que operan sobre las condiciones de verdad es que podría interpretarse como si las constantes lógicas alteraran el contenido figurado por una proposición, cuando el énfasis está justamente en que no añaden nada a lo ya figurado por las proposiciones con las que trabajan. Entiendo que el resultado de una operación no es algún valor de verdad, sino una proposición compleja con condiciones de verdad que están en función de las condiciones de verdad de las proposiciones que la componen. Insistiría en no decir que operan sobre contenidos sólo por esta razón, creo que entiendo el punto de este y otros comentarios similares pero quizás sólo habría que expresarlo de otra manera, se me ocurre la siguiente: dado que las operaciones según el TLP expresan relaciones formales entre los contenidos de las expresiones, las operaciones lógicas expresan relaciones formales entre las condiciones de verdad de las proposiciones que tienen como base.

También tienen en común un aspecto metodológico sobre la manera en que adquieren significado: los significados vienen dados por sus condiciones de verdad/validez; las condiciones de verdad de las proposiciones empíricas son estados de cosas que ellas mismas figuran, mientras que las tautologías y contradicciones no figuran estados de cosas sino que adquieren un valor de verdad únicamente por su estructura lógica, en ellas las operaciones lógicas se conjugan de tal suerte que generan funciones de verdad que son verdaderas en todo mundo posible, es decir, su contenido es irrelevante y sólo importa su forma lógica.

Conclusiones

Mientras que el lenguaje acerca del mundo *requiere* reglas convencionales y lógico-sintácticas para crear expresiones verdaderas o falsas en virtud de algún hecho del mundo, lógica y matemáticas *consisten* en un adecuado seguimiento de reglas que no resulta en una expresión verdadera o falsa en virtud de algún hecho del mundo, si bien no son completamente ajenas a él en el sentido de que las reglas que las constituyen, aún no siendo descriptivas, están restringidas a la expresión de relaciones formales entre expresiones simbólicas. Esta última idea resulta central para explicar cómo es que la teoría del TLP logra rescatar la objetividad del conocimiento matemático.

Aventurando una posible explicación de las tesis modales del TLP en una terminología que el texto no utiliza, parece que la metafísica del TLP tiene la peculiaridad de no admitir que exista una modalidad necesaria *de re.* Es decir, el que un objeto tenga una propiedad siempre será un hecho posible o contingente, la necesidad queda reservada al ámbito de lo dicho, es decir, sólo se afirma *de dicto,* y Wittgenstein sostiene que todas las afirmaciones necesarias carecen de contenido.

El que no haya necesidad de re permite mantener una línea nítida y bien trazada entre las propiedades y relaciones formales y materiales. Las propiedades y relaciones formales no son siquiera configuraciones de objetos, no consisten en la posesión de una propiedad especial (formal) por parte de un objeto, sino en condiciones necesarias para hablar de tal o cual objeto. La propiedad de una proposición, por ejemplo, de poder ser verdadera o falsa, no es una propiedad que podría no darse, sino que es una condición necesaria para que algo siquiera califique como proposición. Es en estas condiciones necesarias en las que se basarán las reglas del lenguaje para mantener su objetividad o no-arbitrariedad.

No es en virtud de expresar contenidos necesarios que hay verdades necesarias en lógica y matemáticas porque no hay, para Wittgenstein, estados de cosas necesarios. Es en virtud de las reglas de manipulación simbólica que se puede hablar de necesidad, por eso sólo se puede hablar de necesidad *de dicto*.

El TLP ofrece una teoría para explicar el fenómeno de la intencionalidad entre el lenguaje y el mundo, el hecho de que el lenguaje logra ser *acerca de* algo. La teoría intenta mostrar qué es lo que hay en común en todos los fenómenos de intencionalidad, para centrarse en el lenguaje científico y en cómo las ciencias formales, lógica y matemáticas, no encajan en el tipo de simbolismo que tiene intencionalidad hacia el mundo, sino que son parte de las condiciones de posibilidad para que se dé esta intencionalidad y representación simbólica.

La teoría figurativa hace una distinción entre tipos de reglas de tal manera que las reglas lingüísticas no son en su totalidad convencionales y arbitrarias, sino que están constreñidas a cumplir con ciertas condiciones mínimas objetivas para que se dé el fenómeno intencional adecuadamente. Es así como la teoría explica la intencionalidad lingüística apelando en parte a reglas convencionales, pero sin colapsar en un convencionalismo que haría imposible explicar la objetividad y no arbitrariedad de las ciencias formales como parte de las condiciones de posibilidad de la representación.

Es así como estos conceptos se interrelacionan para explicar la no-informatividad de las ciencias formales, su falta de intencionalidad y, a pesar de ello, la posibilidad de tener criterios de validez para hablar de tautologías y contradicciones, ecuaciones correctas e incorrectas. Para especificar estos criterios en el ámbito de la aritmética se echa mano de la teoría de las operaciones, que es el tema del siguiente y último capítulo.

Capítulo III: Normatividad y objetividad matemática en el TLP

En este capítulo se trabajarán los conceptos centrales que utiliza el TLP para definir su filosofía de las matemáticas: operación, número y ecuación. Para trabajar estos conceptos se revisará lo que Frascolla llama la teoría de las operaciones del TLP, una notación particular cuya exégesis es un tema de debate. De ahí pueden extraerse algunas elucidaciones para el tema de la normatividad: hay ciertas reglas en juego en esa teoría de las operaciones y pueden arrojar luz sobre la postura que el TLP adoptaría respecto del problema de la normatividad matemática.

La parte metafísica de la teoría del TLP ya perfila los conceptos que permitirán que la noción de operación rescate la normatividad y objetividad matemática, pero la manera en que se concebía esta noción a principios del siglo XX es retomada en el TLP, si bien la terminología que la define se adapta a la teoría. Considérese por ejemplo la caracterización que hace de ella A.N. Whitehead en 1898:

> OPERATIONS. Judgments of equivalence can be founded on direct perception, as when it is judged by direct perception that two different pieces of stuff match in colour. But the judgment may be founded on a knowledge of the respective derivations of the things judged to be equivalent from other things respectively either identical or equivalent. It is this process of derivation which is the special province of a calculus. The derivation of a thing p from things a,b,c,..., can also be conceived as an operation on the things a,b,c,..., which produces the thing p. (Whitehead, 1898, págs. 7-9)

En esta definición del concepto de operación ya se encuentran dos ideas fundamentales para la filosofía de las matemáticas del TLP:

i) Los juicios de equivalencia pueden basarse en una percepción o intuición, idea que parece estar detrás de la notación especial que Wittgenstein desarrolla para traducir a un lenguaje operativo la noción de número y las operaciones aritméticas básicas, de tal manera que la justificación para aseverar la validez de una ecuación descansa en la *percepción directa* de que dos expresiones simbólicas tienen el mismo significado.

ii) Las operaciones pueden concebirse como expresiones de una relación de derivación, una relación *interna*, entre sus bases y su resultado. Esas relaciones serían objetivas, lo cual significa que si las operaciones se guían por ellas y las matemáticas pueden desarrollarse por completo a partir de operaciones, en esas relaciones residiría su objetividad.

Sin embargo, el riesgo de esta estrategia es que parece que el pretendido prescripcionismo vuelve a caer en una forma de descripcionismo: las matemáticas no se basan fundamentalmente en reglas, porque sus reglas (las operaciones) se basan en hechos, sólo que son hechos sobre los aspectos *formales* (en oposición a los aspectos *materiales*, de contenido) de la representación. El filósofo von Wright habla de este colapso del normativismo en descripcionismo en el ámbito de las ciencias formales:

> Yet to say that the laws of logic prescribe how people have to think in order to think correctly is a challenging and dangerous way of talking. It suggests that the 'prescriptive' function of the laws of logic is secondary to a 'descriptive' function of them as stating principles of correct thinking. Primarily, the laws of logic and mathematics state truths about the logical and mathematical entities—propositions, relations, inferences, numbers, etc. This they also do overtly when formulated in the usual way, as, e.g., when we say, 'Every proposition is either true or false.'
>
> Thus the view of the laws of logic as prescriptive of the way people ought to think leads to a view of these laws as being, primarily, descriptive. What, on this new view, the laws of logic describe is not, however, how people think, but how the logical entities are constituted. (von Wright, 1963, pág. 13).

Este argumento parece retomar de alguna manera la distinción de Frege: en última instancia hay leyes que describen ciertos hechos y con base en ellas se da cuenta de las prescripciones que sobre el pensamiento emite la lógica.

Pero la postura no es cómoda para Wittgenstein porque él quiere hacer una separación tajante entre hechos de la ciencia natural y lo que haga válida a la lógica y las matemáticas para explicar su carácter a priori y necesario. Para que se sostuviera el normativismo y no hubiera un colapso en descripcionismo se tendría que aclarar la cuestión del tipo de relación entre estos aspectos formales y las reglas que se basan en ellos, así como revisar si es sostenible la idea de que su estatus metafísico sea de distinto *tipo* de los hechos de las ciencias naturales.

La parte metafísica de este asunto y su relación con las reglas del lenguaje natural se abordó en el capítulo anterior, pero hace falta revisar concretamente qué aspectos formales de la representación sirven de base para las operaciones para evaluar cómo la teoría intenta rescatar la normatividad y objetividad de las matemáticas.

3.1 La teoría general de las operaciones

Frascolla explica la filosofía de la aritmética del TLP en términos del concepto general de operación lógica que Wittgenstein utiliza hacia el final del libro. Como ya se mencionó, Wittgenstein rescata el uso que en su época se hacía de este concepto.

De acuerdo con la exégesis de Frascolla, el TLP ofrece una teoría lo más general posible de las operaciones formales que permite transformar ecuaciones básicas de la aritmética (2+3=5; 2x3=6) en una notación que utiliza una variable operacional que puede tomar como valor cualquier operación (en el sentido específico del TLP) y una variable para la base de la operación que toma como valor cualquier expresión lingüística significativa.

Así, pretende ubicarse el concepto de *número* en el concepto de *iteraciones operativas* y las operaciones aritméticas de suma y resta no serían más que distintas maneras de acomodar las iteraciones de las variables operacionales al traducirlas a la notación de esta teoría.

Aunque puede interpretarse esta notación como una labor reduccionista, en este trabajo se sostiene más bien que es un intento por dar apoyo a la tesis de que la idea de cálculo *presupone* de algún modo la noción de número y, siendo indispensable la noción de operación para el cálculo, trata de mostrar que hay una liga indisoluble entre los conceptos de operación y número.

Se sostiene esta interpretación en lugar de la reduccionista porque tiene coherencia con las notas de Wittgenstein a la copia del TLP de Frank Ramsey, donde se dice que el número es fundamental para el cálculo y no al revés: si el número fuera reducido a términos de algún cálculo, no podría ser fundamental para el cálculo. Wittgenstein propone mostrar que el concepto de número se encuentra ya presupuesto en ciertas nociones abstractas del *lenguaje*, aún más abstractas que las de la lógica de Frege y Russell.

> Wittgenstein constructs a parallel between the (arithmetical) operation by means of which a number is constructed from another and the (logical) truth-operation by means of which a new proposition is constructed from another. (Floyd, Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics, 2005, pág. 17).

> […] for Wittgenstein mathematics should not be conceived of as a calculus separate from other uses of language. Rather he attempts to show that parts of arithmetic, at least, can be seen as grounded in non-mathematical uses of language. (Stanford Encyclopedia of Philosophy, Weir, 2015)

Exponer esta notación y aclarar los conceptos que entran en juego será la labor principal de esta sección.

3.1.1 Forma lógica, forma operativa

Para aclarar lo que propone esta notación considérese la relación entre los siguientes tres conceptos: contenido proposicional, forma lógica y forma operativa. Uno puede hacer abstracción del contenido proposicional de un enunciado para quedarse con la forma lógica al notar que hay proposiciones con distinto contenido pero con la misma forma lógica:

1) Juan no fue al cine hoy.

2) No es cierto que la luna sea de queso.

3) Carlota no está loca.

Estas proposiciones, que tienen distinto contenido, son resultado de una misma operación lógica: la negación. Por ende tienen la misma forma lógica: ¬p. Pero considérense las siguientes proposiciones expresadas en la notación de la lógica proposicional:

1) m→(nvp)

2) qv(r&s)

3) t&(u→v)

Estas proposiciones tienen distinto contenido y distinta forma lógica, utilizan distintas constantes lógicas con distintas variables proposicionales, pero presumiblemente tienen algo en común: tanto el número de operaciones lógicas como el acomodo de las mismas, que podríamos llamar forma operativa. Podríamos expresarlo con la siguiente notación:

$\alpha\Omega(\beta\Psi\delta)$

donde alfa, beta y delta serían meta-variables proposicionales, mientras que psi y omega serían variables de operaciones lógicas.[33] Este nivel de abstracción, por encima de la forma lógica, es el que interesa considerar en la teoría de las operaciones del TLP.

Para notar qué puede ser interesante de esta abstracción al nivel de las operaciones lógicas, considérense las expresiones con la forma operativa $\Omega(\Omega\alpha)$, como $\neg\neg p$. En estos casos tenemos la forma de la aplicación de una operación sobre la aplicación de esa misma operación sobre una variable proposicional. El operador N, propuesto en el TLP, así como la barra de Scheffer, permiten reescribir cualquier conectiva proposicional como la sucesiva iteración de un mismo operador, lo cual permite obtener la forma operativa de cualquier proposición molecular como una iteración sucesiva de una misma operación sobre una base, digamos α, que consistiría en una o más proposiciones sin operadores: $\Omega(\Omega(\Omega\ldots))\ldots\alpha$. Si N es la conectiva que da el valor V sólo cuando todas sus bases tienen el valor F y da F en cualquier otro caso (es decir, puede ser monádico, diádico, etc.) definimos las conectivas de la siguiente manera:

$\neg p \equiv Np$

$p\&q \equiv N(Np,Nq)$

$p \vee q \equiv N(N(p,q))$

$p \rightarrow q \equiv N(N(Np,q))$

$p \leftrightarrow q \equiv N\{N[N(N(Np,q))], N[N(N(p,Nq))]\}$

De esta manera se puede hacer abstracción de las distintas conectivas lógicas para obtener una forma operativa sin necesidad de usar más que una variable para las operaciones: $\neg p$,

---

[33] Esta es una notación meramente ilustrativa, como la que utilizaré en el resto de esta sección, más adelante echaremos mano de la notación que propone Wittgenstein para estos mismo fines.

que sería equivalente a Np, tendría la forma $\Omega\alpha$; p&q, equivalente a N(Np, Nq), tendría la forma $\Omega(\Omega\alpha, \Omega\beta)$[34];

Forma lógica	Equivalencia en N	Forma operativa
p&q	N(Np, Nq)	$\Omega(\Omega\alpha, \Omega\beta)$
pvq	N(N(p,q))	$\Omega(\Omega(\alpha, \beta))$
$p\rightarrow q$	N(N(Np, q))	$\Omega\Omega(\Omega\alpha, \beta)$
$p\leftrightarrow q$	N{N[N(N(Np,q))], N[N(N(p,Nq))]}	$\Omega(\Omega(\Omega\Omega(\Omega\alpha, \beta), \Omega(\Omega\Omega(\alpha, \Omega\beta))))$

Claramente, dos proposiciones escritas en el lenguaje de la lógica proposicional, aún siendo distintas, pueden tener la misma forma operativa, así como dos proposiciones con distinto contenido empírico pueden tener la misma forma lógica. Así, será solamente el *número* y disposición de las operaciones lo que hará la diferencia entre formas operativas y de ese aspecto de la notación intentará sacar provecho Wittgenstein para identificar en el lenguaje el concepto de número. Por esto este nivel de abstracción podría considerarse que trabaja con la *estructura aritmética* de las proposiciones.[35]

Uno podría plantearse la cuestión de si hay una forma operativa *real* de las proposiciones o si es un asunto arbitrario, dado que una misma proposición puede escribirse como resultado de distintas operaciones con constantes lógicas: p&q puede escribirse como ¬(¬pv¬q), es la misma proposición pero es resultado de distintas operaciones, ¿tiene *una* forma operativa *real*?

Para Wittgenstein, por herencia de Frege y sobre todo de Russell, es crucial que haya una forma *real* de las proposiciones, porque esto distingue un aspecto convencional y arbitrario de ellas, su forma gramatical, de un aspecto objetivo y no arbitrario, su forma lógica.[36] Podemos rescatar la forma lógica de una proposición "llueve o tiembla" como pvq, pero

[34] Parece ser discutible si este operador logra su cometido en el sentido de que quizás la forma operativa debería rescatar cuando menos la diferencia entre operadores monádicos y diádicos.
[35] En lugar de *forma operativa* algunos intérpretes como Frascolla hablan de *estructura aritmética*.
[36] Además, esta idea abre la puerta para que el análisis lógico del lenguaje se convierta en una herramienta aclaradora que considera falible la forma gramatical o aparente de las proposiciones; es, en suma, una idea central para el giro lingüístico en filosofía, del cual Wittgenstein es bastión fundamental.

también como ¬(¬p&¬q), porque el criterio objetivo que comanda la traducción a la notación lógica es que las *condiciones de verdad* se mantengan aunque se apliquen distintas operaciones a las que indica el lenguaje natural; es decir, lo importante es que las funciones de verdad resultantes sean iguales.

> Operation signs--number words and truth-operation signs--figure in the articulation of propositions. But the occurrence of a sign for a particular operation in a sentence is never essential for characterizing the sense, if any, of the sentence (5.25) (Floyd, Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics, 2005, pág. 18).

Para la teoría del TLP hay una sola forma lógica para cada proposición, las distintas maneras de escribirla en notación lógica son una facilidad que la notación misma nos ofrece. No es relevante si hay más de una manera de escribir una misma función de verdad porque las reglas de la lógica rescatan los criterios inferenciales de corrección entre proposiciones rescatando condiciones de verdad a través de funciones de verdad. ¿Pero qué criterio tenemos para decir que tal o cual es la forma operativa *real* de una proposición?

Esta cuestión se resuelve si uno considera que hay muchas posibles maneras de llegar a generar una misma función de verdad a partir de ciertas bases. Es decir, las condiciones de verdad de una proposición, por ejemplo, '¬p', pueden obtenerse a través de la de la triple iteración de la negación sobre p, '¬¬¬p', o aplicando a ¬p la conjunción con una tautología '¬p&(pv¬p)' o aplicándole la disyunción consigo misma '¬pv¬p'. Y si sólo utilizamos un operador como N se podrían obtener otras tantas formas operativas.

La forma operativa 'real' depende, por tanto, *no de las condiciones de verdad* de la proposición en cuestión, sino de *qué operaciones se están utilizando para generar las funciones de verdad pertinentes.* No es relevante si no hay una única manera de escribir la forma lógica de una proposición con ciertas condiciones de verdad, al igual que podemos elegir entre pvq y ¬(¬p&¬q), podemos elegir entre escribir p&q como Ω[α,β], podemos reescribir la misma función de verdad como N(Np,Nq) y tendrá una forma operativa distinta: Ω(ΩαΩβ). Lo relevante sería más bien que mantengan sus propiedades esenciales como operaciones: el *número* y acomodo de los operadores.

> The capacity of operations to be iterated and combined with one another, their specific mutual interplay, is what any adequate notation for them must capture; arithmetic and truth-operational logic demand systematic notations for their articulation. (Floyd, Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics, 2005, pág. 18).

La relación de todo esto con el problema de la normatividad de las matemáticas de Wittgenstein se verá con detalle en el presente capítulo. La primera sección estará limitada a exponer con la mayor claridad posible en qué consiste la notación que propone Wittgenstein para mostrar el carácter implícito del concepto de número en el concepto de operación y mostrar cómo hacer las traducciones necesarias para expresar en ella las ecuaciones que involucran sumas y multiplicaciones, todo esto con el apoyo de la exégesis de Frascolla. Pero sólo se abordará con el detalle necesario para exponer el rol de las reglas en este asunto, después se tratará la cuestión de cómo se justifican estas reglas en la siguiente sección del capítulo para terminar con el carácter trascendental de las mismas.

3.1.2 Definición de los símbolos

La notación que se utiliza en el TLP, expuesta aquí con ayuda de la exégesis de Frascolla, es la siguiente:

Ω: variable operacional.

’: la forma del resultado de la aplicación de una operación.

x: variable de una expresión lingüística significativa que no es el resultado de una operación.

$^{\mathbf{n}}$: índice operativo que abrevia el número de iteraciones de una operación, abrevia cadenas SSS…S0.

$^{\mathbf{0}}$: índice operativo de la no-aplicación de una operación sobre una base.

$^{\mathbf{S0}}$: índice operativo de la aplicación de una operación sobre una base, se escribe una letra ‘S’ por cada una de las iteraciones de la operación.

Así, tenemos las siguientes expresiones significativas:

“x”: Muestra la *forma*[37] de una expresión significativa que no es resultado de la aplicación de una operación y puede reescribirse utilizando un índice operativo, “Ω^{0}’x”. En la lógica proposicional, un ejemplo sería la proposición atómica “p”.

“Ω’x”: Muestra la *forma* de una expresión que es resultado de la única aplicación de una operación y puede reescribirse utilizando un índice operativo, “Ω^{S0}’x”. Se obtiene, por ejemplo, de las proposiciones ¬p, N(p,q).

“Ω’Ω’x” Muestra la *forma* de una expresión que es resultado de la doble aplicación de una operación y puede reescribirse utilizando un índice operativo, “Ω^{SS0}’x”. Por ejemplo, ¬¬p, N(N(p,q).

La notación permite extraer algo que podríamos llamar *forma operativa* en analogía con la *forma lógica*, y se encontraría a un nivel más elevado de abstracción. Si la forma lógica hace abstracción del contenido empírico concreto y rescata sólo los aspectos lógicos de la proposición, la forma operativa hace abstracción de los aspectos lógicos concretos (qué conectiva lógica se está utilizando) y rescata solamente la forma de la aplicación de cualesquiera operaciones lógicas estén involucradas en la proposición.

Lo importante en esta notación no son los valores que tomen las variables operativas, sino la manera en que distintas iteraciones de una operación lógica cualquiera, teniendo como base cualquier expresión lingüística, puede hacer perspicua la prueba de una ecuación aritmética por medio del exponente de la variable operacional en cuestión, que abrevia el número de iteraciones operativas y que en última instancia permite hacer la transformación de una expresión en otra para hacer evidente lo que pretende establecer una ecuación: la igualdad de significado entre dos expresiones.

> When he speaks of the “Identität der Bedeutung” of two arithmetical terms “t” and “s”, he means the reciprocal transformability of the forms shown by the correlated terms “Ω^{t}’x” and ”Ω^{s}’x”. And, since a form is not an object named or described by a term of the latter sort, but

---

[37] El énfasis en que estos símbolos “muestran” una “forma” se debe a lo siguiente: se dice que “muestran” siguiendo la terminología del TLP porque su contenido significativo no es la forma en cuestión. Lo que muestran es una “forma” porque se utiliza una variable para las operaciones y otra para la base sobre la que se aplican las operaciones, no sabemos cuál sea la base ni cuáles sean las operaciones, pero la notación nos permite ver su *forma*.

is that which is shown by it, the possibility of mutual reduction of two forms coincides with the possibility of mutual transformation of the two involved expressions “Ω^{t}’x” and ”Ω^{s}’x”. (Frascolla, 1994, pág. 29)

La meta entonces es que esta teoría permita la transformación de la expresión correspondiente a 2+3 en la expresión correspondiente a 5. Esto lo veremos a continuación con ayuda de la definición inductiva dada en 6.02.

3.1.3 Traducción de ecuaciones aritméticas a la teoría general de las operaciones

La definición inductiva en 6.02 dice así:

$x=\Omega^{0}$’x Def.

Ω’Ω^{v}’$x=\Omega^{v+1}$’x Def.

Como aquí se asume que la exégesis de Frascolla respecto de esta notación es en general correcta porque hace coherentes los pasajes relevantes del TLP, se toma esa exégesis como base para reescribir la definición de tal modo que no aparezca el superíndice ‘v’ ni los símbolos ‘+1’ de la definición original, sino tan sólo los que ya se definieron antes en la sección 3.1.1. Esto se hace para evitar la ilusión de trivialidad al hacer la traducción del simbolismo aritmético tradicional al de la teoría operativa del TLP. Las asunciones exegéticas tomadas de Frascolla para hacer esta reescritura vienen rescatadas en las definiciones de los símbolos de la sección anterior. Los cambios son los siguientes: en lugar de ‘v’, se utilizará ‘n’ y en lugar de ‘+1’ se utilizará S. Es decir, sólo cambia la notación del paso inductivo.

La definición queda escrita de la siguiente manera:

Base de la inducción: $x=\Omega^{0}$’x Def.

Paso inductivo: Ω’Ω^{n}’$x=\Omega^{Sn}$’x Def.

Considérese entonces esta reescritura como un paso más en la traducción entre la notación aritmética tradicional y la notación de la teoría operacional propuesta en el TLP. De esta forma, la expresión "Ω^{1+1}'x" sería un paso intermedio en la traducción de "1+1" a "Ω^{SS0}'x".[38]

La idea es que la base de la inducción deje sentado el significado de una expresión donde no ocurre ninguna "S" o ningún "+1" en el índice de la variable operativa, es decir, que muestre la forma de una expresión a la que no se ha aplicado ninguna operación. La tarea del paso inductivo es definir lo que sucede con cada nueva iteración de la operación tomando como base el resultado de anteriores iteraciones de la operación que en última instancia tienen como base una expresión que no es resultado de ninguna operación.

Para hacer la traducción desde la aritmética, comenzamos con los números y luego pasamos a las operaciones de suma y multiplicación.

a) Números

Los números se definen como los índices 'n' de una variable operativa en una expresión del lenguaje formal de las operaciones. Por ejemplo, dada la expresión 'x' de este lenguaje, el número 0 se define como el índice de la variable operativa de cualquier expresión con esta forma operativa: como ya se definió, x=Ω^{0}'x, porque x no es el resultado de ninguna operación, de esta forma se define que el 0 es el índice operativo de todas las expresiones que no son resultado de ninguna operación.

El número 1 podría derivarse de una expresión como ¬p. La forma operativa de ¬p sería Ω'x, es decir, Ω^{1}'x, o bien Ω^{S0}'x. El 1 se definiría como el índice de la variable operativa de todas las expresiones que tienen la misma forma operativa que ¬p, es decir, la única aplicación de una operación sobre una base. El número dos se basaría en expresiones de la forma operativa de ¬¬p, etc.

Así, al tratar de mostrar si 2=3, haríamos la siguiente traducción:

Ω^{2}'x=Ω^{3}'x

Ω^{SS0}'x=Ω^{SSS0}'x

[38] Más adelante, en la sección *b) Suma y multiplicación*, se presentarán en tablas las sucesivas fases de la traducción para mayor claridad.

$\Omega'\Omega'x=\Omega'\Omega'\Omega'x$

Y se muestra que la ecuación es inválida porque las formas operativas expuestas a cada lado de la igualdad son distintas, no hay cómo transformar una en la otra[39].

b) Suma y multiplicación

Para las operaciones de suma y multiplicación, la idea es distribuir las iteraciones operativas de acuerdo con los números de las ecuaciones, que ya quedaron definidos en la teoría operativa del TLP.

Ya podemos traducir los números que componen “2+3=5” de la siguiente manera:

2=n: $\Omega^{2}{}'x$; $\Omega^{SS0}{}'x$; $\Omega'\Omega'x$

3=n: $\Omega^{3}{}'x$; $\Omega^{SSS0}{}'x$; $\Omega'\Omega'\Omega'x$

5=n: $\Omega^{5}{}'x$; $\Omega^{SSSSS0}{}'x$; $\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x$

¿Pero cómo interpretar la operación ‘+’ para poder completar la traducción de la ecuación completa? Tan sólo hay que tomar en cuenta que en una etapa de la traducción se escribe el índice “+1” por cada iteración operativa, y que en la siguiente etapa de la traducción este índice equivale a una “S” en el índice operativo. Podríamos hacer la siguiente analogía entre notaciones de índices operativos:

$\Omega'\Omega'x$	$\Omega^{SS0}{}'x$	$\Omega^{1+1}{}'x$	$\Omega^{2}{}'x$	2
$\Omega'x$	$\Omega^{S0}{}'x$	$\Omega^{1}{}'x$	$\Omega^{1}{}'x$	1
$\Omega'\Omega'\Omega'x$	$\Omega^{SSS0}{}'x$	$\Omega^{1+1+1}{}'x$	$\Omega^{3}{}'x$	3
$\Omega'(\Omega'\Omega)'x$	$\Omega^{S0}{}'\Omega^{SS0}{}'x$	$\Omega'\Omega^{1+1}{}'x$	$\Omega^{1+2}{}'x$	1+2
$\Omega'(\Omega'\Omega)'x = \Omega'\Omega'\Omega'x$	$\Omega^{S0}{}'\Omega^{SS0}{}'x = \Omega^{SSS0}{}'x$	$\Omega'\Omega^{1+1}{}'x = \Omega^{1+1+1}{}'x$	$\Omega^{1+2}{}'x = \Omega^{3}{}'x$	1+2=3

[39] La relevancia de la “transformación” de una expresión en otra por medio de la teoría de las operaciones como criterio de corrección queda más clara en el caso de las ecuaciones que involucran la suma y la multiplicación aritmética, ya que en esos casos la transformación no es tan obvia.

La traducción de la suma corre entonces de la siguiente manera:

t+m	Ω^{t+m}'x	Ω^{t}'Ω^{m}'x

La notación y la definición en 6.02 nos dan las herramientas regulativas necesarias para construir en ella, por un lado, la expresión 1+2 y, por otro lado, la expresión 3, para después mostrar que se pueden transformar una en la otra, probando así la igualdad de significado que pretende aseverar la ecuación. Para esto hace falta un paso que es la eliminación de los paréntesis en las últimas filas de la primera columna, la traducción de '1+2' y por lo tanto la de '1+2=3', ya que aún considerando la tabla de la analogía entre notaciones y la traducción de la suma, hace falta una regla que nos indique qué hacer con los paréntesis para que se logre la evidencia pretendida de que lo que aparece en ambos lados de la ecuación tiene el mismo significado. En la definición de 6.02 no hay paréntesis y no se ha definido el significado de expresiones de la forma Ω'(Ω)'x

(6.231) Es una propiedad de la afirmación que pueda ser concebida como doble negación.

Es una propiedad de "1 + 1 + 1 + 1" que pueda escribirse como "(1 + 1) + (1 + 1)".

En este pasaje se señala una propiedad de distintas operaciones, dos lógicas –la afirmación y la negación- y una aritmética –la suma. Parece que esa propiedad aritmética de la suma, la irrelevancia de los paréntesis, es lo que tendría que rescatarse en la notación de la teoría de las operaciones del TLP. Frascolla propone la siguiente traducción de "2+3=5":

((Ω'Ω)'(Ω'(Ω'Ω)))'x= Ω'Ω'Ω'Ω'Ω'x

Los paréntesis pueden simplemente eliminarse porque sólo son una ayuda para agrupar ordenadamente las iteraciones operativas en la traducción, al utilizar variables se vuelven innecesarios como se ve por su ausencia en la tabla de la traducción de la suma. Lo importante es cómo agrupamos las operaciones al hacer la traducción. Podríamos expresarlo diciendo que se deben cumplir dos condiciones con respecto a las reglas de traducción de los paréntesis en esta notación: (i) que los paréntesis reflejen en un principio los elementos relevantes de la expresión a traducir de tal forma que no haya expresiones distintas con una misma traducción ni dos o más traducciones con distinto significado para una misma expresión, (ii) que la eliminación de estos paréntesis no altere la forma operativa de la traducción.

Que estas dos condiciones son necesarias se vuelve evidente cuando intentamos traducir las multiplicaciones. Lamentablemente el ejemplo considerado en el TLP para la multiplicación es terriblemente ambiguo porque utiliza la multiplicación 2x2 que tiene el mismo resultado que la suma 2+2 y no es tan claro cómo está procediendo. Considérese en cambio la propuesta de traducción de "2x3=6":

$(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega)'x = \Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'x$

Hay grupos de *dos* operaciones entre paréntesis, $(\Omega'\Omega)'$, correspondiendo al *primer* número de la multiplicación, y hay *tres* de estos grupos, correspondiendo al *segundo* número de la multiplicación. Cada grupo entre paréntesis ha de concebirse como una aplicación de una operación, como lo sugiere la coma superior después de cada paréntesis. Después, simplemente se eliminan los paréntesis.[40]

La diferencia entre ambas operaciones aritméticas es que en la suma tan sólo se añaden a la cadena de iteraciones operativas las formas operativas de cada número consecutivamente, mientras que en la multiplicación se forma una cierta cantidad de grupos de cierta cantidad de operaciones, cada cantidad indicada por cada número de la operación.

Añadimos entonces la definición de la multiplicación:

$\Omega^{txm}{}'x = (\Omega^{t})^{m}{}'x$

donde el índice que afecta al paréntesis completo indica las iteraciones de lo que se encuentra dentro del paréntesis. Es decir, habrán m-iteraciones (grupos entre paréntesis) de t-iteraciones de Ω.

Podemos hacer una tabla análoga a la de la suma.

---

[40] Para fines de este trabajo, no hace falta entrar en los detalles técnicos que considera Frascolla, sino que basta con entender qué consecuencias tiene esta teoría para la normatividad de las matemáticas en el TLP, lo cual se revisará más adelante.

Ω’Ω’x	Ω^{SS0}’x	Ω^{1+1}’x	Ω^{2}’x	2
Ω’Ω’Ω’x	Ω^{SSS0}’x	Ω^{1+1+1}’x	Ω^{3}’x	3
Ω’Ω’Ω’Ω’Ω’Ω’x	$\Omega^{SSSSSS0}$’x	$\Omega^{1+1+1+1+1+1}$’x	Ω^{6}’x	6
(Ω’Ω)’(Ω’Ω)’(Ω’Ω)’x	$(\Omega^{SS0})^{SSS0}$’x	$(\Omega^{1+1})^{1+1+1}$’x	Ω^{2x3}’ x	2x3
(Ω’Ω)’(Ω’Ω)’(Ω’Ω)’x = Ω’Ω’Ω’Ω’Ω’Ω’x	$(\Omega^{SS0})^{SSS0}$’x = $\Omega^{SSSSSS0}$’x	$(\Omega^{1+1})^{1+1+1}$’x = $\Omega^{1+1+1+1+1+1}$’x	Ω^{2x3}’x = Ω^{6}’x	2x3=6

La traducción de la multiplicación corre de la siguiente manera:

Txm	Ω^{txm}’x	$(\Omega^{t})^{m}$’x

De igual manera tan sólo hay que eliminar los paréntesis, pero no por ello son superfluos, pues ayudan en la correcta traducción de la expresión aritmética en el simbolismo de la teoría de las operaciones formales, así como los paréntesis en la lógica proposicional ayudan a evitar ambigüedades.

Una vez expuesta esta teoría, podemos abordar la cuestión de la normatividad matemática en términos de las reglas que están rigiendo la teoría operativa recién examinada.

3.2 Reglas y fundamentos en el TLP

Wittgenstein en el TLP no querría que las ecuaciones, tautologías y contradicciones obtuvieran su valor de verdad en virtud de algún hecho del mundo; en particular, quiere evitarse con esta teoría que las ecuaciones, concebidas como reglas que otorgan permisos de sustitución con base en la igualdad de significado de dos expresiones, tengan como base algún hecho en el sentido de que la contrastación entre ese hecho y el contenido de la expresión en cuestión fuera lo que le otorgara validez. Es decir, se evita la tesis de que la normatividad de las matemáticas sea descriptiva, pero entonces hay que dilucidar qué tipo de normatividad poseen.

Las reglas que nos interesan se encuentran en dos niveles, tal como se mencionó en la sección *1.2.3 Wittgenstein: operaciones y reglas* del primer capítulo del presente trabajo:

1) Las operaciones aritméticas son manipulaciones simbólicas que se realizan de acuerdo con ciertas reglas; es decir, el proceder matemático está basado fundamentalmente en reglas.

2) Los resultados de estas manipulaciones, las ecuaciones y tautologías, expresan a su vez reglas; es decir, las expresiones matemáticas no sólo son resultados de reglas de manipulación simbólica, sino que constituyen a su vez reglas.

Las primeras son las que permiten decidir la validez de una ecuación en la teoría de las operaciones formales que acabamos de examinar. Por ejemplo, todas las definiciones involucradas en las traducciones, rescatadas a manera de tablas en la primera sección de este capítulo, son reglas de este tipo, dado que Wittgenstein considera que las definiciones son siempre reglas de traducción. Las segundas serían las ecuaciones mismas que son resultado de las primeras. Las primeras son, pues, fundamentales, y la tarea aquí consiste en averiguar cómo el TLP rescata su objetividad, dado que son reglas que prescriben sobre la manipulación simbólica y uno de los retos más importantes para esta postura es dar cuenta de la objetividad del conocimiento matemático.

3.2.1 Intuición y fundamentación

La traducción a la notación operativa es un método que recuerda en su intención al método de las tablas de verdad para decidir si una proposición es o no es una tautología o una contradicción, donde no hace falta más que *ver* si en cierta columna de la tabla sólo hay V, F o ambos valores.

En forma análoga, para mostrar si una ecuación es correcta sólo habría que traducir ambos lados de la igualdad al lenguaje de las operaciones formales y *ver* si en ambos se encuentra la misma expresión operacional, así se haría completamente evidente la similitud formal interna de la que hablamos antes, pues se pretende que esta notación revele justamente los aspectos formales de las expresiones en cuestión, así como las tablas de verdad hacen explícitas y evidentes las condiciones formales de verdad de sus proposiciones, independientemente de su contenido, tomando en cuenta únicamente su forma lógica.

(6.233) A la cuestión de si la intuición resulta necesaria para la resolución de los problemas matemáticos hay que responder que es precisamente el lenguaje el que procura aquí la necesaria intuición.

(6.2331) Es precisamente el procedimiento del *cálculo* lo que proporciona esta intuición.

El cálculo no es un experimento.

En la epistemología de esta filosofía de las matemáticas, el conocimiento en las ciencias formales se considera a priori, y las demostraciones de validez no son más que una herramienta que facilita el reconocimiento de validez o invalidez ante casos demasiado complejos como para que nuestra mente pudiera decidir sobre su validez a primera vista y, además, se supone que las reglas que regulan estas pruebas permiten decidir la validez de cualquier ecuación o tautología (las matemáticas aquí se consideran completamente decidibles). La ecuación 234+324=558 sería inmanejable en la notación propuesta por Wittgenstein, y eso mostraría que la relevancia de tener una notación más sencilla como la del sistema decimal con números arábigos es sobre todo psicológica.

"el primer Wittgenstein consideraba la prueba en lógica como un algoritmo meramente mecánico y decidible para reconocer ecuaciones y tautologías complicadas. Tenemos que recurrir a ella porque sin la prueba nuestras mentes sólo podrían percibir las tautologías más simples. El algoritmo, no obstante, nos hace posible captar cualquiera de las infinitamente diversas tautologías y ecuaciones." (Pinto, 2002, pág. 16).

El algoritmo, en tanto regla, funciona como un criterio objetivo para decidir si una expresión es o no es válida, sin que haya una comparación entre un contenido proposicional y un hecho del mundo. Esto permite prescindir de hechos matemáticos para dar cuenta de la verdad y la objetividad matemática, pues las matemáticas se basan en reglas y a la vez resultan en reglas para la manipulación simbólica.

Queda por explicar cómo es que las así llamadas propiedades y relaciones formales sirven como base objetiva para estas reglas.

3.2.2 Operaciones formales generales

Las propiedades formales de las operaciones que señala Frascolla[41] son tres:

1) Una operación es un procedimiento uniforme para generar expresiones simbólicas a partir de otras expresiones simbólicas que le sirven de base, cuando la base y el resultado están conectadas por una relación formal (TLP 5.23, 5.231).

2) Las operaciones no representan objetos como los nombres, no es este su aporte semántico en el lenguaje, lo único que se expresa con ellas es una relación formal entre sus bases y su resultado.

3) Al resultado de una operación se le puede tomar como base para aplicar nuevamente la misma operación y obtener otro resultado.

Rememorando lo que se trabajó en la sección anterior, la idea de esta notación es poder traducir en ella las ecuaciones básicas de la aritmética, como 2+3=5, de tal manera que la validez de la ecuación sea tan perspicua como cuando construimos la tabla de verdad de una proposición molecular y podemos saber si es o no una tautología o una contradicción con sólo ver los valores de verdad de la columna relevante. Esta traducción se basa en el índice de la variable operativa que abrevia el número de iteraciones de la operación y en la definición inductiva propuesta en el pasaje 6.02 del TLP.

No se trata entonces de un trabajo de fundamentación, sino que es una notación encaminada a defender ciertas tesis filosóficas sobre la manera en que han de entenderse las condiciones de validez de las ecuaciones de la aritmética, así como el énfasis en las tablas de verdad pretende apoyar una serie de tesis filosóficas sobre la lógica[42] y tampoco es propiamente una propuesta de fundamentación, sino un intento por mostrar que no es necesario un trabajo de fundamentación para dar una explicación del conocimiento lógico.

Que no se trate de un trabajo de fundamentación tiene ciertas consecuencias que hay que tomar en cuenta para saber qué es razonable esperar de él y qué está fuera de lugar. Así

---

[41] Frascolla, 1994, pág. 8
[42] Que las expresiones de la lógica no requieren una fundamentación en la forma de leyes fundamentales, sino que basta un método basado en ciertas reglas (basadas a su vez en propiedades formales de las proposiciones) para decidir la validez lógica de cualquier expresión, no hace falta hallar algunas expresiones lógicas fundamentales de las cuáles se sigan todas las demás.

como la tabla de verdad de la disyunción no nos explica por qué la disyunción es falsa en el renglón donde sus dos elementos son falsos, sino que las tablas son sólo un método para hacer perspicua y mecánica la prueba de si una proposición molecular es o no una tautología o una contradicción, la idea de esta notación parece ser algo similar: no explicar por qué la suma y la multiplicación se agrupan de tal y cual manera en la notación propuesta, sino simplemente hacer perspicua la prueba de que una ecuación es válida. Ambos métodos pretenden basarse en las propiedades formales de lo que están evaluando, pues su evaluación es también formal, es decir, independiente del contenido.

Las propiedades formales particulares de cada operación no quedan rescatadas por esta notación, sino tan sólo las propiedades formales generales del concepto de aplicación de una operación. La doble negación, por ejemplo, que tiene la propiedad de que al ser aplicada dos veces sobre una base da como resultado una expresión con el mismo significado que su base, sería un sinsentido en términos de la teoría de las operaciones:

$\Omega'\Omega'x=\Omega^{2}{}'x$

Ya que por definición $x= \Omega^{0}{}'x$

Es en este sentido que la teoría pretende rescatar únicamente las propiedades estrictamente formales del concepto de aplicación de una operación, no las particularidades de los posibles valores de la variable Ω. Así que las bases para las reglas no se encuentran en estas propiedades formales particulares. La base de estas reglas parece ser más bien el *número* de iteraciones que debe coincidir en ambos lados de la ecuación. Es así como Wittgenstein intenta mostrar que la noción de cálculo presupone la noción de número y que cualquier intento por reducir la aritmética a otro cálculo sin números, de todos modos estará presuponiendo una noción implícita de número.

3.2.2 Reglas, relaciones y propiedades formales

Wittgenstein presenta su notación operativa de tal suerte que las ecuaciones expresen la igualdad de significado de dos expresiones únicamente con base en el *número* de operaciones que afectan a una expresión significativa cualquiera. Las reglas de traducción están construidas en torno a esto. Es decir, la propuesta parece ser que las propiedades generales de las operaciones pueden ser base *suficiente* para asegurar la igualdad de significado entre expresiones, una de ellas siendo el *número* de iteraciones de una misma operación sobre una base. Lo que nos permite *reconocer* la igualdad de significado es esta y no una comparación entre contenidos proposicionales y hechos, intuición que pretende ser traída a la luz con la notación propuesta.

Pero también parece ser que esta notación pretende ser una objeción contra el proyecto logicista mencionado en la sección *1.2.3. Wittgenstein: Operaciones y reglas* del primer capítulo, a saber, que la noción de cálculo presupone la noción de número, puesto que la base para reconocer esta igualdad de significado estaría dada por las propiedades del concepto general de operación: si se considera solamente la forma operativa de una expresión significativa, lo que garantiza su igualdad de significado con otra expresión es que se aplique el mismo *número de veces* la misma operación sobre la misma expresión significativa.

Esto también nos encamina hacia una explicación tanto del carácter pseudo-proposicional de las ecuaciones como de la manera en que el TLP podría explicar la aparición de términos numéricos en el discurso empírico. Para Wittgenstein, la notación ideal no emplearía dos signos distintos para un mismo objeto, haciendo así superfluo el uso del signo de igualdad. Esto puede ser una debilidad para la teoría, ya que hace parecer a la aritmética como el resultado de una notación inadecuada que utiliza más de un signo para designar un mismo objeto, siendo así las matemáticas tan sólo el resultado de nuestras limitaciones intelectuales para desarrollar una notación adecuada. Este asunto de la contribución semántica de los términos numéricos se abordará más adelante.

Podemos abordar la cuestión de qué propiedades y relaciones formales guían las transformaciones que hacen las operaciones lógicas (es decir, las conectivas proposicionales). Al nivel de la lógica las operaciones son conectivas concretas con tablas de verdad concretas y las proposiciones son variables que tienen como condición, *por el mero hecho de ser proposiciones e independientemente de su contenido*, uno de dos posibles valores de verdad, V o F. Esa bipolaridad y las funciones de verdad de cada conectiva bastarían para justificar las transformaciones permitidas por las operaciones y tendrían que expresar (o *mostrar* en el sentido Wittgensteineano) relaciones y propiedades formales de sus bases y sus resultados. Veamos un ejemplo.

Operación: ¬ (negación)

Base de la operación: p

Resultado de la operación: ¬p

La pregunta es qué relación de similitud formal interna entre p y ¬p es expresada por la operación ¬. Para esto podemos echar mano de la tabla de verdad de esta operación.

A	¬α
V	F
F	V

La tabla de verdad expresa una de esas reglas aparentemente arbitrarias y convencionales: <<la operación '¬' da como resultado F cuando el valor de su base es V y da V cuando el valor de su base es F>>. Pero lo importante es que se trata de una posible transformación de valores de verdad, una de cuatro posibles dada una sola proposición y dos valores de verdad. Podemos definir arbitrariamente el símbolo que representa cada columna de la tabla de verdad: T,C,I, ¬ :

A	Tα	Cα	Iα	¬α
V	V	F	V	F
F	V	F	F	V

El punto es que esas cuatro posibilidades[43] no son convencionales ni arbitrarias, sino derivadas de una propiedad formal y objetiva de las proposiciones: su *bipolaridad*.

[43] Y la única interesante es ¬, dado que T convierte cualquier valor a "verdadero", trivializando el contenido de la proposición; C, a "falso", haciendo la misma trivialización; I lo deja todo igual, y "¬" lo invierte, y por tanto no trivializa el contenido de la proposición pues sigue siendo esencial para determinar el valor de verdad de ¬p.

Así, la relación formal que debería darse entre dos proposiciones A y B para generar una a partir de la negación de la otra sería la siguiente: que cuando A sea verdadera, B sea falsa y que cuando A sea falsa, B sea verdadera. Si se da esta relación formal, puede escribirse A como ¬B, o B como ¬A, porque al considerar la proposición molecular A&B y la relación formal mencionada, nos encontraríamos con que la mejor manera de expresar sus condiciones de verdad (que uno de los conyuntos *siempre* tiene el valor de verdad opuesto que el otro) sería por medio de la negación A&¬*A* o bien B&¬*B*.

La relación de similitud formal interna sería simplemente que tanto p como ¬p son figuras de un mismo estado de cosas o, si acaso p fuera una tautología o una contradicción y no figurara, por tanto, ningún estado de cosas, de todos modos p y ¬p obtendrían su valor de verdad en virtud de algo común a la base y el resultado de la operación, ya sea el darse efectivo o no de un cierto estado de cosas o el que su estructura interna por sí sola determine su valor de verdad.

En resumidas cuentas, la relación sería que la verdad de p y la verdad de ¬p depende de un mismo hecho, aunque "reaccionan" de manera opuesta: la negación, que invierte el valor de verdad de la proposición no negada, genera una proposición con condiciones de verdad opuestas y la mejor manera de expresar esta relación es justamente por medio de la operación de negación. En expresión de Wittgenstein, "la negación invierte el sentido de la proposición", pero tiene un valor de verdad en función del mismo hecho que determina el valor de verdad de la proposición no-negada.

Esta similitud deriva tan sólo del carácter bipolar de las proposiciones y por ello es formal, porque no importa el contenido concreto de la proposición en cuestión, da igual si hablamos de "está lloviendo", "llueve o no llueve", "América es un continente" o "la luna es de queso", lo importante es que se trata de proposiciones que tienen algún valor de verdad y que al negarlas obtendremos el valor de verdad contrario.

Estas propiedades formales nos permiten saber qué sucede cuando transformamos una proposición p en una proposición ¬p, sirven de base para hacer esta transformación reguladamente; así como las reglas gramaticales y las referencias de los nombres nos guían en la construcción de proposiciones simples, las operaciones lógicas nos guían en la construcción de proposiciones moleculares y sus tablas de verdad hacen evidentes las relaciones entre estas transformaciones simbólicas, todo ello con base en propiedades formales, pues no hace falta conocer el contenido de una proposición ‘p’ para saber que ‘¬p’ tendrá el valor de verdad contrario, sólo hace falta considerar que tiene algún contenido.

Cada conectiva lógica estaría expresando alguna relación formal. El condicional, por ejemplo, sería una manera de expresar la siguiente relación formal entre dos proposiciones A y B: *que cuando A sea verdadero, B sea verdadero; que cuando A sea falso, B sea verdadero o falso y que en ningún caso A sea verdadero y B falso*. La idea sería que la mejor manera de expresar esta relación formal sería como A→B. Por ejemplo, p→p indica que cualquier proposición tiene la relación formal mencionada consigo misma, p→(qv¬q) indica que cualquier proposición tiene la relación formal mencionada con las tautologías, etc.

En el caso de las expresiones aritméticas aumenta el nivel de generalidad y formalidad, ya que la idea es reducir el concepto de número a una propiedad formal de las operaciones donde ni siquiera importa la operación concreta que se esté aplicando (negación, conjunción, etc.) ni cuál sea la base de esa operación, lo importante serían las propiedades formales de las operaciones y la teoría de las operaciones propuesta en el TLP con su notación harían evidentes también las relaciones entre transformaciones simbólicas.

La lógica simbólica permitiría dilucidar los valores de verdad de ciertas proposiciones considerando únicamente su estructura lógica. La notación operativa propuesta en el TLP tendría la misión de dilucidar la igualdad de significado entre dos expresiones considerando únicamente su estructura operativa o aritmética.

3.3 El problema de la normatividad

Toca ahora preguntarse dónde encaja la filosofía de las matemáticas del TLP sobre las cuestiones planteadas en torno a la normatividad de las ciencias formales en el primer capítulo.

3.3.1 Alternativas a la prescripción y la descripción

Parece claro que es normativista en relación con la cuestión 1) de la sección *1.1.2 Planteamiento del problema*, ya que en el TLP las matemáticas prescriben sobre la manipulación de ciertos símbolos, no son figuras de estados de cosas (que es el criterio para identificar proposiciones descriptivas genuinas, según el TLP), y la dirección de ajuste intencional es responsabilidad de quien utilice los símbolos en cuestión y no de las expresiones simbólicas mismas.

Pero en cuanto a 2) no es claro porque aunque parece que las reglas se toman como *fundamentales* y *constitutivas* del quehacer matemático y se considera que las matemáticas consisten en una correcta manipulación simbólica de acuerdo con ciertas reglas, la teoría del TLP defiende que estas reglas de manipulación simbólica no son arbitrarias ni convencionales y que tampoco se basan en ningún mundo platónico ni en esquemas mentales humanos, sino en los aspectos formales del mundo que determinan las *condiciones de posibilidad* del hecho mismo de representar simbólicamente por medio de un lenguaje. *No* se basan en estas condiciones trascendentales en el sentido de que sus expresiones *consistan* en *descripciones* correctas o incorrectas de ellas[44], sino que se basan en ellas en el sentido de que las reglas que las constituyen están *constreñidas o limitadas* por estas condiciones trascendentales.

En términos de normatividad, esto haría de las reglas de las ciencias formales expresiones “anankásticas” en la terminología de von Wright en Norma y Acción.

> A statement to the effect that something is (or is not) a necessary condition of something else I shall call an anankastic statement. p. 19

Pero esta postura sobre la normatividad no es una desafortunada incomodidad a explicar para la teoría, sino que es una salida a una de las tensiones fundamentales de la teoría del TLP, aquella que se menciona en el aforismo 4.0312 y que habla sobre las constantes lógicas:

> (4.0312) La posibilidad de la proposición descansa sobre el principio de la representación de objetos por medio de signos.

[44] Eso es lo que pretende, en todo caso, el texto mismo del TLP.

> Mi idea fundamental es que las “constantes lógicas” no representan nada. Que la *lógica* de los hechos o puede representarse.

Las constantes lógicas en el TLP son operaciones, es decir, *instrucciones* para manipular símbolos con base en sus propiedades y relaciones formales o internas. Esta idea es, en efecto, fundamental para el TLP, pues si las constantes lógicas, en tanto operaciones formales sobre proposiciones, representaran objetos de estados de cosas, eso conllevaría un compromiso con alguna forma de descripcionismo en el ámbito de la lógica y su teoría ya no podría hacer una distinción de *tipo* entre expresiones de ciencias naturales como aquellas que representan estados de cosas contingentes, y expresiones de ciencias formales como aquellas que no representan estados de cosas y que son necesarias, sino que a lo mucho podría haber una distinción de *grado*.

En el TLP, las operaciones lógicas no representan objetos en un estado de cosas como los nombres, sino que indican cómo obtener las condiciones de verdad de las proposiciones donde aparecen con base en las condiciones de verdad de sus partes, son reglas metalingüísticas. Así, la normatividad prescriptiva rescata al TLP de esta tensión interna entre la no-representatividad de las constantes lógicas y la manera en que la teoría figurativa da cuenta del significado lingüístico.

Pero la normatividad propuesta también puede verse como una manera de limpiar ontológicamente muchos de los conceptos que Wittgenstein heredó de las teorías de Frege y Russell, no sólo en el ámbito de las matemáticas y la lógica, sino también en la propia filosofía del lenguaje: el concepto de verdad, por ejemplo, se concibe como una *instrucción* en la tarea de ubicar el mundo actual en el espacio de mundos posibles[45] y no como una propiedad de una proposición, no como un objeto en un estado de cosas.

3.3.2 Operaciones como reglas

---

[45] La tarea de describir el mundo completamente puede concebirse en el TLP como la tarea de indicar cuál de los mundos posibles es el mundo actual, dado que la totalidad de los hechos, es decir, los estados de cosas que se dan efectivamente, determina cuál es el mundo actual, cada proposición que se señala como verdadera acotaría la región del espacio lógico en la que se encuentra el mundo actual, concibiendo al espacio lógico como la totalidad de los mundos posibles.

Resulta de primera importancia que esta noción central, operación, sea normativa, en el sentido de que las operaciones no son más que reglas o algoritmos para manipular signos que resultan en expresiones de reglas que también permiten manipular signos.

> Según el primer Wittgenstein, la aritmética se entiende mejor si concebimos las ecuaciones numéricas como reglas de inferencia. La sugerencia es que tratemos una ecuación como algo que avala la transición de una proposición empírica que contiene una expresión ubicada en el lado izquierdo de la ecuación a otra proposición empírica en la que la expresión se sustituye por lo que está ubicado en el lado derecho de la ecuación. (Pinto, 2002, pág. 138)

> En el periodo del Tractatus, y en el periodo intermedio, los términos funcionales lógicos y aritméticos eran explicados como reglas de sintaxis. Para usar la terminología del Tractatus, ellos expresaban operaciones, i. e. algoritmos definidos para manipular signos. Similarmente, las oraciones lógicas y aritméticas representaban reglas de inferencia. Se consideraba que las ecuaciones numéricas, por ejemplo, correspondían a reglas de sustitución. (Pinto, 2002, pág. 139).

Es este carácter normativo rescatado a través de la noción de operación lo que establece la distinción de tipo entre lógica, matemáticas y proposiciones empíricas. Pero aquí ya no puede recurrirse a la 'forma lógica' de nombres y objetos, pues la meta es justamente escapar a una semántica referencialista para la lógica y las matemáticas. Queda entonces por evaluar si la justificación para adoptar estas reglas otorga a las matemáticas la objetividad que intuitivamente le adjudicamos.

La objetividad en la que pretende basarse la justificación para adoptar reglas en el ámbito de lógica y matemáticas (reglas lógico-sintácticas, en la terminología de Stenius y Carpintero en sus respectivas exégesis del TLP) es la objetividad de las *relaciones internas* entre expresiones simbólicas[46].

Considérense los siguientes aforismos:

---

[46] Parece haber una ambigüedad sobre el tipo de expresiones a las que se puede aplicar una operación, en aforismos como 5.23 se dice que se aplican a proposiciones, pero en otros pasajes queda abierta la posibilidad de aplicarlas a expresiones que no sean proposiciones. Se intentará lidiar con esta ambigüedad al entrar en la propuesta del TLP para construir el concepto de número con base en el concepto de aplicación de una operación.

> (5.21) Podemos resaltar estas relaciones internas en nuestro modo de expresión representando una proposición como resultado de una operación que la obtiene a partir de otras proposiciones (las bases de la operación)
>
> (5.22) La operación es la expresión de una relación entre las estructuras de su resultado y de sus bases.
>
> (5.23) La operación es lo que ha de suceder con una proposición para hacer de ella otra.
>
> (5.231) Y esto dependerá, naturalmente, de sus propiedades formales, de la similitud interna de sus formas.

Estos cuatro aforismos apoyan la idea de que las reglas lógico-sintácticas en las que se basan la lógica y las matemáticas no son arbitrarias. Parece ser que la relación interna en cuestión es la relación de *similitud formal interna* entre las bases de una operación y su resultado, por 5.231. La dimensión normativa se ve reflejada en 5.23, donde se sugiere que lo que nos dice cómo está permitido formar proposiciones a partir de otras es una operación, y la operación está obligada o constreñida a ser la expresión de una relación formal entre proposiciones, lo que hace una operación es resaltar relaciones internas de similitud formal. Así, la intención de la teoría es que las reglas que nos dicen cómo pasar de una proposición a otra no sean arbitrarias, sino que deben ser la *expresión* de una relación interna entre proposiciones.

Por ejemplo, si tenemos como base de una operación la proposición ‘p’ y le aplicamos la operación de negación ‘¬’, obtenemos la proposición ‘¬p’; la idea es que el resultado de aplicar la operación ‘¬’ sobre ‘p’, es decir ‘¬p’, expresa una relación de similitud formal interna entre ‘p’ y ‘¬p’. El problema es cómo caracterizar estas similitudes internas de tal forma que su objetividad sea fehaciente y que no quede duda de que las reglas que se basan en ellas no son arbitrarias. Para comenzar con este problema considérese el siguiente pasaje de Stenius:

> “One should notice that ‘internal qualities’ and ‘ internal relations’ are not ‘qualities’ or ‘relations’ properly so called. ‘Internal predicates’ are not genuine predicates belonging to the category of predicates – they can be characterized as ‘qualities’ or ‘relations’ only in a metaphorical way. The fact that an atomic quality belongs to a fact, for instance, belongs to a

thing is seen from the existence of an atomic state of affairs, not from its mere possibility; thus it forms an 'external' and not an 'internal' predicate. It follows from this that the logical form of a 'thing' is not a genuine quality of that 'thing' either". (Stenius, 1960, pág. 69).

Si bien en este pasaje Stenius no se está ocupando del concepto de operación ni de las relaciones internas entre proposiciones, podemos suponer que la terminología es suficientemente consistente como para decir que también las relaciones internas entre proposiciones serían relaciones que sería impensable que no se dieran entre ellas, no relaciones casuales como tener un cierto número de palabras en su expresión escrita.[47] Es decir, las reglas que se basan en estas relaciones no sólo no son arbitrarias, sino que se basan en aspectos *necesarios* de las proposiciones y son justamente sus aspectos lógicos, por ello son reglas lógico-sintácticas.

Aquí entra nuevamente la cuestión de hacer una distinción de tipo y no de grado entre lógica, matemáticas y expresiones empíricas. El contraste se delinea muy bien en esta cuestión de las relaciones y propiedades internas; en la metafísica del TLP, los hechos que constituyen al mundo son constituidos a su vez por configuraciones de objetos que son meramente posibles, ninguna configuración genuina en particular sería necesaria, es decir, ninguna propiedad ni ninguna relación genuina se encuentra necesariamente en un estado de cosas.

Por contraste, una relación necesaria (por ejemplo, la relación de consecuencia lógica entre p y ¬¬p), dado que sería impensable que no fuera el caso, no constituiría un posible estado de cosas, porque la metafísica del TLP supone que los estados de cosas, por definición, son configuraciones que podrían darse o no darse, en cambio sería impensable que una relación de consecuencia lógica no se diera en algún mundo posible. Por esto la lógica no estaría figurando o describiendo estados de cosas de ningún tipo, ya que si así fuera tendría que ser posible pensar estados de cosas distintos a los que la lógica figurara. Otra manera de

[47] Aquí se resalta el aspecto kantiano de la filosofía de Wittgenstein del que se habló al principio del capítulo: se busca establecer una diferencia de tipo entre ciencias formales y ciencias empíricas, en el caso del TLP las primeras no describen hechos del mundo sino que son condiciones de posibilidad para realizar dichas descripciones que sería la tarea de las ciencias empíricas.

expresarlo es como se propuso en las conclusiones del capítulo 2: en la metafísica del TLP sólo hay una necesidad de dicto y nunca de re.

3.3.3 Semántica de las operaciones. El discurso empírico

La noción de ‘operación’ pretende resolver una tensión fundamental entre la manera en que la teoría explica el significado de las expresiones sobre el mundo empírico y la manera en que explica el significado de expresiones lógicas y matemáticas, lo cual hace explícita la tesis de la diferencia de tipo y no de grado entre expresiones lógicas, matemáticas y sobre el mundo empírico de la que se habló en la sección anterior.

Como se mencionó al principio de esta sección, una cuestión importante para esta filosofía de las matemáticas es cómo lidia con la aparición de expresiones matemáticas como los números en el discurso empírico. En términos del TLP, cómo se debe analizar una figura donde algunos de sus elementos lingüísticos son números, dado que no se supone que sean nombres con un objeto como referencia.[48]

La respuesta surge de una de las tesis del TLP sobre cómo debería ser una notación adecuada para evitar los problemas filosóficos que, según el autor, surgen solamente de la falta de comprensión de la lógica de nuestro lenguaje. Los errores en las notaciones generan expresiones lingüísticas que, al no encajar en la explicación pictórica del significado y al ser analizadas equivocadamente por nosotros, forzamos su explicación semántica como refiriéndose a un objeto. Este sería el caso de los números y el error del que surgen sería el error de dar a un mismo signo lingüístico más de un signficado, es decir, usarlo de varias maneras, rompiendo así la simetría entre signos y símbolos.

> (3.323) En el lenguaje ordinario sucede con singular frecuencia que la misma palabra designe de modo y manera distintos –esto es, que pertenezca a símbolos distintos-, o que dos palabras que designan de modo y manera distintos sean usados externamente de igual modo en la proposición. […]

[48] Al analizar lógicamente la expresión A: “El dinero que me debe tu hermano es (264x3)2”, tendrían que anotarse (264x3)2 variables para señalar cada peso en cuestión. Esto obedecería a la idea del TLP de eliminar errores lingüístiocs al dar un nombre distinto para cada peso distinto, se evitan lo que bajo los estándares del TLP serían errores de simbolización. Esto, a su vez, hace desaparecer el número como una expresión que aparentemente designa un objeto, en realidad se debería nombrar cada objeto.

> (3.324) Surgen así fácilmente las confusiones más fundamentales (de las que está llena la filosofía entera).

El autor del TLP pretende que en cualquier notación que respetara esta restricción de no usar signos distintos para un mismo significado ni un solo signo con más de un significado, el signo de igualdad sería completamente innecesario, pues la igualdad de la que pretende hablarse con este signo sería siempre verdadera en enunciados tipo a=a y sería siempre falsa en los casos tipo a=b, no habría un enigmático caso donde a=b fuese verdadero, como sí lo hay en las teorías de Frege y Russell, lo cual los hace adoptar distintas estrategias para resolver el enigma.

> (3.325) Para eludir estos errores tenemos que usar un lenguaje sígnico que los excluya, en la medida en que no use el mismo signo en símbolos distintos ni use externamente de igual manera signos que designen de modo diferente. Un lenguaje sígnico, pues, que obedezca a la gramática lógica –a la sintaxis lógica-.
>
> (La escritura conceptual de Frege y Russell es un lenguaje así, que, no obstante, no excluye aún todos los errores.)

La solución de Wittgenstein parece demasiado radical porque si en un lenguaje no se permite poner un mismo nombre a distintos objetos no parece plausible que un ser humano sea capaz de utilizarlo para expresar la mayoría de las cosas que solemos expresar en los lenguajes naturales, puesto que habría una inmanejable cantidad de nombres de objetos. Frente a esta y otras restricciones que impone Wittgenstein para una notación perfecta, hay que recordar que el TLP también tiene la tesis de que el lenguaje natural, con sus imperfecciones, funciona adecuadamente. El problema no es que no sea perfecto, sino nuestra falta de entendimiento de sus imperfecciones.

Es por esta limitación *práctica* humana que se recurre a la ambigüedad del signo con distintos significados y al signo de igualdad, y de ahí al número.[49]

[49] Si las operaciones lógicas generan proposiciones que remiten a una región del espacio de mundos posibles, es superfluo para quien tenga una descripción completa del mundo actual generar este tipo de proposiciones. Si la expresión numérica puede eliminarse asignando distintos nombres a distintos objetos, ya no serían necesarias las expresiones numéricas.

3.3.4 La distinción de tipo entre hechos

La tensión fundamental para una interprestación prescriptivista de la filosofía del TLP se encuentra en que las *reglas* no-arbitrarias que rigen al lenguaje, la lógica y las matemáticas están basadas en *hechos*, por lo cual ellas mismas no están en la base de la fundamentación de las ciencias formales ni de la constitución del significado lingüístico, sino que la base la constituirían estos hechos.

Sin embargo, el tipo de hechos en los que se basan no es igual al tipo de hechos que investigan las ciencias naturales, sino que son hechos *formales* de la representación simbólica, independientes del contenido expresado con ella y de las convenciones particulares de cada representación. La tarea entonces consiste en dilucidar si hay buenos argumentos para sostener esta distinción entre tipos de hechos y si tienen las características que la teoría del TLP requiere para superar los retos del problema de la normatividad.

Lo que expresan las operaciones son *relaciones formales* entre símbolos o expresiones significativas, relaciones que se dan por las *propiedades formales* de los símbolos relacionados. Que se dé una de estas relaciones o propiedades formales sería un hecho formal. Esas propiedades internas se encuentran en dos niveles. Al nivel de los objetos, las propiedades internas de los objetos son sus posibles configuraciones en estados de cosas, esas posibilidades deben ser isomorfas con las posibilidades de sus respectivos nombres de combinarse con otros nombres. Esas posibilidades se denominaron la *forma lógica* de objetos y nombres.

Al siguiente nivel de complejidad, el de configuraciones de objetos, los hechos también poseen propiedades internas que son isomorfas con las proposiciones que los expresan y tienen que ver con las posibilidades de darse y no darse efectivamente como hechos del mundo. Son justamente estas las propiedades o relaciones que expresan las operaciones lógicas. Por ejemplo, el estado de cosas “llueve” tiene una relación interna con el estado de cosas “no llueve”, a saber, la relación de que si el primero se da como hecho, el segundo no se da; a nivel del lenguaje, si la proposición que expresa al primero es verdadera, la que expresa al segundo es falsa.

La pretensión de esta postura entonces es decir que las matemáticas y la lógica están basadas en reglas, pero que esas reglas están *constreñidas* por "hechos" dados por propiedades y relaciones internas. Es decir, no por hechos contingentes como los que estudian las ciencias naturales, no por estados de cosas que podrían darse o no darse en el mundo actual, sino por "hechos" que no podrían no darse, y es por eso que cuando hablamos de estos "hechos" los ponemos entre comillas, pues no cuadran con la estricta definición de hecho genuino que caracteriza el TLP.

La relación entre estas reglas y estos hechos no es entonces la de fundamentación o derivación, lo cual es consistente con lo señalado en la sección anterior sobre la teoría de las operaciones y sobre el método de las tablas de verdad en la lógica. Wittgenstein cuida su vocabulario en estas distinciones diciendo que las operaciones *expresan* relaciones internas entre proposiciones. No las describen con verdad o falsedad, sino que las expresan (*muestran* que se dan, no lo *dicen*).

Me parece que la mejor manera de entender esto independientemente de la distinción propia del TLP entre decir y mostrar, es en analogía con la cuestión de las reglas no-arbitrarias de un lenguaje constreñidas por la condición de otorgar capacidad expresiva a un lenguaje por medio de las posibilidades combinatorias de sus expresiones significativas, de la cual se habló en el segundo capítulo.[50] Esas reglas que otorgan capacidad expresiva no *dicen* ni *describen* que tienen tal o cual capacidad expresiva, solo están justificadas por ese hecho: que otorgan la capacidad expresiva necesaria para figurar un cierto hecho, sin que el hecho figurado sea que tienen esa capacidad expresiva.

La gran diferencia o desanalogía entre las reglas no-arbitrarias del lenguaje pictórico y las reglas de las ciencias formales está en el antecedente de su condicional; es mucho más fuerte y abarcadora la condición en el caso de las segundas que en el de las primeras. En el segundo capítulo se mencionó que la condición para las reglas del lenguaje pictórico es otorgar suficiente capacidad expresiva para figurar ciertos estados de cosas.

---

[50] Si bien, como veremos, la analogía no se cumple del todo.

Así, puede haber lenguajes que no tengan la capacidad expresiva para distinguir entre la relación “estar a un lado de” y las relaciones “estar a la izquierda de” y “estar a la derecha de”, y no por ello dejaría de ser un lenguaje capaz de figurar muchos otros estados de cosas. Si no se cumple la condición, no se pierde la calidad de lenguaje en general, sólo en particular para el estado de cosas que no alcance a ser figurado.

Pero las condiciones de las reglas de las ciencias formales sí abarcan el carácter mismo de lenguaje de un pretendido sistema simbólico, es decir, si no se dan estas condiciones no estamos lidiando con un lenguaje pobre o con poca capacidad expresiva, sino con algo que ni siquiera alcanza a ser un lenguaje. Por ejemplo, que una proposición pueda ser verdadera o falsa.

En este sentido se habla del carácter trascendental en la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein como una teoría que intenta sentar las condiciones de posibilidad del lenguaje, condiciones a las que estarían constreñidas las reglas de las ciencias formales -sin figurarlas-, tratando de explicar así por qué siempre “valen” las “afirmaciones” de las ciencias formales: están ligadas al mero hecho de representar lingüísticamente, no al darse o no darse efectivo de un cierto estado de cosas, porque se representase como se representase las condiciones serían las mismas, de ahí la importancia de distinguir entre lo arbitrario y lo no-arbitrario en los sistemas de representación.

3.3.5 El carácter lógico del *mundo*

Resulta importante resolver si esta exégesis es capaz de hacer sentido de un grupo de afirmaciones del TLP que hablan del carácter lógico del mundo, porque pareciera que según esta interpretación las reglas de la lógica y las matemáticas sólo se dan si antes se da un sistema simbólico y, en cambio, en dichas afirmaciones se habla de una lógica del mundo independientemente de que haya o no seres vivos que utilicen sistemas simbólicos. Frascolla habla de la gravedad de este problema exegético para defender su propia exégesis de la siguiente manera:

> Take proposition 6.22: “The logic of the world, which is shown in tautologies by the propositions of logic, is shown in equations by mathematics”. If someone proposed an interpretation of the philosophy of logic of the Tractatus which cannot account for the fundamental thesis that tautologies show the logic of the world, its formal features (namely,

> the traits it shares with every possible world), this circumstance would be rightly considered a very good reason to raise doubts about the soundness of that interpretation. P.4

La idea es que hay una lógica ya presente en el mundo que posteriormente se muestra en tautologías y en ecuaciones. En la exégesis aquí propuesta las reglas no-arbitrarias del lenguaje y de las ciencias formales adquieren su carácter objetivo y no-arbitrario justamente porque de alguna manera están en función de algunos aspectos del mundo. Frascolla los identifica con los aspectos formales de todo mundo posible, aquellos que no dependen de las configuraciones contingentes de estados de cosas, sino del hecho de que el mundo sea.

(5.552) La lógica es anterior al cómo, no anterior al qué.

G.H. von Wright expresa la cuestión de la relación entre el carácter normativo de las reglas de las ciencias formales y los hechos de la siguiente manera:

> We raised the question whether the laws of logic and mathematics are descriptive or prescriptive. We have found that neither characterization appears quite to the point. These laws may be called descriptive, but not in the same clear sense in which the laws of nature are descriptive. They may also be called prescriptive, but in a rather different sense from that in which the laws of the state are prescriptive. The comparison of the laws of logic (mathematics) to the rules of a game suggested a new characterization of these laws. According to this new characterization, the laws of logic (mathematics) neither describe nor prescribe, but determine something. Irrespective of what we think of the comparison in other respects, we can agree to the usefulness of this characterization. It suits the laws of logic (mathematics) better than either the attribute 'descriptive' or the attribute 'prescriptive'. (von Wright, 1963, pág. 15).

Recordando la clasificación de las reglas lógico-sintácticas abordadas en el segundo capítulo, en relación con las reglas en forma de condicionales qué *debe* hacerse si se ha de alcanzar un cierto fin, von Wright habla de un tipo especial de regla condicional llamada anankástica que tiene la peculiaridad de hablar de condiciones *necesarias* para que se dé una cierta consecuencia. En contraste, las reglas técnicas hablan de condiciones sin más para que se den ciertas consecuencias. Este tipo de reglas podría identificarse con el tipo de reglas al que aparentemente pretende apelar el autor del TLP, reglas basadas en las condiciones necesarias para la representación simbólica y, en el caso de las matemáticas, condiciones necesarias en torno a las operaciones. Por ejemplo: Si toda proposición tiene un de dos valores de verdad, entonces si la operación de negación invierte las condiciones de verdad de una proposición y la disyunción sólo es falsa cuando ambas proposiciones son falsas, entonces "pv¬p" es verdadera en todo mundo posible.

La propiedad operativa de que la iteración sucesiva de un mismo número de operaciones sobre una misma base es suficiente para garantizar la igualdad de significado entre dos expresiones sería la base para todas las ecuaciones, de ese *hecho* derivan las reglas que permiten hacer las traducciones de la suma y la multiplicación a la notación operativa presentada en el TLP. Pero, de nuevo, este tipo de hecho no es un estado de cosas contingente y figurable por proposiciones genuinas, ya que no consiste en una cierta configuración de objetos, no es la atribución de propiedades y relaciones a objetos, sino algo *esencial* a las operaciones, el hecho de poder ser iteradas sobre bases que son el resultado de su propia aplicación.

Conclusiones

La teoría de las operaciones del TLP ofrece una manera de entender el concepto de número en términos de las propiedades del concepto general de operación; en particular, la propiedad de ser iterable sobre el resultado de sus propias aplicaciones.

Más que un fundamento, la traducción de los números y las operaciones de adición y multiplicación al lenguaje de las operaciones generales ofrece una manera de hacer perspicua la naturaleza de las ecuaciones, similar al método de las tablas de verdad en el caso de las operaciones con constantes lógicas y proposiciones.

Las relaciones y propiedades formales en las que se basan las reglas operacionales tienen que ver con las condiciones necesarias para la representación, por ejemplo, que haya expresiones significativas capaces de ser verdaderas o falsas (proposiciones), que dada la verdad de ciertas proposiciones hay una relación formal de implicación con alguna otra proposición (de la verdad de p y q se sigue la verdad de p), que basta con que se aplique el mismo número de veces una operación a una misma base, para garantizar que se tiene el mismo significado. Estas propiedades relaciones constituyen hechos *formales*, (que sólo en un sentido no tractariano pueden llamarse hechos) que constituyen la base de las ciencias formales, en contraste con los hechos que constituyen la base de las ciencias empíricas: los hechos figurados por proposiciones genuinas con nombres que representan objetos.

La cuestión de la semántica de las expresiones matemáticas se resume en que el número es una consecuencia del hecho de que los seres humanos requieren símbolos (el sistema arábigo, por ejemplo) para *ver* perspicuamente en un simbolismo que dos expresiones tienen el mismo significado, y que requieren utilizar un mismo nombre para más de un objeto: la idea es que si la diferencia de nombres fuera garantía de una diferencia de objetos, el signo de igualdad entre nombres sería completamente innecesario y superfluo siempre.

Conclusiones generales

A manera de conclusión puede decirse que el TLP ofrece una filosofía de las matemáticas donde *no* es fundamental ni el carácter prescriptivo ni el descriptivo de sus expresiones y leyes, pero sí se rescatan ambos aspectos de su normatividad y parece ser que ésta es fundamentalmente anankástica, en el sentido de que consta de reglas técnicas (si… entonces…) donde el condicional es *necesario* y no suficiente para la posibilidad de representar simbólicamente.

No son fundamentalmente prescriptivas porque las prescripciones que ahí están en juego (cómo *deben* manipularse los símbolos) tienen a su vez un fundamento que son las propiedades y relaciones *formales* que comparten los distintos elementos de la representación simbólica (nombres, proposiciones) y sus contrapartes en el mundo (objetos, estados de cosas), esa relación rescata la objetividad de la validez de estas expresiones.

Para ser descriptivas las ecuaciones deberían cargar un contenido significativo y capaz de informar, pero conocer el significado de las dos expresiones en una ecuación es una condición necesaria para entender el significado de la ecuación completa, por lo cual no sería posible una expresión que asevere informativamente la igualdad de significado entre dos expresiones en *una notación correcta con distintos nombres para distintos objetos.* Dado que por limitaciones psicológicas humanas esto no es posible, se vuelve necesario (por una cuestión meramente práctica) el uso del signo de igualdad. Las tautologías y contradicciones tampoco pueden cargar un contenido significativo, porque no son capaces de delimitar una región del espacio lógico donde se ubica el mundo actual, no son capaces de informar en el sentido del TLP y por lo tanto no figuran genuinamente.

La dimensión prescriptiva de la lógica y las matemáticas se limita a los símbolos, pero de ninguna manera se sugiere que a través de ellas se *inventen* las propiedades formales que deben compartir el mundo y el lenguaje para que haya intencionalidad. El término que reserva Wittgenstein para esta relación es el de *expresión*.

Como estas propiedades y relaciones formales no dependen de las características accidentales de cada lenguaje particular ni de la contingente configuración del mundo actual, no pueden ser *descritas* en el sentido de que su aseveración contribuya a ubicar el mundo actual en el espacio de mundos posibles; por eso las tautologías y contradicciones, que se construyen con base en ellas, no tienen como contenido significativo ninguna de esas propiedades y relaciones, sino que derivan de ellas, y las ecuaciones que en apariencia sí pretenden hablar de estas propiedades y relaciones (igualdad de significado) también están solamente basadas en ellas, pero por el peculiar *tipo metafísico* que representan estas propiedades y relaciones no se pueden describir si con ello quiere decirse, como Wittgenstein en el TLP, describir informativamente, contribuir a la ubicación del mundo actual en el espacio de mundos posibles.

Bibliografía

Bulygin, E. (1995). Lógica deóntica. En C. Alchourrón, *Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía - Lógica* (Vol. 7, págs. 129-142). Madrid: Trotta.

Floyd, J. (2000). Wittgenstein, Mathematics and Philosophy. En A. Crary, & R. Read, *The New Wittgenstein* (págs. 232-261). Londres: Routledge.

Floyd, J. (2005). Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics. En S. Shapiro, *The Oxford of Philosophy of Mathematics and Logic* (págs. 75-128). Nueva York: Oxford University Press.

Frascolla, P. (1994). *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics.* Londres: Routledge.

Frege, G. (1960). Grundgesetze der Arithmetik. En P. Geach, & M. Black (Edits.), *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege* (P. Geach, Trad., págs. 137-158). Londres: Basil Blackwell & Mott Ltd.

García-Carpintero, M. (1996). *Las palabras, las ideas y las cosas.* Barcelona: Ariel.

Glock, H.-J. (1996). *A Wittgenstein Dictionary.* Oxford: Wiley-Blackwell.

Kant, I. (1992). *Lectures on Logic.* New York: Cambridge.

Kenny, A. (1990). *El legado de Wittgenstein.* México: Siglo Veintinuno Editores, S.A. de C.V.

Mezzadri, D. (2015). Frege on the Normativity and Constitutivity of Logic for Thought I. *Philosophy Compass*(10), 583-591.

Pinto, S. (2002). El antiplatonismo del Tractatus de Wittgenstein. *Theoría: Revista del Colegio de Filosofía*(13), 137-152.

Putnam, H. (2000). The New Wittgenstein. En A. Crary, R. Read, A. Crary, & R. Read (Edits.), *The New Wittgenstein* (págs. 218-231). Londres: Routledge.

Rodych, V. (2011). Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. (E. Zalta, Ed.) *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2011/entries/wittgenstein-mathematics/>.

Russell, B. (1912). *The Problems of Philosophy*. Londres: Oxford University Press.

Russell, B. (1920). *Introduction to Mathematical Philosophy* (Segunda ed.). Londres: George Allen & Unwin.

Russell, B. (2010). *The Principles of Mathematics*. Londres: Routledge Classics.

Searle, J. (1999). *Intencionalidad. Un ensayo en la filosofía de la mente*. Madrid: Altaya.

Stenius, E. (1960). *Wittgenstein's Tractatus*. Londres: Basil Blackwell.

Stroud, B. (Octubre de 1965). Wittgenstein and Logical Necessity. *The Philosophical Review, LXXIV*(4), 504-518.

von Wright, G. H. (1963). *Norm and Action: A Logical Enquiry*. Londres: Routledge and Kegan Paul.

Weir, A. (2015). Formalism in the Philosophy of Mathematics. (N. Z. Edward, Ed.) *Stanford Encylopedia of Philosophy, URL = <http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/formalism-mathematics/>*.

Whitehead, A. N. (1898). *A Treatise on Universal Algebra*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wittgenstein, L. (1999). *Tractatus Logico-Philosophicus*. Madrid: Alianza.