UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

La Inyectividad Relativa a Clases de Módulos

Tesis que presenta:
Víctor Arellano de la Cruz

Para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Director de Tesis:
Dr. Carlos José Enrique Signoret Poillon

Jurado:
Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía
Dr. Mario Pineda Ruelas
Dr. Carlos José Enrique Signoret Poillon

9 de Abril del 2015

Agradecimientos

Este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo de mi familia, en particular de mis abuelos maternos y de mi tía Reyna, quienes han estado a mi lado en cada paso que doy en la vida; le agradezco por estar siempre estar ahí, por tenerme la paciencia y creer en mí.

También quiero agradecer a mi novia por apoyarme cada vez que lo necesité, por estar a mi lado durante este escalón de mi vida, por ser una parte importante es este paso y en mi vida y por impulsarme siempre a seguir adelante.

A mi asesor quiero agradecerle por haberme tenido paciencia para transmitirme sus conocimientos, por el tiempo que me dedicó, por escucharme cuando lo necesité, por crear confianza en mi mismo y por motivarme para seguir adelante, muchas gracias profesor.

Quiero agradecer a CONACYT por el apoyo económico que me otorgó durante mi estudio, ya que sin el me hubiera sido más difícil de concluir mis estudios.

Muchas gracias a todos, sin ustedes no lo hubiera logrado.

Índice general

Introducción

El concepto de inyectividad en Teoría de Módulos es sumamente importante debido a su conexión con las propiedades de escisión y extensión y a las caracterizaciones que se dan con respecto al anillo. Por ejemplo, los módulos inyectivos son sumandos directos de cualquiera de sus extensiones; esto permite usarlos en diversos contextos del álgebra homológica. Por consiguiente el estudio de los módulos inyectivos relativos es un campo muy fértil de investigación, debido a la importancia de ciertas clases de módulos, como las clases de Torsión Hereditaria.

En la literatura se ha generalizado el concepto de inyectividad dando lugar a distintas nociones más o menos usadas en la teoría. De igual forma, el concepto de inyectividad ha sido relativizado con respecto a clases de módulos.

En este trabajo proporcionamos una exposición completa de la teoría clásica de módulos inyectivos, una relativización, también ya clásica, a una Teoría de Torsión Hereditaria, así como una relativización novedosa a ciertas clases de módulos llamadas “Clases Aditivas”.

Las Clases Aditivas fueron introducidas por Walker y Walker [Walk] en su estudio sobre las clases de Serre y las clases de Torsión Hereditaria; sin embargo no han sido estudiadas en la literatura, o al menos no extensamente. Las Clases Aditivas están definidas por ser clases cerradas bajo submódulos, cocientes y sumas directas finitas.

La teoría clásica de la inyectividad relativa a una clase de Torsión Hereditaria no se reproduce en su totalidad en el caso de clases aditivas; sin embargo, muchas de las propiedades importantes se preservan en esta generalización.

Esta tesis está formada por tres capítulos, en los cuales se presenta la teoría de inyectividad clásica, la inyectividad relativa a una teoría de torsión hereditaria y la inyectividad relativa a una clase aditiva. A lo largo de este trabajo, R denotará un anillo asociativo con unidad y R-Mod la categoría de los R-módulos unitarios izquierdos.

En el primer capítulo exponemos la teoría clásica de inyectividad dando propiedades y caracterizaciones, así como su relación con los Anillos Noetherianos.

El segundo capítulo estudia la noción de inyectividad relativa a una clase de torsión hereditaria, mostrando las propiedades que son similares a las del caso clásico, así como su relación con los anillos Noetherianos respectivos a estas clases.

En el último capítulo se da la definición de clase aditiva y se examinan las propiedades de la inyectividad relativa a una clase aditiva. En particular proporcionamos un criterio de inyectividad relativa a clases aditivas, así como ciertas condiciones de cadenas ascendentes relativas a clases aditivas.

Al final de este trabajo se presenta una breve sección de conclusión.

Capítulo 1

Preliminares

En esta sección damos varios conceptos básicos y presentamos la teoría clásica de módulos inyectivos.

1.1. R-Módulos

Para fines de este trabajo, R será un anillo asociativo con unidad.

Definición 1.1.1. *Un **R-módulo izquierdo** es un grupo abeliano aditivo M equipado con una acción de R que lo hace un "espacio vectorial sobre R": hay una función $R \times M \to M$, denotada por $(r, m) \mapsto rm$, que satisface:*

(i) $r(m + m') = rm + rm'$;

(ii) $(r + r')m = rm + r'm$;

(iii) $(rr')m = r(r'm)$;

(iv) $1m = m$;

donde $m, m' \in M$ y $1, r, r' \in R$.

*De igual manera, un **R-módulo derecho** es un grupo abeliano M si hay una función $R \times M \to M$ denotada por $(r, m) \mapsto mr$, que satisface lo axiomas (i) y (ii) de un R-módulo izquierdo y además:*

(iii') $m(rr') = (mr)r'$

(iv') $m1 = m$.

Definición 1.1.2. *Si M es un R-módulo, entonces un* ***R-submódulo*** *N de M es un subgrupo que es cerrado bajo multiplicación por escalar:*

$$\textit{Si}\, n \in N \ \textit{entonces}\, rn \in N, \ \textit{para toda}\, r \in R.$$

Definición 1.1.3. *Sean R y S anillos. Un grupo abeliano M es un* ***(R-S)-bimódulo****, denotado por ${}_RM_S$ si M es un R-módulo izquierdo y un S-módulo derecho y las dos acciones son relacionadas por una ley asociativa: $r(ms) = (rm)s$ para toda $r \in R$, $m \in M$ y $s \in S$.*

Definición 1.1.4. *Una función $f : M \to N$ entre R-módulos izquierdos M y N es un* ***R-morfismo*** *si:*

(i) $f(m + m') = f(m) + f(m')$

(ii) $f(rm) = rf(m)$.

Diremos que f es un ***monomorfismo*** *si f es inyectiva; diremos que f es un* ***epimorfismo*** *si f es suprayectiva. Más aún, f es un* ***isomorfismo*** *si f es inyectiva y suprayectiva.*

Notación: Dados cualesquiera dos R-módulos izquierdos M y N, denotaremos por $Hom_R(M, N)$ el conjunto de todos los R-morfismos de M a N.

La siguiente proposición menciona un ejemplo de un bimódulo.

Proposición 1.1.5. *Dados ${}_RA_S$ y ${}_RB$, entonces $Hom_R(A, B)$ es un S-módulo izquierdo si definimos $(sf)(a) = f(as)$, donde $s \in S$, $a \in A$ y $f \in Hom_R(A, B)$.*

Prueba. Primero observemos que $Hom_R(A, B)$ es un grupo abeliano. Ahora, como A es un bimódulo, entonces $(sf)(a) = f(as)$ está bien definida y si tomamos $r \in R$ tenemos que:

$$(sf)(ra) = f((ra)s) = f(r(as)) = r(f(as)) = r(sf)(a)$$

y por tanto $Hom_R(A, B)$ es un S-módulo izquierdo. ■

Definición 1.1.6. *Si N es un submódulo de M, el* ***módulo cociente*** *M/N es el grupo cociente M/N hecho un R-módulo por la aplicación: $(r, m + N) \mapsto r(m + N) = rm + N$, la cual está bien definida pues N es un R-submódulo.*

Definición 1.1.7. *Sean $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de módulos. Entonces el* ***producto directo****, denotado por $\prod\limits_{i \in I} M_i$, es el módulo cuyo conjunto subyacente es el producto cartesiano de los M_i, es decir, el conjunto de los vectores $a = (a_i)$ donde $a_i \in A_i$, y con la operación de módulo definida por:*

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$$

$$r(a_i) = (ra_i)$$

Definición 1.1.8. *La* **suma directa**, *denotado por* $\bigoplus_{i\in I} M_i$, *es el submódulo de* $\prod_{i\in I} M_i$ *que consiste de todos los* (a_i) *cuyas coordenadas "*a_i*" son casi todas* 0*, es decir, todas salvo un número finito de* a_i *son* 0.

Definición 1.1.9. *Sea* $M = \prod_{j\in J} M_j$. *Definimos las* ***proyecciones*** $p_j : M \to M_j$ *y las* ***inclusiones*** $i_j : M_j \to M$ *por* $p_j : (m_j) \mapsto m_j$ *e* $i_j(m_j)$ *el elemento que tiene a* m_j *en la* j*-ésima coordenada y* 0 *en las restantes. Notemos que* $p_j \circ i_j = 1_M$ *y* $p_j \circ i_k = 0$ *si* $j \neq k \in J$.

A continuación se mencionan los tres teoremas de isomorfismo de Noether para la teoría de módulos.

Teorema 1.1.10. *Sean* N *y* M R*-módulos izquierdos, entonces:*

1. *Si* $f : M \to N$, *tenemos que la aplicación* $m + Kerf \mapsto f(m)$ *es un isomorfismo, es decir,* $M/Kerf \approx imf$.
2. *Si* M_1 *y* M_2 *son submódulos de* M, *entonces* $m_1 + M_1 \cap M_2 \mapsto m_1 + M_2$ *es un isomorfismo, esto es,* $M_1/M_1 \cap M_2 \approx M_1 + M_2/M_2$.
3. *Si* $M_2 \subset M_1$ *son submódulos de* M, *entonces* $(M/M_2)/(M_1/M_2) \approx M/M_1$.

Prueba. La demostración de los tres teoremas de isomorfismo se realizan de manera similar a la teoría de grupos. ■

Definición 1.1.11. *La sucesión de los dos morfismos* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *es* ***exacta*** *en* M *si* $imf = kerg$.

Proposición 1.1.12. *Sean M, N y L R-módulos izquierdos. Entonces se cumplen:*

(i) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ *es exacta (en M) si y solo si f es monomorfismo.*

(ii) $M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *es exacta (en N) si y solo si g es epimorfismo.*

(iii) $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ *es exacta si y solo si f es isomorfismo.*

(iv) $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *es exacta si y solo si $N \approx M/L$.*

Prueba.

(i) Supongamos que la sucesión es exacta en M y sea $h : 0 \to M$, entonces $0 = Imh = Kerf$, por lo tanto f es monomorfismo. Ahora supongamos que f es monomorfismo y consideremos la sucesión $0 \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} N$. Por hipótesis$Kerf = 0$, pero $Imh = 0$, entonces $Imh = Kerg$ y así la sucesión es exacta.

(ii) Supongamos que la sucesión $M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{\alpha} 0$ es exacta en N, entonces $Img = Ker\alpha = N$, por tanto g es epimorfismo. Inversamente, consideremos la sucesión $M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{\alpha} 0$; si g es epimorfismo, se cumple que $Img = N$. Por otro lado tenemos que $Ker\alpha = N$, entonces por transitividad $Img = Ker\alpha$ y así la sucesión es exacta.

(iii) Es consecuencia inmediata de (i) y (ii).

(iv) Si la sucesión $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ es exacta, entonces $Imf = Kerg$; por otro lado por el tercer teorema de isomorfismo de Noether tenemos que $M/Kerg \cong Img$, es decir, $M/Imf \cong Img$, pero como g es epimorfismo, entonces $Img \cong N$ y puesto que $Imf \cong L$ (por ser f monomorfismo), podemos concluir que $M/L \cong M/Imf \cong Img \cong N$.

Consideremos ahora la sucesión $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ y supongamos que $N \cong M/L$. Por (i) y (ii), f es un monomorfismo y g es un epimorfismo. Sea $m \in Kerg \subseteq M$ tal que $g(m) = m + L$, entonces $0 = g(m) = m + L$, es decir, $m \in L$, pero por ser f monomorfismo tenemos que $L \cong f(L)$, por lo tanto, haciendo abuso de la notación, podemos concluir que $m \in Imf$ y así $Kerg \subseteq Imf$.

Inversamente, sea $m \in Imf \subseteq M$, es decir, existe $l \in L$ tal que $f(l) = m$, pero $g(f(l)) = f(l) + L$ y $f(L) \cong L$, entonces $f(l) \in L$, lo que nos dice que $f(l) \in Kerg$ y por consiguiente $Imf \subseteq Kerg$.

Con lo anterior queda demostrada la proposición. ■

Definición 1.1.13. *Una **Categoría** $\mathfrak{C}$ consiste de una clase de **objetos**, obj $\mathfrak{C}$, conjunto de **morfismos**, $Hom_{\mathfrak{C}}(A,B)$ (para cada par ordenado de objetos) y **composiciones** $Hom_{\mathfrak{C}}(A,B) \times Hom_{\mathfrak{C}}(B,C) \to Hom_{\mathfrak{C}}(A,C)$, denotado por $(f,g) \mapsto g \circ f$, que satisfacen los siguientes axiomas:*

(i) *Para cada objeto A, existe un **morfismo identidad** $1_A \in Hom_{\mathfrak{C}}(A,A)$ tal que $f \circ 1_A = f$ para toda $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A,B)$ y $1_A \circ g = g$ para toda $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(C,A)$;*

(ii) *La composición es asociativa: si $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A,B)$, $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(B,C)$ y $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(C,D)$, entonces:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Definición 1.1.14. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorias. Un **funtor (covariante)** $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es una asignación que satisface:*

(i) *Si $A \in$ obj $\mathfrak{C}$, entonces $FA \in$ obj $\mathfrak{D}$;*

(ii) *Si $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo en $\mathfrak{C}$, entonces $FA \xrightarrow{Ff} FB$ es un morfismo en $\mathfrak{D}$;*

(iii) *Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ son morfismos en $\mathfrak{C}$, entonces $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$;*

(iv) *Para cada $A \in$ obj $\mathfrak{C}$, tenemos que $F(1_A) = 1_{FA}$.*

Definición 1.1.15. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorias. Un **funtor contravariante** $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es una función que satisface:*

(i) *Si $A \in$ obj $\mathfrak{C}$, entonces $FA \in$ obj $\mathfrak{D}$;*

(ii) *Si $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo en $\mathfrak{C}$, entonces $FB \xrightarrow{Ff} FA$ es un morfismo en $\mathfrak{D}$ (por tanto F invierte flechas);*

(iii) *Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ son morfismos en $\mathfrak{C}$, entonces $F(g \circ f) = Ff \circ Fg$;*

(iv) *Para cada $A \in$ obj $\mathfrak{C}$, tenemos que $F(1_A) = 1_{FA}$.*

La asignación $Hom(A,\_\,)$: $\mathfrak{C} \to Conjuntos$ es un funtor que dado un objeto A de la categoría $\mathfrak{C}$, está definida por $FC = Hom(A,C)$; si $C \xrightarrow{f} C'$ es un morfismo en $\mathfrak{C}$, entonces definimos $Hom(A,C) \xrightarrow{Ff} Hom(A,C')$ por $g \mapsto f \circ g$. Denotaremos Ff por f_*.

Definición 1.1.16. *Diremos que F es un* ***funtor (covariante) exacto izquierdo*** *si: la exactitud de*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

implica la exactitud de

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC$$

Así mismo, un funtor (covariante) F es ***exacto derecho*** *si: la exactitud de*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

implica la exactitud de

$$FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \longrightarrow 0\ .$$

Similarmente, un ***funtor contravariante*** *F es* ***exacto izquierdo*** *si: la exactitud de*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

implica la exactitud de

$$0 \longrightarrow FC \xrightarrow{Fg} FB \xrightarrow{Ff} FA\ ;$$

un funtor contravariante F es ***exacto derecho*** *si: la exactitud de*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

implica la exactitud de

$$FC \xrightarrow{Fg} FB \xrightarrow{Ff} FA \longrightarrow 0\ .$$

Si un funtor (contravariante) F es exacto izquierdo y exacto derecho, entonces diremos que F es un **funtor (contravariante) exacto**.

La siguiente proposición da un ejemplo de un funtor exacto izquierdo y un ejemplo de un funtor contravariante izquierdo.

Proposición 1.1.17. *Para cada módulo M, $F = Hom(M,\_\,)$ es un funtor exacto izquierdo y $G = Hom(\_, M)$ es un funtor contravariante izquierdo.*

Prueba. $Hom(M,\_\,)$ es exacto izquierdo: Si $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, entonces debemos demostrar que $0 \longrightarrow Hom(M, A) \xrightarrow{Ff} Hom(M, B) \xrightarrow{Fg} Hom(M, C)$ también lo es; donde $(Ff)(\alpha) = f \circ \alpha$ y $(Fg)(\beta) = g \circ \beta$, con $\alpha \in Hom(M, A)$ y $\beta \in Hom(M, B)$.

(i) Ff es monomorfismo. Si $(Ff)(\alpha) = 0$ entonces $f \circ \alpha = 0$, es decir, $0 = (f \circ \alpha)(a) = f(\alpha(a))$ para toda $a \in A$. Como f es monomorfismo, esto nos dice que $\alpha(a) = 0$, para toda $a \in A$, y así $\alpha = 0$.

(ii) $Im(Ff) \subseteq Ker(Fg)$. Sea $\beta \in Im(Ff)$, entonces $\beta = f \circ \alpha$ para algún $\alpha \in Hom(M, A)$. Así tenemos que $(Fg)(\beta) = g \circ \beta = g \circ (f \circ \alpha) = 0$ puesto que, por hipótesis, $g \circ f = 0$.

(iii) $Ker(Fg) \subset Im(Ff)$. Sea $\beta \in Hom(M, B)$ tal que $g \circ \beta = (Fg)(\beta) = 0$. Si $m \in M$, entonces $(g \circ \beta)(m) = 0$, es decir, $\beta(m) \in Kerg = Imf$ (por hipótesis); por tanto existe $a \in A$ tal que $f(a) = \beta(m)$. Definamos $\alpha : M \to A$ por $\alpha(m) = a$ donde $f(a) = \beta(m)$, el cual es único pues f es monomorfismo; entonces tenemos $(f \circ \alpha)(m) = \beta(m)$ para toda $m \in M$, de donde obtenemos $(Ff)(\alpha) = \beta$

Procediendo de manera análoga se obtiene que $Hom(\_, M)$ es exacto izquierdo también. ■

Definición 1.1.18. *Si A es un R-módulo derecho, B un R-módulo izquierdo, y G un grupo abeliano aditivo, entonces una función $f : A \times B \to G$ es **R-biaditiva** si para toda $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, y $r \in R$ se cumple lo siguiente:*

(i) $f(a + a', b) = f(a, b) + f(a', b)$;

(ii) $f(a, b + b') = f(a, b) + f(a, b')$;

(iii) $f(ar, b) = f(a, rb)$.

Definición 1.1.19. *Un **producto tensorial** de $A \in R$-mod y $B \in R$-mod es un grupo abeliano $A \otimes_R B$ y una función R-biaditiva h la cual resuelve la siguiente "propiedad universal":*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, dashed, "f'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

para cada grupo abeliano G y cada función R-biaditiva f, existe un único homomorfismo f' que hace que el diagrama conmute.

Teorema 1.1.20. *El producto tensorial de un R-módulo derecho A y un R-módulo izquierdo B existe y es único salvo isomorfismo.*

Prueba. Sea F un grupo abeliano libre con base $A \times B$, es decir, F es un grupo de combinaciones $\mathbb{Z}$-lineales de todos los pares ordenados (a, b). Definimos S como el subgrupo generado por todos los elementos de las siguientes tres formas:

$$(a + a', b) - (a, b) - (a', b),\ (a, b + b') - (a, b) - (a, b') \text{ y } (ar, b) - (a, rb)$$

con $a, a' \in A$ $b, b' \in B$ y $r \in R$.

Ahora definimos $F/S = A \otimes_R B$ denotado por $(a, b) + S = a \otimes b$. Demostraremos que la función $h : A \times B \to A \otimes_R B$ es R-biaditiva:

Sean $a, a' \in A$ $b, b' \in B$ y $r \in R$, entonces:

(i) $h(a+a', b) = (a+a', b)+S = (a, b)+(a', b)+S = (a, b)+S+(a', b)+S = h(a, b)+h(a', b)$

(ii) $h(a, b+b') = (a, b+b')+S = (a, b)+(a, b')+S = (a, b)+S+(a, b')+S = h(a, b)+h(a, b')$

(iii) $h(ar, b) = (ar, b) + S = (a, rb) + S = h(a, rb)$.

Sea G un grupo abeliano y consideremos el siguiente diagrama, en el cual f es R-biaditiva:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, "f'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Como F es libre en $A \times B$, existe un único homomorfismo $\varphi : F \to G$ definida por $\varphi((a, b)) = f(a, b)$. Más aún, puesto que $f : A \times B \to G$ es R-biaditiva, tenemos que $S \subseteq Ker\varphi$; de aquí podemos inducir un homomorfismo $f' : F/S \to G$ definido por $f'((a, b) + S) = \varphi(a, b)$. Esto nos dice que $f'(a \otimes b) = f(a, b)$ y así $f' \circ h = f$.

Ahora supongamos que $A' \otimes_R B'$ es otro producto tensorial, entonces tenemos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes_R B \arrow[dl, "f'"] \\ & A' \otimes_R B' & \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & A' \otimes_R B' \arrow[dl, "h'"] \\ & A \otimes_R B & \end{tikzcd}$$

Como cada diagrama conmuta tenemos que $f' \circ h' = id_{A' \otimes_R B'}$ y $h' \circ f' = id_{A \otimes_R B}$ y así podemos concluir que f' es un isomorfismo. ■

Proposición 1.1.21. *Si A es un $(S-R)$-bimódulo y B es un R-módulo izquierdo, entonces $A \bigotimes_R B$ es un S-módulo izquierdo, donde $s(a \bigotimes b) = (sa) \bigotimes b$.*

Prueba. Consideremos las funciones $h : S \times (A \times B) \to S \times (A \otimes_R B)$ definida por $(s,(a,b)) \mapsto (s, a \otimes b)$ y $f : S \times (A \times B) \to A \otimes_R B$ dada por $(s,(a,b)) \mapsto sa \otimes b$. Ahora debemos mostrar que h y f son R-biaditivas; nos enfocaremos en mostrar que f lo es puesto que la demostración de que h es R-biaditiva se realiza de manera similar.

Sean $s \in S, r \in R, a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$, entonces:

1. $f(s,(a_1+a_2,b)) = s(a_1+a_2) \otimes b = (sa_1+sa_2) \otimes b = sa_1 \otimes b + sa_2 \otimes b = f(s,(a_1,b)) + f(s,(a_2,b))$.

2. $f(s,(a,b_1+b_2)) = sa \otimes (b_1+b_2) = sa \otimes b_1 + sa \otimes b_2 = f(s,(a,b_1)) + f(s,(a,b_2))$.

3. $f(s,(ar,b)) = sar \otimes b = sa \otimes rb = f(s,(a,rb))$

De esta manera hemos mostrado que f es una función R-biaditiva; entonces por la propiedad universal del producto tensorial tenemos que existe un único homomorfismo $f' : S \times (A \otimes_R B) \to A \otimes B$ definida de la manera que se menciona en la proposición.

Hecho lo anterior verificaremos que se cumplen las condiciones para que $A \otimes_R B$ sea un S-módulo izquierdo; sean $s_1, s_2 \in S, a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$, entonces:

(i) $(s_1+s_2)(a \otimes b) = (s_1+s_2)a \otimes b = (s_1a+s_2a) \otimes b = s_1a \otimes b + s_2a \otimes b = s_1(a \otimes b) + s_2(a \otimes b)$.

(ii) $s(a_1 \otimes b_1 + a_2 \otimes b_2) = s((a_1+a_2) \otimes (b_1+b_2)) = s(a_1+a_2) \otimes (b_1+b_2) = (sa_1+sa_2) \otimes (b_1+b_2) = sa_1 \otimes b_1 + sa_2 \otimes b_2 = s(a_1 \otimes b_1) + s(a_2 \otimes b_2)$.

(iii) $s_1(s_2(a \otimes b)) = s_1(s_2a \otimes b) = s_1s_2a \otimes b = s_1s_2(a \otimes b)$.

(iv) $1(a \otimes b) = 1a \otimes b = a \otimes b$.

Por lo tanto $A \otimes_R B$ es un S-módulo izquierdo. ■

Sean ${}_{\mathfrak{R}}\mathfrak{M}$ la categoría de R-módulos izquierdos y $\mathfrak{M}_R$ la categoría de R-módulos derechos, entonces:

Corolario 1.1.22. *Dados A_R y ${}_RB_S$, el funtor $\_\otimes_R B$ toma valores en ${}_{\mathfrak{R}}\mathfrak{M}$; similarmente, dados ${}_SA_R$ y ${}_RB$, el funtor $A\otimes_R \_$ toma valores en $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}}$.*

Prueba. Para $\_ \otimes_R B$ solo basta demostrar que si $f : A \to A'$ es un R-morfismo, entonces $f \otimes 1_B$ es un S-morfismo, pero esto se obtiene aplicando los cálculos del teorema anterior sobre cualquier generador $a \otimes b$. Análogamente para $A \otimes_R \_$. ∎

Teorema 1.1.23. *Los funtores $M \otimes_R \_$ y $\_ \otimes_R N$ son funtores exactos derechos.*

Prueba. $M\otimes_R \_$ es exacto derecho: Debemos demostrar que si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$, entonces $M \otimes_R A \xrightarrow{1\otimes f} M \otimes_R B \xrightarrow{1\otimes g} M \otimes_R C \longrightarrow 0$.

(i) $Im(1 \otimes f) \subset Ker(1 \otimes g)$: Basta probar que $(1 \otimes g)(1 \otimes f) = 0$, pero $(1 \otimes g)(1 \otimes f) = 1 \otimes gf = 1 \otimes 0 = 0$. Por lo tanto $Im1 \otimes f \subset Ker1 \otimes g$

(ii) $Ker(1\otimes g) \subset Im(1\otimes f)$: Sea $E = Im(1\otimes f)$, entonces $1\otimes g$ induce un homomorfismo $\beta : (M \otimes B) \to M \otimes C$, dado por $\beta(m \otimes b + E) = m \otimes g(b)$.

Notemos que $1\otimes g = \beta\circ\pi$, donde $\pi : M\otimes B \to (M\otimes B)/E$ es la proyección natural. Afirmamos que β es un isomorfismo. En efecto, consideremos la función biaditiva $h : M \times C \to (M \otimes B)/E$, dada por $f(m.c) = m \otimes b + E$, donde $g(b) = c$ (pues g es epimorfismo).

Es claro que f esta bien definida pues si $g(b) = c = g(b')$, entonces $g(b - b') = 0$, es decir, $b - b' \in Kerg = Imf$, por lo tanto existe $a \in A$ tal que $f(a) = b - b'$ y así tenemos:

$$(m \otimes b) - (m \otimes b') = m \otimes (b - b') = (1 \otimes f)(m \otimes a) \in Im(1 \otimes a).$$

Como f es biaditiva, la propiedad universal del producto tensorial induce un homomorfismo $\overline{h} : M \otimes C \to (M \otimes B)/E$, dada por $\overline{h}(m \otimes c) = m \otimes b + E$. Claramente $\overline{h}$ y β son inversas, por lo tanto β es un isomorfismo y tenemos que:

$$Ker(1 \otimes g) = Ker(\beta \circ \pi) = Ker\pi = E = Im(1 \otimes f).$$

(iii) $1 \otimes g$ es epimorfismo: Sea $\sum_{i\in I}(m_i \otimes c_i) \in M \otimes C$. Como g es epimorfismo, entonces existen $b_i \in B$ tal que $g(b_i) = c_i$, para toda $i \in I$. Por lo tanto:

$$(1 \otimes g)(\sum_{i\in I}(m_i \otimes b_i)) = m_i \otimes g(b_i) = m_i \otimes c_i,$$

es decir, $1 \otimes g$ es epimorfismo.

Por lo anterior, podemos concluir que $M \otimes_R \_$ es exacto derecho. De manera similar se prueba que $\_ \otimes_R N$ también lo es. ∎

1.2. R-Módulos Inyectivos

Después de haber establecido algunos de los conceptos necesarios para el desarrollo de este trabajo, pasaremos a estudiar las propiedades mas importantes de los módulos inyectivos.

Definición 1.2.1. *Diremos que un R-módulo izquierdo E es* ***inyectivo*** *si cada diagrama de R-módulos izquierdos*

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd}$$

puede ser completado a un diagrama

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

el cual conmuta, es decir, $h \circ i = f$.

Teorema 1.2.2. *Un módulo E es inyectivo si y sólo si el funtor $Hom(\_, E)$ es exacto.*

Prueba. Supongamos que E es inyectivo. Como $Hom(\_, E)$ es un funtor contravariante exacto izquierdo, basta con probar que convierte monomorfismos en epimorfismos, es decir, si $j : A \to B$ es monomorfismo, entonces $j^* : Hom(B, E) \to Hom(A, E)$ es un epimorfismo. Sea $f \in Hom(A, E)$. Como E es inyectivo, existe $g \in Hom(B, E)$ tal que $f = g \circ j$, pero $j^*(g) = g \circ j$, entonces $j^*(g) = f$, por tanto j^* es epimorfismo.

Ahora supongamos que $Hom(\_, E)$ es exacto, entonces tenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow Hom(C, E) \longrightarrow Hom(B, E) \xrightarrow{j^*} Hom(A, E) \longrightarrow 0\ ,$$

donde $C \cong B/A$. Como j^* es epimorfismo, para cada $f \in Hom(A, E)$ existe $g \in Hom(B, E)$ tal que $f = j^*(g)$, pero $j^*(g) = g \circ j$, por consiguiente tenemos que $f = g \circ j$, la cual es la definición de que E sea inyectivo. ■

Teorema 1.2.3. *Sean $\{E_i\}_{i \in I}$ una familia de módulos inyectivos, entonces $\prod_{i \in I} E_i$ es inyectivo.*

Prueba. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \prod E_i \arrow[r, shift left, "\pi_i"] & E_i \arrow[l, shift left, "\lambda_i"] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[u, dashed, "g_i"'] \arrow[ul, dashed, "h"]
\end{tikzcd}$$

donde λ_i son las inclusiones y π_i las proyecciones de $\prod\limits_{i\in I} E_i$.

Como para cada $i \in I$ E_i es inyectivo, entonces existe $g_i : B \to E_i$ tal que $g_i \circ i = \pi_i \circ f$ para cada $i \in I$. Ahora definamos $h : B \to \prod E_i$ dado por $h(b) = (\lambda(g_i(b)))$; así tenemos que $(h \circ i)(a) = ((g_i \circ i)(a)) = ((\pi_i \circ f))(a) = f(a)$ para toda $a \in A$, es decir, $h \circ i = f$ y por lo tanto $\prod\limits_{i\in I} E_i$ es inyectivo. ■

Es interesante mencionar que la suma directa finita de R-módulos inyectivos, al ser un caso particular del producto directo, es inyectiva, pero la suma directa arbitraria de R-módulos no necesariamente lo es, pues para que lo sea hace falta pedirle al anillo R que sea Noetheriano.

Teorema 1.2.4. *Cada sumando directo D de un módulo inyectivo E es inyectivo.*

Prueba. De forma similar a la demostración del teorema anterior, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[r, shift left, "\lambda"] & E \arrow[l, shift left, "\pi"] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[u, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

donde λ y π son la inclusión y la proyección respectivamente.

Puesto que E es inyectivo existe un morfismo $g : B \to E$ tal que $(g \circ i)(a) = (\lambda \circ f)(a)$ para toda $a \in A$. Si definimos $h : B \to D$ por $h(b) = (\pi \circ g)(b)$, $b \in B$, tenemos que $(h \circ i)(a) = (\pi \circ g \circ i)(a) = (\pi \circ \lambda \circ f)(a) = f(a)$ para toda $a \in A$, por tanto D es inyectivo.
■

Proposición 1.2.5. *Dado el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[r, "g'"] & D \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "f'"'] \end{tikzcd}$$

donde $D = (C \oplus B)/W$ es la suma fibrada, $W = \{(f(a), -g(a)) : a \in A\}$, $f'(b) = (0, b) + W$ y $g'(c) = (c, 0) + W$. Si $g : A \to B$ es monomorfismo, entonces $g' : C \to D$ también lo es.

Prueba. Sea $c \in Kerg'$, entonces $0 = g'(c) = (c, 0) + W$, es decir, $(c, 0) \in W$, por lo tanto $(f(a), -g(a)) = (c, 0)$, con $a \in A$, esto es, $f(a) = c$ y $-g(a) = 0$, lo que nos dice que $a \in Kerg$, pero g es monomorfismo, entonces $a = 0$; así $f(0) = f(a) = c$, lo que implica que $c = 0$ y por lo tanto g' es monomorfismo también. ■

Teorema 1.2.6. *Un módulo E es inyectivo si y solo si cada sucesión exacta corta $0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ se escinde. En particular, E es un sumando directo de B.*

Prueba. Supongamos que E es inyectivo, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & E & & & \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[u, "1_E"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $C \cong B/E$.

Por ser E inyectivo existe $g : B \to E$ tal que $g \circ i = 1_E$, lo cual nos dice que la sucesión se escinde.

Supongamos ahora que cada sucesión exacta corta $0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ se escinde, entonces consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[r, shift left, "i'"] & P \arrow[l, shift left, "j"] \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"] & M \arrow[u, "f'"'] \end{tikzcd}$$

donde P es la suma fibrada.

Como i es monomorfismo, entonces i' también lo es y así obtenemos la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow E \xrightarrow{i'} P \longrightarrow P/E \longrightarrow 0$, la cual al aplicarle la hipótesis nos dice que existe $j : P \to E$ tal que $j \circ i' = 1_E$. Si definimos $g : M \to E$ por $g = j \circ f'$ tenemos que $g \circ i = j \circ f' \circ i = j \circ i' \circ f = f$ lo cual nos dice que E es inyectivo. ■

1.3. Criterio de Baer

Un criterio muy usado para determinar la inyectividad de un R-módulo M es mediante su comportamiento con respecto al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u] \arrow[r, "i"] & R \end{tikzcd}$$

donde I es un ideal izquierdo de R e $i : I \to R$ es la inclusión.

A esta caracterización de inyectividad se le conoce como el Lema de Baer, y va a ser de suma importancia en el desarrollo de los capítulos posteriores.

Teorema 1.3.1. ***(Lema de Baer)*** *Un R-módulo E es inyectivo si y sólo si cada morfismo $f : I \to E$, donde I es un ideal izquierdo de R, puede ser extendido a R.*

Prueba. Supongamos que E es inyectivo. Como un ideal izquierdo es un submódulo de R, la hipótesis arroja el morfismo pedido.

Para el recíproco, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión de A en B.

Sea $\mathfrak{C}$ el conjunto de todos los pares (A', g') donde $A \subseteq A' \subseteq B$ y $g' : A' \to E$ extiende a f. Notemos primero que $\mathfrak{C} \neq \phi$ ya que $(A, f) \in \mathfrak{C}$. Damos un orden parcial a $\mathfrak{C}$ por la siguiente relación: $(A', g') \leq (A'', g'')$ si $A' \subseteq A''$ y g'' extiende a g'. Ahora, sea $(A_1, g_1) \leq (A_2, g_2) \leq ...$ una cadena en $\mathfrak{C}$. Afirmamos que existe un cota superior para esta cadena en $\mathfrak{C}$.

Denotemos $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bar{A}$ y $g : \bar{A} \to E$ definida por $g(a) = g_i(a)$, si $a \in A_i$ y se puede ver que esta definición no depende de la i. Es claro que $(\bar{A}, g) \in \mathfrak{C}$ pues $A \subseteq \bar{A} \subseteq B$ y g extiende a f. Nótese que$(\bar{A}, g)$ es una cota superior $\mathfrak{C}$. Por lo tanto, aplicando el lema de Zorn, existe un máximo, digamos (A_0, g_0), en $\mathfrak{C}$.

Si $A_0 = B$, entonces hemos acabado. Si no, entonces $A_0 \neq B$ y por lo tanto existe $x \in B - A_0$. Sea $I = \{r \in R : rx \in A_0\} = (A_0 : x)$; afirmamos que I es un ideal izquierdo de R, pues si $r \in I$ y $r' \in R$, entonces si $rx \in A_0$ se sigue que $r'rx \in A_0$, por tanto $r'r \in I$.

Ahora definamos $h : I \to E$ por $h(r) = g_0(rx)$. Por hipótesis existe un $h' : R \to E$ que extiende a h, así que sea $A_1 = A_0 + Rx$ y $g_1 : A_1 \to E$ dado por $g_1(a_o + rx) = g_o(a_0) + rh'(1)$ donde $r \in R$.

Veamos que g_1 está bien definida: si $a_0+rx = a'_o+r'x$, entonces $(r-r')x = a'_0-a_0 \in A_0$, con $r - r' \in I$, por lo tanto $g_0((r - r')x)$ y $h(r - r')$ están definidos y tenemos que: $g_0(a'_0-a_0) = g_0((r-r')x) = h(r-r') = h'(r-r') = (r-r')h'(1)$ y por tanto $g_0(a'_0)-g_0(a_0) = rh'(1)-r'h'(1)$, es decir, $g_0(a'_0)+r'h'(1) = g_0(a_0)+rh'(1)$. Además tenemos que g_1 extiende a g_0, pues $g_1(a_0) = g_0(a_0)$ para toda $a_0 \in A_0$.

Por lo tanto hemos obtenido que el par $(A_1, g_1) \in \mathfrak{C}$ y que es mayor que (A_0, g_0), lo cual no puede ser posible ya que (A_0, g_0) es máximo, así que $A_0 = B$ y por consiguiente E es inyectivo. ■

Lema 1.3.2. *El diagrama con sucesión exacta:*

$$\begin{tikzcd} & E & & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

puede ser completado a un diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "1_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\alpha'"] & P \arrow[r, "\beta'"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

en donde P es la suma fibrada.

Prueba. Al formar la suma fibrada en el diagrama, tenemos que $\alpha' : E \to P$ es monomorfismo, pues α lo es. Podemos suponer que $P = (E \bigoplus B)/W$, donde $W = \{(\gamma(a), -\alpha(a)) : a \in A\}$, $\gamma' : B \to P$ está dada por $\gamma'(b) = (0, b) + W$ y $\alpha' : E \to P$ está dada por $\alpha'(e) = (e, 0) + W$.

Definimos a $\beta' : P \to C$ por $\beta'((e, b) + W) = \beta(b)$, la cual está bien definida, puesto que si $(e, b) + W = (e_1, b_1) + W$, entonces $(e - e_1, b - b_1) \in W$, pero $b - b_1 = -\alpha(a)$ para algún $a \in A$ (por definición de W), es decir, $B \ni b_1 - b = \alpha(a)$, por lo tanto $b_1 - b \in Im\alpha = Ker\beta$, así $\beta(b_1 - b) = 0$ y por ende $\beta(b_1) = \beta(b)$. Más aún, sea $c \in C$, como β es epimorfismo, entonces existe $b \in B$ tal que $\beta(b) = c$, pero $\gamma'(b) = (0, b) + W$ y $\beta'(\gamma'(b)) = \beta(b) = c$, por lo tanto β' es epimorfismo también. Ahora, si $b \in B$, entonces $(\beta' \circ \gamma')(b) = \beta'((0, b) + W) = \beta(b)$ y así tenemos que el diagrama conmuta.

Por último, sea $(e, b) + W \in Ker\beta'$, entonces $\beta'((e, b) + W) = 0$, es decir, $\beta(b) = 0$, lo cual nos dice que $b \in Ker\beta = Im\alpha$ por lo tanto existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = b$, pero $(\alpha' \circ \gamma)(a) = (\gamma' \circ \alpha)(a) = \gamma'(b) = (e, b) + W$, por ende $Ker\beta' \subseteq Im\alpha'$; por otro lado, sea $(e, b) + W \in \alpha'$, entonces $\beta'((e, 0) + W) = \beta(0) = 0$, así $Im\alpha' \subseteq Ker\beta'$ y por consiguiente la sucesión es exacta. ■

1.4. La Cápsula Inyectiva

Hasta este punto hemos dado algunas propiedades básicas de los módulos inyectivos; ahora nos enfocaremos a ver que todo R-módulo M puede ser sumergido en un módulo inyectivo, pero para ellos necesitaremos algunos resultados.

Definición 1.4.1. *Sea M un R-módulo, $m \in M$ y $r \in R$. Diremos que **m es divisible por r** si $rm' = m$ para algún $m' \in M$; además, si cada $m \in M$ es divisible por algún $r \in R$ y r no divisor de cero, entonces **M es divisible**.*

Ejemplo 1.4.2. *El grupo aditivo de los número racionales es un grupo abeliano divisible.*

En efecto, para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $r \in \mathbb{Z}$, $r \neq 0$, escribimos $\frac{a}{b} = r\frac{a}{rb}$, y obtenemos que $\mathbb{Q}$ es divisible.

Más aún, sean $(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots) \in \bigoplus \mathbb{Q}$ y $0 \neq r \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots) = (r\frac{a_1}{rb_1}, r\frac{a_2}{rb_2}, \dots) = r(\frac{a_1}{rb_1}, \frac{a_2}{rb_2}, \dots)$$

y por lo tanto $\bigoplus \mathbb{Q}$ es divisible. Así mismo, sean S un submódulo de $\mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} + S \in \mathbb{Q}/S$ y $0 \neq r \in \mathbb{Z}$, podemos escribir:

$$\frac{a}{b} + S = r\frac{a}{rb} + \frac{r}{r}S = r(\frac{a}{rb} + \frac{1}{r}S) = r(\frac{a}{rb} + S)$$

esto nos dice que $\mathbb{Q}/S$ es divisible. Observemos que como $\mathbb{Q}$ es divisible, entonces $\mathbb{Q}/S$ también lo es; por lo tanto, puesto que $\bigoplus \mathbb{Q}$ es divisible, $\bigoplus \mathbb{Q}/S$ también es divisible.

Teorema 1.4.3. *Todo módulo inyectivo es divisible.*

Prueba. Sea E un módulo inyectivo, $m \in E$ y $r_0 \in R$ un no divisor de cero. Definimos $f : Rr_0 \to E$ dado por $f(rr_o) = rm$; f está bien definida pues r es un no divisor de cero. Como E es inyectivo, existe un morfismo $g : R \to E$ que extiende a f, en particular tenemos que: $m = f(r_0) = g(r_0) = r_0 g(1)$, por tanto m es divisible por r_0. ■

Teorema 1.4.4. *Si R es un dominio de ideales principales (DIP), entonces un R-módulo D es divisible si y solo si es inyectivo.*

Prueba. Supongamos que D es divisible. Por el criterio de Baer, es suficiente extender cada morfismo $f : I \to D$ a R, donde I es un ideal de R. Como R es un DIP tenemos que $I = Rr_0$, con $r_0 \in R$, donde podemos asumir que $r_0 \neq 0$ y así r_0 no es un divisor de cero.

Puesto que D es divisible, existe $d \in D$ tal que $f(r_0) = r_0 d$. Definimos $g : R \to D$ por $g(1) = d$, vemos que $f(rr_0) = rf(r_0) = rf(r_0 \cdot 1) = rg(r_0 \cdot 1) = rr_0 g(1) = rr_0 d$ y por lo tanto g extiende a f, es decir, E es inyectivo. El regreso es consecuencia del teorema anterior. ■

Teorema 1.4.5. *Todo grupo abeliano puede ser sumergido en un grupo abeliano inyectivo.*

Prueba. Sea G un grupo abeliano. Como cada módulo es cociente de un módulo libre [Rot], tenemos que $G \cong F/S$, donde $F = \mathbb{Z}^{(X)}$ (por definición de grupo libre). A cada copia de $\mathbb{Z}$ la sumergimos en una copia de $\mathbb{Q}$ y así tenemos: $G \cong F/S = \bigoplus \mathbb{Z}/S \subset \bigoplus \mathbb{Q}/S$. Puesto que $\mathbb{Q}$ es divisible, también lo son $\bigoplus \mathbb{Q}$ y $\bigoplus \mathbb{Q}/S$ [Rot] y por el teorema anterior $\bigoplus \mathbb{Q}/S$ es un inyectivo visto como $\mathbb{Z}$-módulo. ■

Definición 1.4.6. *Sea $F : \mathfrak{U} \to \mathfrak{C}$ y $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{U}$ funtores. El par ordenado (F, G) es un* ***par adjunto*** *si, para cada $A \in obj\, \mathfrak{U}$ y $C \in obj\, \mathfrak{C}$ hay una biyección*

$$\tau = \tau_{A,C} : Hom_{\mathfrak{C}}(FA, C) \to Hom_{\mathfrak{U}}(A, GC)$$

el cual es "natural" en cada variable, es decir, los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathfrak{C}}(FA, C) \arrow[r, "(Ff)^*"] \arrow[d, "\tau"'] & Hom_{\mathfrak{C}}(FA', C) \arrow[d, "\tau"] \\ Hom_{\mathfrak{U}}(A, GC) \arrow[r, "f^*"'] & Hom_{\mathfrak{U}}(A', GC) \end{tikzcd}$$

para toda $f : A' \to A$ en $\mathfrak{U}$ y

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathfrak{C}}(FA, C) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\tau"'] & Hom_{\mathfrak{C}}(FA, C') \arrow[d, "\tau"] \\ Hom_{\mathfrak{U}}(A, GC) \arrow[r, "(Gg)_*"'] & Hom_{\mathfrak{U}}(A, GC') \end{tikzcd}$$

para toda $g : C \to C'$ en $\mathfrak{C}$.

Teorema 1.4.7. *Dados los módulos $({}_RA, {}_SB_R, {}_SC)$, donde R y S son anillos, hay un isomorfismo:*

$$\tau : Hom_S(B \otimes_R A, C) \to Hom_R(A, Hom_S(B, C))$$

es decir,para $f : B \bigotimes_R A \to C$, $a \in A$ y $b \in B$:

$$\tau : f \mapsto \tau(f) \text{ donde } \tau(f)_a : b \mapsto f(b \bigotimes a).$$

Prueba. Como B es bimódulo, por 1.1.21 tenemos que $B \bigotimes_R A$ es un S-módulo izquierdo y por 1.1.5 $Hom_S(B, C)$ es un R-módulo izquierdo; así ambos lados tienen sentido.

Sean f, $g : B \otimes_R A \to C$, la definición de $f + g$ nos da, para toda $a \in A$, que:

$$\tau(f + g)_a : b \mapsto (f + g)(b \otimes a) = f(b \otimes a) + g(b \otimes a) = \tau(f)_a(b) + \tau(g)_a(b),$$

por lo tanto $\tau(f + g) = \tau(f) + \tau(g)$ y por ende τ es un homomorfismo.

Si $\tau(f)_a = 0$, para toda $a \in A$, entonces $0 = \tau(f)_a(b) = f(b \otimes a)$, para toda $a \in A$ y $b \in B$. Por lo tanto, $f = 0$ porque se anula en cada generador de $B \otimes_R A$ y así τ es inyectivo.

Si $F : A \to Hom_S(B, C)$ es un R-morfismo, definimos $\varphi : B \times A \to C$ por $\varphi(b, a) = F_a(b)$, con $F_a : b \mapsto F(b)(a)$, entonces φ es R-biaditiva pues:

$$\varphi(b, a+a') = F_{a+a'}(b) = F(b)(a+a') = F(b)(a)+F(b)(a') = F_a(b)+F_{a'}(b) = \varphi(b, a)+\varphi(b, a')$$

$$\varphi(b+b', a) = F_a(b+b') = F(b+b')(a) = F(b)(a)+F(b')(a) = F_a(b)+F_a(b') = \varphi(b, a)+\varphi(b', a)$$

$$\varphi(br, a) = F_a(br) = F(br)(a) = F(b)(ra) = F_{ra}(b) = \varphi(b, ra).$$

Ahora consideramos el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & A \bigotimes_R B \arrow[dl, dashed, "\tilde{\varphi}"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

como φ es R-biaditiva, existe un homomorfismo $\tilde{\varphi} : B \otimes_R A \to C$ con $\tilde{\varphi}(b \otimes a) = \varphi(b, a) = F_a(b)$, para toda $a \in A$ y $b \in B$, por tanto $F = \tau(\tilde{\varphi})$ y así τ es suprayectiva. ■

Corolario 1.4.8. *Si $B = {}_SB_R$ es un bimódulo, entonces $(B \otimes_R -, Hom_S(B, -))$ es un par adjunto:*

Prueba. Para cada A y C, hemos construido el isomorfismo τ en el teorema anterior, solo resta la naturalidad, y aquí es inmediata porque hay una fórmula explícita para cada morfismo. ■

Teorema 1.4.9. *Sea R un anillo y B un R-módulo izquierdo. Entonces, existe un isomorfismo $f : R \otimes_R B \to B$ dado por $f(r \otimes b) = rb$.*

Prueba. Primero notemos que $R \otimes_R B$ es un R-módulo izquierdo ya que R es un R-bimódulo. La definición de R-módulo izquierdo nos dice que la función $g : R \times B \to B$ dada por $g((r, b)) = rb$ es R-biaditiva; por otro lado la definición de producto tensorial nos da un homomorfismo $\varphi : R \otimes_R B \to B$ definido por $\varphi(r \otimes b) = rb$, el cual es un isomorfismo pues:

(i) Si $r \otimes b \in ker\varphi$, con $0 \neq r \in R$, entonces $\varphi : (r \otimes b) = 0$, es decir, $rb = 0$; como $r \neq 0$, entonces $b = 0$, esto es, $r \otimes b = r \otimes 0 = 1 \otimes r0 = 1 \otimes 0$, lo que nos dice que φ es inyectiva.

(ii) S $b \in B$, entonces existe $1 \otimes b \in R \otimes_R B$ tal que $\varphi(1 \otimes b) = b$ y por consiguiente φ es suprayectiva.

Lo anterior nos da el isomorfismo deseado. ■

De forma similar podemos decir que existe un isomorfismo, $A \otimes_R R \cong A$, donde A es un R-módulo derecho.

Teorema 1.4.10. *Si D es un grupo abeliano divisible, entonces $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ es un R-módulo inyectivo izquierdo.*

Prueba. Primero que todo, R es un bimódulo: $R = {}_{\mathbb{Z}}R_R$; por 1.1.5, $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ es un R-módulo izquierdo via $rf : r' \mapsto f(r'r)$. Demostraremos que el funtor contravariante $Hom_R(\_, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D))$ es exacto; para esto solo es necesario ver que convierte monomorfismos en epimorfismos.

El isomorfismo adjunto obtenido de aplicar 1.4.7 y 1.4.8 nos da un diagrama conmutativo cuando $0 \to A \to B$ es un monomorfismo e identificando $R \otimes_R B$ con B y $R \otimes_R A$ con A:

$$\begin{tikzcd}
Hom_R(B, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)) \arrow[r] & Hom_R(A, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)) \\
Hom_{\mathbb{Z}}(B, D) \arrow[u] \arrow[r] & Hom_{\mathbb{Z}}(A, D) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Como D es divisible, entonces, por 1.4.4, también es $\mathbb{Z}$-inyectivo y así la flecha de abajo es un epimorfismo, por 1.2.2, de aquí se sigue que la flecha de arriba también lo es, pues las flechas verticales son isomorfismos y el diagrama conmuta. Por lo tanto $Hom_R(\_, Hom_{\mathbb{Z}}(R, D))$ es exacto, es decir, $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ es un R-módulo inyectivo izquierdo. ■

Teorema 1.4.11. *Cada R-módulo M puede ser sumergido en un módulo inyectivo.*

Prueba. Si consideramos a M solo como un grupo abeliano, hay un $\mathbb{Z}$-monomorfismo $i : M \to D$ para algún grupo divisible D, por 1.4.5.

Si $m \in M$, definimos $f_m : R \to M$ por $r \mapsto rm$, entonces $\varphi : M \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ dado por $m \mapsto i \circ f_m$ es un monomorfismo, pues si $\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$ implica que $i(f_{m_1}(r)) = i(f_{m_2}(r))$, para toda $r \in R$, pero i es monomorfismo, entonces $f_{m_1}(r) = f_{m_2}(r)$, para toda $r \in R$, esto es, $rm_1 = rm_2$, es decir, $r(m_1 - m_2) = 0$, para toda $r \in R$, por tanto $m_1 = m_2$ y así $M \hookrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$. ■

Definición 1.4.12. *Una **resolución inyectiva** de un módulo M es una sucesión exacta:*

$$0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^n \to E^{n+1} \to \cdots$$

en la cual cada E^n es inyectivo.

Teorema 1.4.13. *Cada módulo M tiene una resolución inyectiva.*

Prueba. Por el teorema anterior, todo módulo puede ser sumergido en un módulo inyectivo. Así, existe un módulo inyectivo E_0, una inyección $j_0 : M \to E_0$ y una sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{j_0} E_0 \xrightarrow{p} V_0 \longrightarrow 0$$

donde $V_0 = coker(j_0) = E_0/im(j_0)$ y p es la proyección natural.

Una vez más, por 1.4.11, existe un inyectivo E_1 y un monomorfismo $j_1 : V_0 \to E_1$ que nos da la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j_0"] & E_0 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, "p"'] & & E_1 \arrow[dr] & & \\
& & & V_0 \arrow[ur, "j_1"'] \arrow[dr] & & V_1 \arrow[r] & 0 \\
& & & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

donde $d_0 = j_1 \circ p$ y $V_1 = coker j_1$. Iterando esta construcción obtenemos la resolución inyectiva. ■

Definición 1.4.14. *Una* ***extensión esencial*** *de un módulo M es un módulo E que contiene a M tal que cada submódulo no cero de E intersecta, no trivialmente, a M; si además $M \subsetneq E$, decimos que E es un extensión esencial propia de M.*

Denotaremos por $M \trianglelefteq E$ si M es un submódulo esencial del módulo E.

Lema 1.4.15. *Un submódulo N de M es esencial en M si y sólo si para cada $0 \neq m \in M$ existe un $r \in R$ tal que $0 \neq rm \in N$.*

Prueba. Supongamos que $N \trianglelefteq M$ y $0 \neq m \in M$, entonces $Rm \cap N \neq 0$, por lo tanto existe $0 \neq r \in R$ tal que $0 \neq rm \in N$.

Inversamente, si $0 \neq m \in L \leq M$ tal que $0 \neq rm \in N$, con $0 \neq r \in R$, entonces $0 \neq rm \in L \cap N$, pues L es submódulo de M y por lo tanto $N \trianglelefteq M$. ■

Ejemplo 1.4.16. *$\mathbb{Q}$ es una extensión esencial de $\mathbb{Z}$; de hecho cada submódulo intermedio G con $\mathbb{Z} \subset G \subseteq \mathbb{Q}$ es una extensión esencial de $\mathbb{Z}$.*

Prueba. Supongamos $G \neq 0$ un submódulo de $\mathbb{Q}$ tal que G no es extención esencial de $\mathbb{Z}$, entonces $G \cap \mathbb{Z} = 0$. Sea $g \in G$, pero $g = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $bg \in G$, pues G es submódulo de $\mathbb{Q}$, es decir, $b\frac{a}{b} \in G$, por lo tanto, $a \in G$, por consiguiente $G \cap \mathbb{Z} \neq 0$, lo que contradice la hipótesis, por lo tanto $\mathbb{Q}$ es extensión esencial de $\mathbb{Z}$.

Procediendo de manera similar obtenemos que cada submódulo G de $\mathbb{Q}$, que contiene a $\mathbb{Z}$, es extensión esencial de $\mathbb{Z}$. ■

Teorema 1.4.17. *Un módulo M es inyectivo si y sólo si M no tiene extensiones esenciales propias.*

Prueba. Supongamos que M es inyectivo y $M \subsetneq E$, donde E es un extensión propia de M. Por 1.2.6 podemos asumir que M es un sumando de E y es distinto de E. Entonces hay un submódulo no cero N de E tal que $E = M \oplus N$. Como $N \cap M = 0$, pues M es sumando, tenemos que E no es extensión esencial de M.

Supongamos ahora que M no tiene extensiones esenciales propias y sea E un inyectivo que contiene a M.

Consideremos $\Omega = \{N : N \leq E \text{ y } N \cap M = 0\}$; como $E \in \Omega$, tenemos que $\Omega \neq \phi$. Sea $N_1 \leq N_2 \leq \cdots$ una cadena de submódulo de E tales que $N_i \cap M = 0$, para toda $i = 1, 2, \ldots$, entonces afirmamos que $N \cap M = 0$, donde $N = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} N_i$.

Supongamos lo contrario, por tanto existe $x \in N \cap M$, es decir, $x \in N$, esto es, $x \in N_i$, para algún $i = 1, 2, \ldots$, lo que implica que $N_i \cap M \neq 0$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $N \cap M = 0$ y así N es cota superior en Ω. Por el Lema de Zorn, tenemos que hay un submódulo $\hat{N}$ de E máximo con la propiedad de que $\hat{N} \cap M = 0$.

Ahora observemos que la sucesión $M \hookrightarrow E \to E/\hat{N}$ es un monomorfismo puesto que $M \cap \hat{N} = 0$; de hecho $E/\hat{N}$ es esencial sobre M, pues si $S/\hat{N}$ es un submódulo no cero de $E/\hat{N}$, entonces $\hat{N} \subsetneq S$, y la maximalidad de $\hat{N}$ nos dice que $S \cap M \neq 0$ y por tanto $(S/\hat{N}) \cap M \neq 0$.

Como M no tiene extensiones esenciales propias, entonces $M \to E \to E/\hat{N}$ es un isomorfismo, por lo cual tenemos que $E = M + \hat{N}$, y puesto que $M \cap \hat{N} = 0$, se cumple que M es un sumando de un inyectivo y por tanto M también lo es. ■

Teorema 1.4.18. *Las siguientes condiciones para un módulo E que contiene a un módulo M son equivalente:*

(i) *E es una extensión esencial máxima de M.*

(ii) *E es una extensión esencial de M y E es inyectivo.*

(iii) *E es inyectivo y no hay inyectivo E' con $M \subset E' \subsetneq E$.*

Más aún, tal módulo E existe.

Prueba. Supongamos (i). Como "una extensión esencial de" es una relación transitiva, la hipótesis de que E no tiene extensiones esenciales propias, y por el teorema anterior, nos permite concluir que E es inyectivo y así (ii) se cumple.

Ahora supongamos (ii), es decir, existe E inyectivo tal que $M \subset E' \subsetneq E$, entonces E' sería un sumando de E, digamos $E = E' \oplus E''$. Como $m \in E'$ tendríamos que $E' \cap E'' = 0$ nos implica que $M \cap E'' = 0$, lo cual es una contradicción, pues $E'' \subseteq E$ y E es extensión esencial de M, y por consiguiente cumple (iii).

Por ultimo, supongamos (iii). Sea E es un módulo inyectivo que contiene a M y consideremos la siguiente familia: $\Omega = \{K : M \trianglelefteq K \leq E\}$. Como $M \trianglelefteq M$, entonces $\Omega \neq \phi$. Sea $K_1 \leq K_2 \leq \cdots$ una cadena en Ω y $K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$, afirmamos que $K \in \Omega$ es una cota superior. Tenemos inmediatamente que $M \leq K \leq E$, así que solo hace falta ver que $M \trianglelefteq K$. Sea $k \in K$, con $k \neq 0$, entonces $k \in K_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$, como K_i es extensión esencial de M, existe $r \in \mathbb{R}$, con $r \neq 0$, tal que $rk \in M$, por tanto $M \trianglelefteq K$ y así K es cota superior. Aplicando el Lema de Zorn, existe un máximo, digamos E'. Afirmamos que E' es una extensión esencial máxima de M.

Supongamos que N es una extensión esencial de M tal que contiene a E', entonces hay un diagrama:

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & E' \arrow[u, "i"] \arrow[r, "j"'] & N \arrow[ul, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión.

Como E es inyectivo, entonces hay un morfismo $\varphi : N \to E$ tal que $\varphi \circ j = i$; así φ fija a E' y por tanto a M. Como E' es esencial en N, existe $x \in ker\varphi \cap E'$, pero $0 = kerj = ker\varphi \cap E'$, entonces $x = 0$ y por lo tanto φ es monomorfismo, pues N debe de ser extensión esencial de E'; por otra parte, puesto que no hay $M \subset E \subseteq E'$, tenemos que φ es epimorfismo también, es decir, $N \cong \varphi(N)$ y por lo tanto es una extensión esencial de M contenida en E.

La maximalidad de E' fuerza a que $\varphi(N) = E'$, por tanto $N \cong E'$ y así E' es máximo y no tiene extensiones esenciales propias. Aplicando el teorema anterior, obtenemos que E' es inyectivo y usando las hipótesis que proporciona (iii) podemos concluir que $E = E'$, lo que nos lleva a concluir (i).

Para la existencia, solo basta con sumergir a M en un módulo inyectivo y tomar el submódulo E' como lo construimos arriba. ■

Definición 1.4.19. *Un módulo E que satisface cualquiera de las condiciones del teorema anterior es llamado una* ***cápsula inyectiva*** *de M.*

Teorema 1.4.20. *Sea E una cápsula inyectiva de un módulo M:*

(i) *Si D es un inyectivo que contiene a M, entonces hay un monomorfismo $\varphi : E \to D$ que fija a M punto a punto.*

(ii) *Cualesquiera dos cápsulas inyectivas de M son isomorfas.*

Prueba. Para (i), la inyectividad de D nos permite completar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & D & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "i"] \arrow[r] & E \arrow[ul, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión. Por un razonamiento similar al realizado en el teorema anterior, tenemos que φ es monomorfismo, pues E es una extensión esencial de M.

En el caso (ii), supongamos que D es una cápsula inyectiva de M. Usando la notación de (i), afirmamos que φ es epimorfismo, pues si no fuera así, entonces $\varphi(E)$ sería un sumando directo de D que contiene a M y esto contradiría que D sea una extensión esencial de M; por lo tanto φ es epimorfismo y, por ende, φ es isomorfismo, es decir, $D = E$. ■

Ahora ya podemos hablar de "***la cápsula inyectiva***", la cual denotaremos por $E(M)$.

1.5. Anillos y Módulos Noetherianos

Hasta este momento hemos visto que el producto de módulos inyectivos es inyectivo y que por consiguiente, la suma finita de módulos inyectivos también lo es, pero podemos dar condiciones para que se cumpla que la suma arbitraria de módulos inyectivos también lo sea; a continuación veremos que dicha condición involucra a los anillos noetherianos.

Definición 1.5.1. *Un **anillo** R es llamado **Noetheriano izquierdo** si cada ideal izquierdo es finitamente generado (f.g.).*

Teorema 1.5.2. *Un anillo R es Noetheriano si y sólo si cada submódulo de un R-módulo izquierdo M f.g. es f.g también.*

Prueba. Supongamos que R es Noetheriano. Sean $M = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ y N un submódulo de M. Procederemos por inducción sobre n para ver que N es f.g.:

Si $n = 1$, entonces M es cíclico, esto es, $M \cong R/I$, para algún ideal I de R. Por lo tanto $N \cong J/I$, donde J es un ideal izquierdo de R que contiene a I. Como R es Noetheriano, entonces $N \cong J/I$ es f.g..

Sea $n > 1$ y $M' = Rx_n$, entonces existe una sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

donde M/M' es generado por $n-1$ elementos. Por lo anterior, existe otra sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow L \cap M' \longrightarrow L \longrightarrow L/L \cap M' \longrightarrow 0$$

donde $L \cap M'$ es f.g., puesto que M' es cíclico. Por otro lado, por inducción, $L/L \cap M' \cong L + M'/M' \leq M/M'$ es f.g., por lo tanto L es f.g..

Recíprocamente, como los submódulos de R, vistos como R-módulo, son sus ideales izquierdos, entonces R cumple la definición de Noetheriano. ■

Definición 1.5.3. *Un R-módulo M cumple la* ***condición de cadena ascendente (CCA)****, si cada cadena ascendente de submódulos $M_1 \leq M_2 \leq M_3 \leq \cdots$ se detiene, es decir, existe un entero n tal que $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \cdots$.*

Teorema 1.5.4. *Un R-módulo M cumple CCA si y sólo si cada submódulo de M es f.g..*

Prueba. Supongamos, primero, que cada submódulo es f.g. y consideremos $M_1 \leq M_2 \leq M_3 \leq \cdots$ una cadena ascendente de submódulos de M tal que $\overline{M} = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i$, entonces, por hipótesis, $\overline{M} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, donde cada $x_j \in M_{i_j}$.

Sea $n = \text{máx}\, i_j$, entonces $\overline{M} \leq M_n \leq \overline{M}$ y por consiguiente, la cadena se detiene.

Ahora supongamos que L es un submódulo de M que no es f.g. y tomemos $l_1 \in L$. Definimos $M_1 = Rl_1$; supongamos, por inducción, que tenemos $l_1, l_2, \ldots, l_n \in L$. Entonces si $M_1\langle l_1, \ldots, l_i \rangle$, tenemos que $M_1 \lneq M_2 \lneq \cdots \lneq M_n$.

Como L no es f.g., M_n es un submódulo propio de L; así que podemos elegir $l_{n+1} \in L$ tal que $l_{n+1} \notin M_n$. Definimos $M_{n+1} = M_n + Rl_{n+1}$, entonces $M_n \subsetneq M_{n+1}$.

Por el axioma de elección, existe una cadena estrictamente ascendente de submódulos de M, $M_1 < M_2 < M_3 < \cdots$, que no se detiene y por lo tanto M no cumple CCA. ■

Corolario 1.5.5. *Un anillo R es Noetheriano izquierdo si y sólo si R cumple CCA sobre ideales izquierdos.*

Prueba. Si consideramos a R como un R-módulo, entonces sus ideales izquierdos son sus submódulos. ■

Teorema 1.5.6. *R es un anillo noetheriano izquierdo si y sólo si cada suma directa de R-módulos izquierdos inyectivos es inyectiva.*

Prueba. Supongamos que R es noetheriano y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{j\in J} E_j & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha"'] & R \end{tikzcd}$$

donde I es un ideal izquierdo de R.

Como R es noetheriano, entonces $I = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Sea j_i tal que $f(x_i) \in E_{j_i}$, entonces $Imf \subset \bigoplus_{i=1}^{n} E_{j_i}$. Puesto que cada E_{j_i} es inyectivo, entonces $\bigoplus_{i=1}^{n} E_{j_i}$ es inyectivo, por lo tanto existe $g : R \to \bigoplus_{i=1}^{n} E_{j_i}$ que extiende a f; haciendo la composición de g con la inclusión $\bigoplus_{i=1}^{n} E_{j_i} \hookrightarrow \bigoplus_{j\in J} E_j$ completamos el diagrama dado y así podemos concluir que $\bigoplus_{j\in J} E_j$ es inyectivo.

Para la segunda parte vamos a mostrar que si R no es noetheriano, entonces existe un ideal izquierdo I de R y un morfismo de I a la suma de inyectivos que no puede ser extendido a R.

Si R no es noetheriano, existe una cadena estrictamente ascendente de ideales izquierdos $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \cdots$. Sea $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$; podemos notar que $I/I_n \neq 0$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, por 1.4.11 podemos sumergir a I/I_n en un R-módulo inyectivo E_n. Afirmamos que $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} = E$ no es inyectivo.

Sea $\pi_n : I \to I/I_n$ la proyección natural. Para cada $a \in I$, $\pi_n(a) = 0$ para algún n suficientemente grande (pues $a \in I_n$ para algún n), así que el morfismo $f : I \to \pi_n(I/I_n)$, definido por $f(a) = (\pi_n(a))$, tiene su imagen en $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I/I_n$, pues para cada $a \in I$ casi todas sus coordenadas de $f(a)$ son cero.

Haciendo la composición de f con la inclusión $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I/I_n \hookrightarrow E$, podemos considerar $f : I \to E$ como un morfismo.

Supongamos que existe $g : R \to E$ que extiende a f. Definimos $g(1) = (x_n)$ y tomamos $m \in \mathbb{N}$ y $a' \in I$ tal que $a \notin I_m$. Como $a \notin I_m$, tenemos que $\pi_m(a) \neq 0$ y así $g(a) = f(a)$

tiene coordenada m-ésima no cero $\pi_m(a)$, pero $g(a) = ag(1) = a(x_n) = (ax_n)$, así que $\pi_m(a) = ax_m$, por lo tanto $x_m \neq 0$, para toda m, es decir, hemos contradecido el hecho de que casi todas las coordenadas de un elemento en una suma son cero, por consiguiente g no existe y por ende E no es inyectivo. ■

1.6. R-Módulos Cuasi-Inyectivos

Hemos estudiado a los módulos inyectivos, sus caracterizaciones y propiedades; ahora vamos a "debilitar" un poco el concepto de inyectividad para dar apertura a los módulos auto-inyectivos.

Definición 1.6.1. *Diremos que un R-módulo U es **M-inyectivo** si cada diagrama con renglón exacto*

$$\begin{tikzcd} & U & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "g"] \arrow[r, "i"'] & M \end{tikzcd}$$

puede ser extendido conmutativamente por un morfismo $f : M \to U$ tal que $g = f \circ i$.

Teorema 1.6.2. *Un R-módulo U es M-inyectivo si y solo si $f(M) \subset U$ para todo morfismo $f : E(M) \to E(U)$.*

Prueba. Supongamos, primero, que U es M-inyectivo. Sea $f \in Hom(E(M), E(U))$ y $A = \{m \in M : f(m) \in U\}$. Entonces $f\mid_A : A \to U$. Como U es M-inyectivo tenemos que existe $g : M \to M$ tal que $g\mid_A = f\mid_A$.

Afirmamos que $U \cap (g - f)(M) = 0$. Sea $u \in U$ y $m \in M$ tal que $u = (g - f)(m) = g(m) - f(m)$, pero $f(m) = g(m) - u \in U$, por lo tanto $m \in A$. Puesto que $f(m) = g(m)$ para toda $m \in A$ tenemos que $u = g(m) - f(m) = 0$, lo que nos dice que $U \cap (g - f)(M) = 0$.

Por otro lado, sabemos que $U \trianglelefteq E(U)$, esto nos implica que $(g - f)(M) = 0$, es decir, $f(M) = g(M) \subset U$.

Ahora supongamos que $f(M) \subset U$ para todo morfismo $f : E(M) \to E(U)$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[r, hook] & E(U) & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "h"] \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, hook] & E(M) \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Por ser $E(U)$ inyectivo, existe $g : E(M) \to E(U)$ tal que $h = g \circ i$. Más aún, $g(M) \subset U$, por hipótesis, por lo tanto la restricción $g\mid_M : M \to U$ es un morfismo tal que $g\mid_M \circ i = h$ y así U es M-inyectivo. ■

Definición 1.6.3. *Un módulo* $\boldsymbol{U}$ *es llamado* ***auto-inyectivo*** *si es* U*-inyectivo.*

Corolario 1.6.4. *Un módulo* U *es auto-inyectivo si y solo si* $f(U) \subset U$ *para todo endomorfismo* f *de* $E(U)$*.*

Prueba. Sea $U = M$, por el teorema anterior, el corolario queda demostrado. $\blacksquare$

Capítulo 2

Inyectividad Relativa a Clases de Torsión

En este capítulo estudiamos la inyectividad relativa a una clase de torsión hereditaria τ. Proporcionamos la definición de inyectividad relativa, algunas caracterizaciones de ella, así como la forma de construir la cápsula τ-inyectiva. Para ello necesitamos exponer los conceptos básicos de las Teorías de Torsión Hereditarias.

2.1. Clases de Torsión Hereditarias

Definición 2.1.1. *Una clase $\mathbb{T}_\tau$ de R-módulos izquierdos es llamada una* ***clase de torsión hereditaria*** *si y sólo si satisface las siguientes propiedades:*

(1) $0 \in \mathbb{T}_\tau$ *(para asegurar que $\tau \neq \phi$).*

(2) $\mathbb{T}_\tau$ *es cerrado bajo cocientes.*

(3) $\mathbb{T}_\tau$ *es cerrado bajo submódulos.*

(4) $\mathbb{T}_\tau$ *es cerrado bajo extensiones exactas.*

(5) $\mathbb{T}_\tau$ *es cerrado bajo sumas directas.*

De las propiedades (2) y (5), se sigue que, para cualquier R-módulo izquierdo M, el conjunto $t_\tau(M) = \sum\{N : N \leq M, N \in \mathbb{T}_\tau\}$ es el submódulo mas grande de M en $\mathbb{T}_\tau$. Además, por la propiedad (4), tenemos que $t_\tau(M/t_\tau(M)) = 0$

Definición 2.1.2. *Dada una clase de torsión hereditaria $\mathbb{T}_\tau$, definimos la* ***clase libre de torsión hereditaria*** *de R-módulos izquierdos como:*

$$\mathbb{F}_\tau = \{M : Hom_R(T, M) = 0, \forall\, T \in \mathbb{T}_\tau\}.$$

Proposición 2.1.3. *La clase libre de torsión hereditaria $\mathbb{F}_\tau$ correspondiente a la clase de torsión hereditaria $\mathbb{T}_\tau$ tiene las siguientes propiedades:*

(1) *$\mathbb{F}_\tau$ es cerrada bajo submódulos.*

(2) *$\mathbb{F}_\tau$ es cerrada bajo extensiones exactas.*

(3) *$\mathbb{F}_\tau$ es cerrada bajo productos directos.*

Prueba. Sea N un submódulo de M tal que $M \in \mathbb{F}_\tau$, entonces $Hom_R(T, M) = 0$ para toda $T \in \mathbb{T}_\tau$, por tanto, puesto que $Hom_R(T, \_\,)$ es exacto izquierdo, tenemos la sucesión exacta:

$$0 \to Hom_R(T, N) \to Hom_R(T, M) = 0$$

es decir, $Hom_R(T, N) = 0$ para toda $T \in \mathbb{T}_\tau$, esto nos dice que $N \in \mathbb{F}_\tau$ y por consiguiente se cumple (1).

Tomemos ahora $M_1, M_2 \in \mathbb{F}_\tau$ y M un módulo tal que $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ es exacta, entonces $Hom_R(T, M_1) = 0 = Hom_R(T, M_2)$ para toda $T \in \mathbb{T}_\tau$, y por lo tanto:

$$0 = Hom_R(T, M_1) \to Hom_R(T, M) \to Hom_R(T, M_2) = 0$$

lo que nos dice que $Hom_R(T, M) = 0$ para toda $T \in \mathbb{T}_\tau$, por consiguiente $M \in \mathbb{F}_\tau$ y así tenemos que se cumple (2).

Por último, sean $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos en $\mathbb{F}_\tau$, entonces para cada $T \in \mathbb{T}_\tau$ e $i \in I$ tenemos que $Hom_R(T, M_i) = 0$, por lo tanto, por propiedades de $Hom_R(T, \_\,)$, vemos que:

$$Hom_R(T, \prod_{i\in I} M_i) \cong \prod_{i\in I} Hom_R(T, M_i) = \prod_{i\in I} 0 = 0$$

para toda $T \in \mathbb{T}_\tau$, es decir, $\prod\limits_{i\in I} M_i \in \mathbb{F}_\tau$, por lo cual (3) se satisface. ∎

Ejemplo 2.1.4. *Sea*

$$\mathbb{T}_0 = \{G \text{ grupo abeliano} : \forall g \in G, g \text{ es de orden finito}\},$$

entonces $\mathbb{T}_0$ es una clase de torsión hereditaria, con

$$\mathbb{F}_0 = \{G \text{ grupo abeliano} : \forall g \in G, g \text{ no es de orden finito}\}$$

como su clase libre de torsión hereditaria correspondiente.

Ejemplo 2.1.5. *Sea I un ideal de R tal que $I^2 = I$. Entonces:*

$$\mathbb{T}_\tau = \{M : IM = 0\}$$

es una clase de torsión hereditaria, con su correspondiente clase libre de torsión hereditaria:

$$\mathbb{F}_\tau = \{M : \text{ para } m \in M, Im = 0 \Rightarrow m = 0\}$$

Definición 2.1.6. *Cualquier par de clases $(\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$, donde $\mathbb{T}_\tau$ es una clase de torsión hereditaria y $\mathbb{F}_\tau$ es la clase libre de torsión hereditaria correspondiente a $\mathbb{T}_\tau$, es llamada una **teoría de torsión**.*

Definición 2.1.7. *Un conjunto $\mathcal{L}$ de ideales izquierdos de R es llamado un **filtro lineal** si $\mathcal{L}$ satisface las siguientes propiedades:*

(1) *$\mathcal{L}$ es cerrado bajo super ideales.*

(2) *$\mathcal{L}$ es cerrado bajo trasladados, es decir,si $I \in \mathcal{L}$ y $r \in R$, entonces $(I : r) \in \mathcal{L}$.*

(3) *$\mathcal{L}$ es cerrado bajo intersecciones finitas.*

*$\mathcal{L}$ es llamado **de Gabriel** si además cumple:*

(4) *Si I es un ideal izquierdo de R y si $K \in \mathcal{L}$ tal que $(I : k) \in \mathcal{L}$, para cada $k \in K$, entonces $I \in \mathcal{L}$.*

Proposición 2.1.8. *Sea $\mathbb{T}_\tau$ una clase de torsión hereditaria y consideremos el conjunto $\mathcal{L}_\tau = \{I : R/I \in \mathbb{T}_\tau\}$ de ideales izquierdos, entonces $\mathcal{L}_\tau$ es un filtro lineal idempotente. Más aún, si $\mathcal{L}$ es cualquier filtro lineal idempotente de ideales izquierdos, definimos:*

$$\mathbb{T}_\mathcal{L} = \{M : (0 : m) \in \mathcal{L}_\tau, \forall m \in M\} \;\; y \;\; \mathbb{F}_\mathcal{L} = \{M : Hom_R(R/I, M) = 0, \forall I \in \mathcal{L}_\tau\},$$

entonces $\tau_\mathcal{L} = (\mathbb{T}_\mathcal{L}, \mathbb{F}_\mathcal{L})$ es su teoría de torsión hereditaria. Además $\mathbb{T}_\tau = \mathbb{T}_{\mathcal{L}_\tau}$ y $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\tau_\mathcal{L}}$.

Prueba. Para la primera parte, demostraremos que $\mathcal{L}_\tau = \{I : R/I \in \mathbb{T}_\tau\}$ es un filtro lineal:

Sean $I \in \mathcal{L}_\tau$ y K un ideal izquierdo de R que contiene a I, entonces existe un epimorfismo $p : R/I \to R/K$, pero $\mathbb{T}_\tau$ es cerrado bajo cocientes y $R/I \in \mathbb{T}_\tau$, por tanto $R/K \in \mathbb{T}_\tau$, es decir, $K \in \mathcal{L}_\tau$.

Tomemos $I \in \mathcal{L}_\tau$ y $r \in R$, entonces $R/(I : r) = R/(0 : r + I) \cong Rr + I/I \subset R/I \in \mathbb{T}_\tau$. Como $\mathbb{T}_\tau$ es cerrado bajo submódulos, tenemos que $R/(I : r) \in \mathbb{T}_\tau$, esto es, $(I : r) \in \mathcal{L}_\tau$.

Si $I, K \in \mathcal{L}_\tau$, entonces $R/I, R/K \in \mathbb{T}_\tau$, pero $R/(I \cap k) \subset R/I \oplus R/K$; puesto que $\mathbb{T}_\tau$ es cerrado bajo sumas directas y submódulos, tenemos que $R/(I \cap K) \in \mathbb{T}_\tau$.

Ahora consideremos I un ideal de R y $K \in \mathcal{L}_\tau$ tal que $(I : k) \in \mathcal{L}_\tau$ para toda $k \in K$. Tenemos que $((I \cap K) : k) = (I : k) \in \mathcal{L}_\tau$, entonces

$$Rk + (I \cap K)/(I \cap K) \cong R/((I \cap K) : k) = R/(I : k) \in \mathbb{T}_\tau$$

pero $Rk + (I \cap K)/(I \cap K) = Rk/Rk \cap (I \cap K)$, por lo tanto el epimorfismo $\pi : Rk/Rk \cap (I \cap K) \to Rk/(I \cap K)$ nos dice que $Rk/(I \cap K) \in \mathbb{T}_\tau$, pues $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo cocientes. Más aún, $K/(I \cap K) = \sum\limits_{k \in K} Rk/(I \cap K) \in \mathbb{T}_\tau$ puesto que $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo sumas directas, por lo tanto, usando la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow K/(I \cap K) \cong (K + I)/I \longrightarrow R/I \longrightarrow R/(I + K)$$

nos dice que $R/I \in \mathbb{T}_\tau$ ya que $K \in \mathcal{L}_\tau$, entonces $I + K \in \mathcal{L}_\tau$, es decir $R/(I + K) \in \mathbb{T}_\tau$ y $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo sucesiones exactas.

Para la segunda parte, mostraremos que $\mathbb{T}_\mathcal{L}$ es una clase de torsión hereditaria.

Primero notemos que $0 \in \mathbb{T}_\mathcal{L}$. Sean $M \in \mathbb{T}_\mathcal{L}$ y $f : M \to N$ un epimorfismo, entonces para todo $m \in M$ tenemos que $(0 : m) \in \mathcal{L}$. Si tomamos $r \in (0 : m)$, tenemos que $0 = f(0) = f(rm) = rf(m)$, por lo tanto $r \in (0 : f(m))$, es decir, $(0 : f(m)) \in \mathcal{L}$, para toda $f(m) \in N$, lo que nos dice que $N \in \mathbb{T}_\tau$ y así $\mathbb{T}_\tau$ es cerrado bajo cocientes.

Para ver que $\mathbb{T}_\mathcal{L}$ es cerrado bajo submódulos, tomemos $M \in \mathbb{T}_\tau$, $N \leq M$ y $n \in N$ arbitrario, entonces tenemos que $n \in M$, por lo tanto $(0 : n) \in \mathcal{L}$, para toda $n \in N$, por consiguiente $N \in \mathbb{T}_\tau$ y así cumplimos lo requerido.

Ahora sean $M_1, M_2 \in \mathbb{T}_\tau$ tal que la sucesión $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$ es exacta.

Como $M_1, M_2 \in \mathbb{T}_\tau$, entonces $(0 : m_1), (0 : m_2) \in \mathcal{L}$ para todo $m_1 \in M_1$ y $m_2 \in M_2$. Sean $r_1 \in (0 : m_1)$ y $r_2 \in (0 : m_2)$. Puesto que la sucesión es exacta, existe $m \in M$ tal que $g(m) = m_2$, entonces tenemos $0 = r_2 m_2 = r_2 g(m) = g(r_2 m)$, es decir, $r_2 m \in Ker g = Im f$, por tanto existe $m_1 \in M_1$ tal que $f(m_1) = r_2 m$, por tanto $0 = f(0) = f(r_1 m_1) = r_1 f(m_1) = r_1 r_2 m$, lo que nos dice que $r_1 r_2 \in (0 : m)$, por lo tanto $M \in \mathcal{L}$ y así $\mathbb{T}_\mathcal{L}$ es cerrado bajo sucesiones exactas.

Consideremos la familia $\{M_i\}_{i \in I}$ tales que $M_i \in \mathbb{T}_\mathcal{L}$, es decir, $(0 : m_i) \in \mathcal{L}$ para todo $i \in I$. Sea $(m_i) \in \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$, entonces $\bigcap (0 : m_i) \subseteq (0 : (m_i))$, pero (m_i) tiene un cantidad finita de coordenadas no cero, por lo tanto $\bigcap (0 : m_i)$ es finito, así $\bigcap (0 : m_i) \in \mathcal{L}$, pues $\mathcal{L}$ es cerrada bajo intersecciones finitas y además $(0 : (m_i)) \in \mathcal{L}$ ya que $\mathcal{L}$ es cerrada bajo super conjuntos, por lo tanto $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i \in \mathbb{T}_\tau$.

Con lo anterior hemos demostrado que $\mathbb{T}_\mathcal{L}$ es una clase de torsión hereditaria, ahora demostraremos que $\mathbb{T}_\tau = \mathbb{T}_{\mathcal{L}_\tau}$:

Sea $M \in \mathbb{T}_\tau$, entonces $Rm \in \mathbb{T}_\tau$, para toda $m \in M$ (pues $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo submódulos), por lo tanto $(0 : m) \in \mathcal{L}_\tau$, para toda $m \in M$ y así $M \in \mathbb{T}_{\mathcal{L}_\tau}$.

Sea $M \in \mathbb{T}_{\mathcal{L}_\tau}$, entonces, para toda $m \in M$, $(0 : m) \in \mathcal{L}_\tau$, es decir, $R/(0 : m) \in \mathbb{T}_\tau$, por lo tanto $Rm \in \mathbb{T}_\tau$, para toda $m \in M$ y así $M \in \mathbb{T}_\tau$.

Por último veamos que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\tau_\mathcal{L}}$:

Sean $I \in \mathcal{L}$ y $r + I \in R/I$, entonces $(0 : r + I) = (I : r) \in \mathcal{L}$, para toda $r + I \in R/I$, por lo tanto $I \in \mathcal{L}_{\tau_\mathcal{L}}$.

Sean $I \in \mathcal{L}_{\tau_\mathcal{L}}$, $r + I \in R/I$ y $(0 : r + I) \in \mathcal{L}$, entonces $(0 : r + I) = (I : r) \in \mathcal{L}$, para toda $r \in R$, por lo tanto $I \in \mathcal{L}$ (por la condición de gabriel).

■

2.2. Inyectividad Relativa

Definición 2.2.1. *Sea* $(\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$ *una teoría de torsión hereditaria y* $\mathcal{L}_\tau$ *su filtro asociado. Diremos que un* R*-módulo izquierdo* E *es* τ*-inyectivo si cada diagrama de* R*-módulos izquierdos*

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd}$$

tal que $B/A \in \mathbb{T}_\tau$*, puede ser completado a un diagrama*

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

el cual conmuta, es decir, $h \circ i = f$*.*

A continuación mostramos una propiedad de los módulos τ-inyectivos:

Teorema 2.2.2. *Para cada sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow B/A \longrightarrow 0$ *, tal que* $B/A \in \mathbb{T}_\tau$*, si* E *es un módulo* τ*-inyectivo, entonces el funtor* $Hom_R(\_, E)$ *es exacto.*

Prueba. Supongamos que E es τ-inyectivo. Basta con probar que $Hom_R(\_, E)$ convierte monomorfismos en epimorfismos puesto que es un funtor contravariante izquierdo. Sean $i : A \to B$ un monomorfismo tal que $B/A \in \mathbb{T}_\tau$ y $f \in Hom_R(A, E)$, entonces para $i^* : Hom_R(B, E) \to Hom_R(A, E)$ y $g \in Hom_R(B, E)$ tenemos que $i^*(g) = g \circ i = f$, pues f es τ-inyectivo, por tanto i^* es epimorfismo. ■

Como en el caso de inyectividad, podemos probar τ-inyectividad mediante el uso de ideales izquierdos, es decir, podemos dar un criterio de Baer relativo a los módulos τ-inyectivos.

Lema 2.2.3. ***(Lema de Baer relativo a clases de torsión hereditarias)*** *Un R-módulo izquierdo E es τ-inyectivo si y sólo si para cada diagrama*

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \end{tikzcd}$$

con $I \in \mathcal{L}_\tau$, existe un homomorfismo g que hace que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

conmute.

Prueba. Supongamos que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

tal que $B/A \in \mathbb{T}_\tau$. Sea $\mathcal{C}$ la familia de todos los pares (A', g'), donde $A \subseteq A' \subseteq B$, $g' : A' \to B$ tal que g' extiende a f y $B/A' \in \mathbb{T}_\tau$. Podemos notar que $\mathcal{C} \neq 0$ pues $(A, g) \in \mathbb{T}_\tau$.

Ahora ordenemos parcialmente por la siguiente relación: $(A', g') \leq (A'', g'')$, si $A' \subseteq A''$ y g'' extiende a g'. Afirmamos que existe un máximo en $\mathcal{C}$. Sean $(A_1, g_1) \leq (A_2, g_2) \leq \cdots$ una cadena ascendente en $\mathcal{C}$, $\overline{A} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ y $g : \overline{A} \to E$, dada por $g(a_i) = g_i(a_i)$ (la cual está bien definida por la condición de compatibilidad de las g_i's), para toda $a_i \in A_i$. Como $A_i \hookrightarrow \overline{A}$, entonces existe un epimorfismo $p : B/A_i \to B/\overline{A}$ (el cual está bien definida por la inmersión de cada A_i en $\overline{A}$); puesto que $B/A_i \in \mathbb{T}_\tau$ y $\mathbb{T}_\tau$ es cerrado bajo cocientes tenemos que $B/\overline{A} \in \mathbb{T}_\tau$.

Es inmediato notar que $A_i \subset \overline{A}$ y que además g extiende g' (por la definición de g), para toda $i \in \mathbb{N}$, por lo tanto $(\overline{A}, g)$ es cota superior en $\mathcal{C}$. Por el lema de Zorn, existe un máximo en $\mathcal{C}$. Sea $A_0, g_0)$ ese máximo; si $A_0 = B$, entonces hemos terminado.

Supongamos que $A_0 \neq B$, entonces sea $x \in B/A_0$ e $I = \{r \in \mathbb{R} : rx \in A_0\} = (A_0 : x)$. Sabemos que $(A_0 : x)$ es un ideal de A_0, así que definimos $h : I \to E$ por $h(r) = g_0(rx)$. Por otro lado tenemos que $R/I = R/(A_0 : x) = R/(0 : x + A_0) = R(x + A_0) = Rx + A_0/A_0 \leq B/A_0 \in \mathbb{T}_\tau$, esto nos dice que $R/I \in \mathbb{T}_\tau$ ya que $\mathbb{T}_\tau$ es cerrado bajo submódulos.

Así, por hipótesis, hay un morfismo $h : R \to E$ que extiende a f. Entonces definimos $A_1 = A_0 + Rx$ y $g_1 : A_1 \to E$ dada por $a_0 + rx \mapsto g_0(a_0) + rh(1)$, con $r \in R$ (la cual esta bien definida, véase 1.3.1).

Lo anterior nos dice que $(A_1, g_1) \in \mathcal{C}$, con $A_0 < A_1$, lo cual contradice que A_0 es máximo, por lo tanto $A_0 = B$ y E es τ-inyectivo.

Supongamos ahora que E es τ-inyectivo. Como un ideal izquierdo de R es un submódulo del mismo, entonces tenemos un caso particular de la definición de τ-inyectividad. ■

En termino homológicos, podemos dar el siguiente teorema:

Teorema 2.2.4. *Un R-módulo E es τ-inyectivo si y solo si $Ext_R(R/I, E) = 0$, para cada $I \in \mathcal{L}_\tau$.*

Prueba. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & E & & & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u] \arrow[r, "i"] & R \arrow[r, "g"] & R/I \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $I \in \mathcal{L}_\tau = \{I : R/I \in \mathbb{T}_\tau\}$. Aplicando el funtor $Ext(\_, E)$ a la sucesión tenemos:

$$0 \longrightarrow Hom_R(R/I, E) \longrightarrow Hom_R(R, E) \xrightarrow{i_*} Hom_R(I, E) \longrightarrow Ext_R(R/I, E) = 0$$

lo que nos dice que i_* es un epimorfismo, esto es, si $f \in Hom_R(I, E)$, entonces existe $g \in Hom_R(R, E)$, tal que $f = i_*(g) = g \circ i$, por lo tanto E es τ-inyectivo.

Inversamente, sea la sucesión exacta corta $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ con $I \in \mathcal{L}$. Aplicando el funtor $Ext_R(\_, E)$ a la sucesión anterior tenemos:

$$0 \longrightarrow Hom_R(R/I, E) \longrightarrow Hom_R(R, E) \longrightarrow Hom_R(I, E) \longrightarrow Ext_R(R/I, E) \longrightarrow \cdots,$$

pero por hipótesis i_* es un epimorfismo, entonces $Ext_R(R/I, E) = 0$. ■

De igual manera que en la inyectividad tradicional, se cumple la siguiente proposición:

Proposición 2.2.5. *Si $\{E_j\}_{j \in J}$ es una familia de módulos τ-inyectivos, entonces $\prod_{j \in J} E_j$ es τ-inyectivo.*

Prueba. Sean λ_j y π_j las inclusiones y proyecciones, respectivamente, de el producto $\prod_{j \in J} E_j$. Consideremos el siguiente diagrama tal que $B/A \in \mathbb{T}_\tau$ para cada E_j:

$$\begin{tikzcd} & \prod E_j \arrow[r, shift left, "\pi_j"] & E_j \arrow[l, shift left, "\lambda_j"] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[u, dashed, "g_j"'] \end{tikzcd}$$

Como cada E_j es τ-inyectivo, con $j \in J$, entonces existe $g_j : B \to E_j$, tal que $g_j \circ i = \pi_j \circ f$. Definamos $h : B \to \prod E_j$ por $b \mapsto (g_j(b))$. Entonces $h \circ i(a) = ((g_j \circ i)(a)) = ((\pi \circ f)(a)) = f(a)$ y como $B/A \in \mathbb{T}_\tau$ para cada E_j, entonces $\prod\limits_{j \in J} E_j$ es τ-inyectivo. ■

Corolario 2.2.6. *Cualquier suma directa finita de módulos τ-inyectivos es τ-inyectivo.*

Prueba. Es un caso particular de la proposición anterior. ■

Proposición 2.2.7. *Todo sumando directo de un módulo τ-inyectivo es τ-inyectivo.*

Prueba. Sea M un módulo τ-inyectivo, D un sumando directo de M y el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[r, shift left, "j"] & M \arrow[l, shift left, "p"] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[u, dashed, "h"'] \arrow[r] & B/A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $B/A \in \mathbb{T}_\tau$, j es la inclusión y p es la proyección natural. Como M es τ-inyectivo, existe $h : B \to M$ tal que $(h \circ i)(a) = (j \circ f)(a)$, para toda $a \in A$.

Definimos $g : B \to D$ por $g(b) = (p \circ h)(b)$, entonces $(g \circ i)(a) = (p \circ h \circ i)(a) = (p \circ j \circ f)(a) = f(a)$, para toda $a \in A$, lo que nos dice que D es τ-inyectivo. ■

2.3. La Cápsula Inyectiva Relativa

Nuestra siguiente meta es definir el módulo τ-inyectivo mas pequeño que contenga a un módulo M, es decir la cápsula inyectiva relativa a la clase de torsión $\mathbb{T}_\tau$. Pero para ello necesitaremos la siguiente proposición, la cual es una caracterización para los módulo τ-inyectivos:

Proposición 2.3.1. *Un módulo M es τ-inyectivo si y sólo si $E(M)/M \in \mathbb{F}_\tau$.*

Prueba. Supongamos que M es τ-inyectivo. Consideremos la sucesión:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} N \longrightarrow N/M \longrightarrow 0$$

tal que $N/M = t_\tau(E(M)/M)$ (la parte de torsión de $E(M)/M$). Como M es τ-inyectivo, entonces existe $g : N \to M$ tal que $g \circ i = id_M$. Supongamos que $kerg \neq 0$, entonces $kerg \cap M \neq 0$ (por esencialidad de M). Sea $x \in kerg \cap M$, puesto que $kerg \cap M = ker(id) = 0$, nos lleva a concluir que $x = 0$ y por lo tanto g es monomorfismo; además, puesto que $M \leq N$, g es también epimorfismo y por consiguiente g es isomorfismo, esto es, $N \cong M$ y así $0 = N/M = t_\tau(E(M)/M)$, lo que nos indica que $E(M)/M \in \mathbb{F}_\tau$.

Supongamos ahora que $E(M)/M \in \mathbb{F}_\tau$. Tomemos el siguiente diagrama tal que $R/I \in \mathbb{T}_\tau$:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, hook] & E(M) & & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[u, dashed, "g"'] \arrow[r] & R/I \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sea $x = g(1) \in E(M)$, entonces $x + M \in E(M)/M$. Consideremos el cíclico $R(x+M)$, del cual sabemos que $R(x + M) \cong R/(0 : x + M) = R/(M : x)$. Por otro lado $I \leq (M : x)$ pues si $r \in I$, entonces $rx = rg(1) = g(r) = f(r) \in M$ (por inyectividad de $E(M)$). Por lo tanto $R/I \to R/(M : x)$ es un epimorfismo; como $R/I \in \mathbb{T}_\tau$ entonces $R/(M : x) \in \mathbb{T}_\tau$ ($\mathbb{T}_\tau$ es cerrado bajo cocientes), es decir $R(x + M) \in \mathbb{T}_\tau$.

Pero $R(x+M) \leq E(M)/M \in \mathbb{F}_\tau$, esto implica que $R(x+M) \in \mathbb{F}_\tau$ ($\mathbb{T}_\tau$ es cerrado bajo submódulos), por lo tanto $R(x+M) = 0$, esto es, $g(1) = x \in M$, lo que nos dice finalmente que $g : R \to M$ y así M es τ-inyectivo. ■

Definamos $E_\tau(M) = \{x \in E(M) : (M : x) \in \mathcal{L}_\tau\}$. Observemos que si $x_1, x_2 \in E_\tau(M)$, entonces $(M : x_i) \in \mathcal{L}_\tau$, con $i = 1, 2$, por lo tanto $(M : x_1) \cap (M : x_2) \in \mathcal{L}_\tau$, pero $(M : x_1) \cap (M : x_2) \leq (M : x_1 + x_2)$, entonces $(M : x_1 + x_2) \in \mathcal{L}_\tau$ y por tanto $x_1 + x_2 \in E_\tau(M)$; además, si $x \in E_\tau(M)$ y $r \in R$ tal que $rx \in M$, implica que $-rx \in M$ y así $(M : -x) = (M : x) \in \mathcal{L}_\tau$, lo que nos dice que $-x \in E_\tau(M)$.

Lo anterior nos permite decir que $0 \in E_\tau(M)$ y puesto que $(M : x_1+x_2) = (M : x_2+x_1)$, podemos concluir que $E_\tau(M)$ es un grupo abeliano. Más aún, sean $s \in R$ y $x \in E_\tau(M)$, entonces $(M : sx) = \{r \in R : r(sx) \in M\} \geq ((M : sx) : s) \in \mathcal{L}_\tau$, por lo tanto $(M : sx) \in \mathcal{L}_\tau$ pues $\mathcal{L}_\tau$ es cerrado bajo superideales. Por lo tanto hemos mostrado que $E_\tau(M) \leq E(M)$.

Afirmamos también que $M \leq E_\tau(M)$ pues para toda $r \in R$ y $x \in M$, tenemos que $rx \in M$, es decir, $(M : x) = R$, pero $R/R = 0 \in \mathbb{T}_\tau$, entonces $R \in \mathcal{L}_\tau$ y así, $x \in E_\tau(M)$. Además, para toda $x \in E_\tau(M)$ y $0 \neq r \in (M : x)$ tenemos que $0 \neq rx \in M$, por lo tanto $M \trianglelefteq E_\tau(M)$.

Ahora observemos que si $x + M \in t_\tau(E(M)/M)$, entonces $R(x + M) \in \mathbb{T}_\tau$, es decir, $R/(M : x) = R/(0 : x + M) \in \mathbb{T}_\tau$, esto es, $(M : x) \in \mathcal{L}_\tau$, por lo tanto $x + M \in E_\tau(M)/M$; inversamente si $x + M \in E_\tau(M)/M$, entonces $(M : x) \in \mathcal{L}_\tau$, lo que implica que $R/(M : x) \in \mathbb{T}_\tau$, es decir, $R(x : M) \in \mathbb{T}_\tau$ y por lo tanto $x + M \in t_\tau(E(M)/M)$. Así hemos probado que $E_\tau(M)/M = t_\tau(E(M)/M)$.

De lo anterior se sigue que si $E_\tau(M)/M \in \mathbb{T}_\tau$, entonces $(E(M)/M)/(E_\tau(M)/M) \cong E(M)/E_\tau(M) \in \mathbb{F}_\tau$, es decir, $E(E_\tau(M))/E_\tau(M) \in \mathbb{F}_\tau$ (pues $E(E_\tau(M)) = E(M)$) y por la proposición anterior, $E_\tau(M)$ es τ-inyectivo.

Por último, supongamos que existe un módulo E τ-inyectivo, tal que $M \leq E \leq E_\tau(M)$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & E & & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[u, "j"] \arrow[r, "i"] & E_\tau(M) \arrow[r] & E_\tau(M)/M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $E_\tau(M)/M \in \mathbb{T}_\tau$ (pues $E_\tau(M)/M = t_\tau(E(M)/M)$), entonces por ser E τ-inyectivo tenemos que existe $g : E_\tau(M) \to E$ tal que $g \circ i = j$, donde j es la inclusión de M en E. Ahora supongamos que $Kerg \neq 0$, entonces por esencialidad tenemos que $Kerg \cap M \neq 0$, es decir, existe $x \in Kerg \cap M = Kerj = 0$,(ya que j es inclusión), entonces $x = 0$ y así hemos demostrado que g es monomorfismo. Más aún, g es también un epimorfismo pues $E \leq E_\tau(M)$, por lo tanto g es un isomorfismo y así $E = E_\tau(M)$.

Finalmente, supongamos que existe otro módulo $\overline{E}$ τ-inyectivo que cumple las mismas condiciones que $E_\tau(M)$, entonces aplicando un procedimiento similar al anterior tendríamos que $E = E_\tau(M)$.

Con lo anterior hemos demostrado que $E_\tau(M)$ es el único módulo τ-inyectivo más pequeño que contiene a M, así que podemos definir a $E_\tau(M)$ como la cápsula τ-inyectiva.

Proposición 2.3.2. *La clase libre de torsión hereditaria $\mathbb{F}_\tau$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Prueba. Supongamos que $M \in \mathbb{F}_\tau$ pero $E(M) \notin \mathbb{F}_\tau$, entonces $Hom_R(T, E(M)) \neq 0$, para algún $T \in \mathbb{T}_\tau$, así que podemos encontrar un homomorfismo f tal que $f(T) \subseteq E(M)$. Como M es esencial en $E(M)$, entonces $f(T) \cap M \neq 0$. Sea $T' = f^{-1}(f(T) \cap M) \subseteq T$. Puesto que $\mathbb{T}_\tau$ es cerrado bajo submódulos, tenemos que $T' \in \mathbb{T}_\tau$, pero la restricción de f a T' es un elemento no cero de $Hom_R(T', M)$, esto nos dice que $M \notin \mathbb{F}_\tau$, lo cual es una contradicción pues $\mathbb{F}_\tau = \{M : Hom_R(T, M) = 0, \forall T \in \mathbb{T}_\tau\}$, por lo tanto $Hom_R(T, E(M)) = 0$ y así $E(M) \in \mathbb{F}_\tau$. ■

Corolario 2.3.3. *Si $M \in \mathbb{F}_\tau$, entonces $E_\tau(M) \in \mathbb{F}_\tau$.*

Prueba. Si $M \in \mathbb{F}_\tau$, tenemos por la proposición anterior que $E(M) \in \mathbb{F}_\tau$ y como $E_\tau(M) \leq E(M)$, entonces $E_\tau(M) \in \mathbb{F}_\tau$, pues $\mathbb{F}_\tau$ es cerrado bajo submódulos. ■

2.4. Módulos τ-Noetherianos

Hemos visto hasta el momento que el producto de módulos τ-inyectivos es un módulo τ-inyectivo, pero nuestro nuevo interés es ver cuando o bajo que condiciones, la suma directa arbitraria de módulos τ-inyectivos es un módulo τ-inyectivo y para ello revisaremos los siguientes conceptos.

Definición 2.4.1. *Sea $(\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$ una teoría de torsión hereditaria con filtro lineal idempotente $\mathcal{L}_\tau$ de ideales izquierdos de R, entonces:*

(a) *R satisface la* ***condición de cadena ascendente sobre ideales izquierdos en $\mathcal{L}_\tau$*** *(CCA) si para cada cadena ascendente de ideales izquierdos en $\mathcal{L}_\tau$, $I_1 \leq I_2 \leq I_3 \leq \cdots$, se tiene que $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \cdots$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

(b) *R es* ***τ-Noetheriano*** *si para cada cadena ascendente infinita numerable de ideales izquierdos de R, $I_1 \leq I_2 \leq I_3 \leq \cdots$, tal que $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \in \mathcal{L}_\tau$, se cumple que $I_n \in \mathcal{L}_\tau$, para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 2.4.2. *Sea* $(\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$ *es una teoría de torsión hereditaria con filtro lineal idempotente* $\mathcal{L}_\tau$*. Entonces cualquier suma directa de módulos izquierdos* τ*-inyectivos en* $\mathbb{T}_\tau$ *es* τ*-inyectivo si y sólo si* R *cumple CCA sobre ideales izquierdos en* $\mathcal{L}_\tau$*.*

Prueba. Supongamos primero que R cumple CCA sobre ideales izquierdos en $\mathcal{L}_\tau$. Sean $I \in \mathcal{L}_\tau$, $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de módulos τ-inyectivos y $f : I \to \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$. Consideremos la proyección canónica $\pi_\beta : \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha \to M_\beta$ y el conjunto $B = \{\alpha \in A : (\pi_\beta \circ f)(I) \neq 0\}$.

Supongamos que B es infinito, entonces sean $x_1 \in I - Kerf$ y $A_1 = \{\alpha \in A : (\pi_\beta \circ f)(x_1) \neq 0\}$. Como B es infinito, existe $x_2 \in I$ tal que $A_2 = \{\alpha \in A : (\pi_\beta \circ f)(x_2) \neq 0\}$ no esta contenido en A_1. Procediendo de manera similar, podemos tomar $x_n \in I$ y $A_n = \{\alpha \in A : (\pi_\beta \circ f)(x_n) \neq 0\}$ tal que A_n no está contenido en $\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, para cada $n \in \mathbb{N}$ (la existencia está garantizada por la cardinalidad infinita de B).

Sea $p_k : \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha \to \bigoplus \{M_\alpha : \alpha \in A - \bigcup_{n=1}^{k} A_n\}$ la proyección canónica para cada $k \in \mathbb{N}$. Por construcción de los conjuntos A_n, obtenemos una cadena estrictamente ascendente:

$$Ker(p_1 \circ f) < Ker(p_2 \circ f) < Ker(p_3 \circ f) < \cdots$$

de ideales de R, los cuales están contenidos en I. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $I/Ker(p_k \circ f) \cong (p_k \circ f)(I) \in \mathbb{T}_\tau$ (pues $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo sumas directas y bajo submódulos).

Como $I \in \mathcal{L}_\tau$ y $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo extensiones exactas se sigue que de la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to I/Ker(p_k \circ f) \to R/Ker(p_k \circ f) \to R/I \to 0$$

cada $p_k \circ f \in \mathcal{L}_\tau$; esto contradice la condición de cadena ascendente sobre ideales izquierdos en $\mathcal{L}_\tau$. Por lo tanto B es finito y así $\bigoplus_{\alpha \in B} M_\alpha$ es τ-inyectivo, por consiguiente, usando la inclusión $\bigoplus_{\alpha \in B} M_\alpha \hookrightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ tenemos que $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ es τ-inyectivo.

Ahora supongamos que cualquier suma directa de módulos τ-inyectivos es τ-inyectivo. Como $R/I \in \mathbb{T}_\tau$ y $t_\tau(E(R/I)/R/I) = E_\tau(R/I)/R/I \in \mathbb{T}_\tau$, entonces $E_\tau(R/I) \in \mathbb{T}_\tau$ (pues $\mathbb{T}_\tau$ es cerrada bajo sucesiones exactas).

Sean $I_1 \leq I_2 \leq I_3 \leq \cdots$ una cadena ascendente de ideales izquierdos de $\mathcal{L}$ e $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Por hipótesis $E = \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_\tau(R/I_k)$ es τ-inyectivo, así que $f : I \to E$ dada por $f(x) = x + I_k$ extiende al morfismo $g : R \to E$. Puesto que $g(1)$ tiene un número finito de coordenadas no cero, entonces $I = I_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 2.4.3. *Sea* $(\mathbb{T}_\tau, \mathbb{F}_\tau)$ *es una teoría de torsión hereditaria con filtro lineal idempotente* $\mathcal{L}_\tau$. *Entonces cualquier suma directa de módulos izquierdos* τ*-inyectivos en* $\mathbb{F}_\tau$ *es* τ*-inyectivo si y solo si* R *es* τ*-noetheriano.*

Prueba. Primero supongamos que cualquier suma directa de módulos izquierdos τ-inyectivos en $\mathbb{F}_\tau$ es τ-inyectivo. Sean $I_1 \leq I_2 \leq I_3 \leq \cdots$ una cadena ascendente de ideales izquierdos tal que $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \in \mathcal{L}$ y el homomorfismo $f : I \to \bigoplus_{k=1}^{\infty}(R/I_k)$ dado por $f(x) = (x + I_k)$.

Como $I \in \mathcal{L}$, entonces existe un homomorfismo $g : R \to Q_\tau(\bigoplus_{k=1}^{\infty}(R/I_k))$ que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & \bigoplus_{k=1}^{\infty}(R/I_k) \arrow[d, hook, "\eta"] \\ R \arrow[r, "g"] & Q_\tau(\bigoplus_{k=1}^{\infty}(R/I_k)) \end{tikzcd}$$

Por otro lado tenemos, por hipótesis, que:

$$Q_\tau(\bigoplus_{k=1}^{\infty}(R/I_k)) = E_\tau(\bigoplus_{k=1}^{\infty}((R/I_k)/t_\tau(R/I_k))) \cong \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_\tau((R/I_k)/t_\tau(R/I_k)) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} Q_\tau(R/I_k)$$

De este modo podemos identificar a $g(1)$ con algún $(x_k) \in \bigoplus_{k=1}^{\infty} Q_\tau(R/I_k)$, además existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = 0$, para todo $k > n$.

Sea $\pi : \bigoplus_{k=1}^{\infty} Q_\tau(R/I_k) \to Q_\tau(R/I_n)$ la proyección natural. Para $x \in I$ tenemos que:

$$(\pi \circ \eta \circ f)(x) = (\pi \circ g)(x) = \pi(g(x)) = \pi(xg(1)) = xx_k = 0$$

Así $I/I_n \leq Ker(R/I_n \to Q_\tau(R/I_k))$ y por lo tanto $I/I_n \in \mathbb{T}_\tau$. (PORQUE?).

Considerando la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow I/I_n \longrightarrow R/I_n \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

obtenemos que $R/I_n \in \mathbb{T}_\tau$, pues $R/I \in \mathbb{T}_\tau$ y por lo tanto $I_n \in \mathcal{L}_\tau$, es decir R es noetheriano.

Por último supongamos que R es noetheriano y sea $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de módulos τ-inyectivos libres de torsión. Mostraremos que $E = \bigoplus_{\alpha \in A} E_\alpha$ es τ-inyectivo.

Sean $I \in \mathcal{L}_\tau$, $f : I \to E$ un morfismo y $\pi_\beta : E \to E_\beta$ la proyección natural. Como cada E_α es τ-inyectivo, el $\pi_\alpha \circ f$ puede ser extendido a R, por lo tanto f tiene una extensión $g : R \to \prod_{\alpha \in A} E_\alpha$.

Sea $g(1) = (x_n) \in \prod_{\alpha \in A} E_\alpha$. Para $x \in I$, tenemos $(xx_\alpha) = xg(1) = g(x) = f(x) \in E$. Consideremos $B = \{\alpha \in A : x_\alpha \neq 0\}$. Mostraremos que B es finito, de modo que $g : R \to E$.

Supongamos que B es infinito, entonces sea $C = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$ un subconjunto infinito numerable de B. Definimos $I_k = \{x \in I : xx_{\alpha_i} = 0, \forall i > k\}$. Claramente, $I_1 \leq I_2 \leq \cdots$ es una cadena ascendente infinita de ideales izquierdos y $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = I \in \mathcal{L}_\tau$. Por hipótesis, para algún $n \in \mathbb{N}$, $I_n \in \mathcal{L}_\tau$, entonces $I_n x_{\alpha_i} = 0$, para toda $i > n$ (por la definición de I_k). Puesto que $E_{\alpha_i} \in \mathbb{F}_\tau$ para toda i, tenemos que $x_{\alpha_i} = 0$ para toda $i > n$, lo cual contradice la elección de $\alpha_i \in B$, por lo tanto B es finito y así E es τ-inyectivo. ■

Lema 2.4.4. *Supongamos que R es τ-noetheriano y que satisface CCA sobre ideales izquierdos en $\mathcal{L}_\tau$. Si $I \in \mathcal{L}_\tau$ y $f \in Hom_R(I, \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha)$, entonces existe un subconjunto finito B de A tal que $f(I) \subseteq \bigoplus_{\alpha \in B} M_\alpha$.*

Prueba. *Denotemos a π_β como la proyección natural de $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ en M_β. Si el conjunto $B = \{\alpha \in A : (\pi_\alpha \circ f)(I) \neq 0\}$ fuera infinito, entonces podríamos escoger un subconjunto infinito numerable $C = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots\}$ de B.*

La unión de la cadena estrictamente ascendente de ideales izquierdos:

$$I_k = f^{-1}\Big(\bigoplus_{\alpha \in ((A-C) \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\})} M_\alpha\Big)$$

es $I \in \mathcal{L}_\tau$. Como R es τ-noetheriano, entonces $I_n \in \mathcal{L}_\tau$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, por CCA sobre $\mathcal{L}_\tau$, tenemos que $I_m = I_{m+1}$ para algún $m > n$, lo cual contradice que la cadena de ideales izquierdos es estrictamente ascendente, y por consiguiente B es finito. ■

Teorema 2.4.5. *Cualquier suma directa de módulos τ-inyectivos es inyectiva si y solo si R es τ-noetheriano y satisface CCA sobre ideales izquierdos en $\mathcal{L}_\tau$.*

Prueba. Supongamos que R es τ-noetheriano y que cumple CCA en $\mathcal{L}_\tau$. Sean $I \in \mathcal{L}_\tau$, $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ τ-inyectivos, para cada $\alpha \in A$ y $f : I \to \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$. Entonces, por el 2.4.4, existe un subconjunto finito B de A tal que $f(I) \leq \bigoplus_{\alpha \in B} M_\alpha$. Como la suma directa finita de módulos τ-inyectivos es τ-inyectiva, entonces podemos obtener la extensión $g : R \to \bigoplus_{\alpha \in B} M_\alpha$ de f; por la inclusión $\bigoplus_{\alpha \in B} M_\alpha \hookrightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ podemos concluir que $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ es τ-inyectiva.

Recíprocamente, supongamos que la suma de módulos τ-inyectivos es τ-inyectiva, entonces por 2.4.2 y 2.4.3 tenemos que R es τ-noetheriano y que cumple CCA en $\mathcal{L}_\tau$. ■

Capítulo 3

Inyectividad Relativa a Clases Aditivas

3.1. Clases aditivas

En [Walk], C. Walker y E. Walker introdujeron el concepto de una clase aditiva para estudiar la relación entre ciertas clases de Serre y algunos conjuntos de ideales del anillo. De esta manera, los autores utilizaron las clases aditivas como una herramienta para describir las clases de torsión hereditaria, sin estudiar la clase de todas las clases aditivas a fondo. En este capítulo generalizamos el concepto de inyectividad relativa a una clase aditiva. En particular vemos que se cumple el lema de Baer y proporcionamos un criterio de inyectividad, así como su relación con los Anillos σ-Noetherianos.

Definición 3.1.1. *Se dice que una clase de R-módulos izquierdos σ* ***es aditiva*** *si:*

(i) *Es cerrada bajo submódulos.*

(ii) *Es cerrada bajo cocientes.*

(iii) *Es cerrada bajo sumas directas finitas.*

Observación 3.1.2. *Una clase de* ***pretorsión hereditaria*** *es una clase de módulos que es cerrada bajo submódulos, cocientes y sumas directas arbitrarias. Una clase de* ***Serre*** *es una clase de módulos que es cerrada bajo submódulos, cocientes y sucesiones exactas. Toda clase de Serre y toda clase de pretorsión hereditaria es una clase aditiva.*

Ejemplo 3.1.3. *La clase $R-\mathcal{SS}fg$ de todos los módulos semisimples finitamente generados es una clase aditiva. Es inmediato ver que esta clase es cerrada bajo submódulos y cocientes; dado que los módulos en $R-\mathcal{SS}fg$ son sumas finitas de módulos simples, se tiene que es cerrada bajo sumas directas finitas.*

Notemos que $R-\mathcal{SS}fg$ no es cerrada bajo sumas directas arbitrarias, pues tomando un módulo simple S, $S^{(\mathbb{N})}$ no es finitamente generado, y lo que nos dice que $R-\mathcal{SS}fg$ no puede ser una clase de pretorsión hereditaria.

Ahora consideramos la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

Podemos ver que $\mathbb{Z}_2 \in R-\mathcal{SS}fg$, pero $\mathbb{Z}_4 \notin R-\mathcal{SS}fg$, por lo tanto $R-\mathcal{SS}fg$ no es cerrada bajo extensiones exactas, por consiguiente no es una clase de Serre.

Recordemos que un módulo es superfluo cuando es superfluo en algún módulo que lo contenga, en particular hacemos mención del siguiente lema:

Lema 3.1.4. *Un módulo es superfluo si y sólo si es superfluo en su cápsula inyectiva.*

Ejemplo 3.1.5. *La clase de todos los R-módulos superfluos, denotada por $\mathcal{S}_{\ll}$, es una clase aditiva.*

Sean $M \in \mathcal{S}_{\ll}$, $N \leq M$ y $L \leq E(M)$ tales que $N + L = E(M)$, entonces tenemos que:

$$E(M) = N + L \subseteq M + L \subseteq E(M),$$

es decir, $E(M) = M + L$; como $M \ll E(M)$, entonces $L = E(M)$, por lo tanto $N \ll E(M)$ y así $\mathcal{S}_{\ll}$ es cerrada bajo submódulos.

Sean $M \in \mathcal{S}_{\ll}$ $N \leq M$ y $L/N \leq E(M)/N$ tales que $M/N + L/N = E(M)/N$, entonces tenemos que:

$$E(M)/N = M/N + L/N \subseteq (M + L)/N \subseteq E(M)/N,$$

por lo tanto $E(M)/N = (M + L)/N$, lo que implica que:

$$E(M) = M + L.$$

Como $M \ll E(M)$, entonces $L = E(M)$, es decir, $L/N = E(M)/N$, por lo tanto vemos que $M/N \ll E(M)/N$ y así $\mathcal{S}_{\ll}$ es cerrada bajo cocientes.

Sean $M_1, M_2 \in \mathcal{S}_{\ll}$, entonces $M_1 \ll E(M_1)$ y $M_2 \ll E(M_2)$, lo que implica que $(M_1 \oplus M_2) \ll (E(M_1) \oplus E(M_2))$, por lo tanto $\mathcal{S}_{\ll}$ es cerrada bajo sumas directas finitas.

Teorema 3.1.6. *Sea σ una clase aditiva. Consideremos el conjunto:*

$$\mathcal{L}_\sigma = \{I \leq R : R/I \in \sigma\},$$

entonces $\mathcal{L}_\sigma$ es un filtro lineal, el filtro lineal asociado a la clase σ.

Prueba. Sean $I \in \mathcal{L}_\sigma$ y K un ideal izquierdo de R que contiene a I, entonces existe un epimorfismo $\pi : R/I \to R/K$; como σ es cerrada bajo cocientes y $R/I \in \sigma$, tenemos que $R/K \in \sigma$ y así $K \in \mathcal{L}_\sigma$.

Consideremos ahora $I \in \mathcal{L}_\sigma$ y $r \in R$, entonces:

$$R/(I : r) \cong R/(0 : r + I) \cong R(r + I)/I \leq R/I \in \sigma;$$

como σ es cerrada bajo submódulos, tenemos que $R/(I : r) \in \sigma$, es decir, $(I : r) \in \mathcal{L}_\sigma$.

Por último, sean $I, K \in \mathcal{L}_\sigma$, entonces $R/I, R/K \in \sigma$; por otro lado tenemos que $R/(I \cap K)$ se sumerge en $R/I \oplus R/K$, por lo tanto $R/(I \cap K) \in \sigma$, ya que σ es cerrada bajo submódulos y sumas directas finitas. ■

Teorema 3.1.7. *Dado $M \in R - Mod$, sea el conjunto:*

$$t_\sigma(M) = \{m \in M : (0 : m) \in \mathcal{L}_\sigma\} = \{m \in M : Rm \in \sigma\},$$

entonces $t_\sigma(M)$ es submódulo de M; además la asignación $t_\sigma : R - Mod \to R - Mod$ dada por $M \mapsto t_\sigma(M)$ es un prerradical.

Prueba. Primero vamos a ver que $t_\sigma(M)$ es submódulo de M.

Sean $m, m' \in t_\sigma(M)$, entonces $Rm, Rm' \in \sigma$, pero $R(m + m') \leq Rm + Rm' \in \sigma$, pues σ es cerrada bajo cocientes y sumas directas finitas; como también es cerrada bajo submódulos, entonces $R(m + m') \in \sigma$ y así $m + m' \in t_\sigma(M)$.

Si $m \in t_\sigma(M)$, entonces $Rm \in \sigma$, pero $R(-m) = Rm$, por lo tanto $R(-m) \in \sigma$.

Sean $m \in t_\sigma(M)$ y $r \in R$, entonces $Rm \in \sigma$, pero $Rrm \leq Rm$, por lo tanto $Rrm \in \sigma$, pues σ es cerrada bajo submódulos.

Hemos demostrado que $t_\sigma(M)$ es submódulo de M, ahora nos enfocaremos en probar que t_σ es un preradical; para esto, solo nos falta ver que si $f : M \to N$ es un morfismo, entonces $t_\sigma(f) = f\mid_{t_\sigma(M)}$ y $f\mid_{t_\sigma(M)}: t_\sigma(M) \to t_\sigma(N)$.

Sea $m \in t_\sigma(M)$, entonces, por definición de $t_\sigma(M)$, tenemos que $m \in M$ y $(0 : m) \in \mathcal{L}_\sigma$. Dado que $(0 : m) \leq (0 : f(m))$ y $\mathcal{L}_\sigma$ es cerrado bajo super ideales, entonces $(0 : f(m)) \in \mathcal{L}_\sigma$, es decir, $f(m) \in t_\sigma(N)$.

■

Nótese que en general $t_\sigma(M) \notin \sigma$ pues σ no es cerrada bajo sumas arbitrarias. Además, para clases más generales $t_\sigma(M)$ no es necesariamente un submódulo de M.

Proposición 3.1.8. *La asignación t_σ tiene las siguientes propiedades:*

1. $t_\sigma(M) = \sum\{Rm : Rm \in \sigma\}$.

2. $t_\sigma(M) = \sum\{N : N \leq M \text{ y } N \in \sigma\}$.

3. $t_\sigma(t_\sigma(M)) = t_\sigma(M)$.

4. *Si* $N \leq M$ *y* $t_\sigma(M/N) = 0$, *entonces* $t_\sigma(M) \leq N$.

5. $t_\sigma(M) = tr_\sigma(M)$, *donde* $tr_\sigma(M) = \sum\{f(K) : K \in \sigma \text{ y } f : K \to M\}$.

6. $t_\sigma(M) + t_\sigma(N) \subseteq t_\sigma(M+N)$.

7. *Sea* $\{M_i\}_{i\in I}$ *una familia de módulos, entonces* $t_\sigma(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} t_\sigma(M_i)$.

Prueba.

1. Sea $x \in t_\sigma(M)$, entonces $Rx \in \sigma$, por consiguiente $x \in Rx \leq \sum\{Rm : Rm \in \sigma\}$, es decir, $t_\sigma(M) \subseteq \sum\{Rm : Rm \in \sigma\}$.

   Sea $x \in \sum\{Rm : Rm \in \sigma\}$, entonces $x = r_1m_1 + r_2m_2 + \cdots + r_sm_s$, con $r_i \in R$ y $m_i \in M_i$ para toda i, por lo tanto $Rx = R(r_1m_1 + r_2m_2 + \cdots + r_sm_s) \subseteq Rm_1 + Rm_2 + \cdots Rm_s \in \sigma$, es decir, $x \in t_\sigma(M)$ y así $\sum\{Rm : Rm \in \sigma\} \subseteq t_\sigma(M)$.

2. Sea $x \in t_\sigma(M)$, entonces $Rx \in \sigma$, por lo tanto $x \in Rx \leq \sum\{N : N \leq M \text{ y } N \in \sigma\}$, es decir, $t_\sigma(M) \subseteq \sum\{N : N \leq M \text{ y } N \in \sigma\}$.

   Sea $x \in \sum\{N : N \leq M \text{ y } N \in \sigma\}$, entonces $x = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$, con $n_i \in N_i$ para toda i, por lo tanto $Rx = R(n_1 + n_2 + \cdots + n_r) \leq Rn_1 + Rn_2 + \cdots Rn_r \in \sigma$ y así $x \in t_\sigma(M)$ y por consiguiente $\sum\{N : N \leq M \text{ y } N \in \sigma\} \subseteq t_\sigma(M)$.

3. Sea $x \in t_\sigma(t_\sigma(M))$, entonces $x \in t_\sigma(M)$ y $Rx \in \sigma$, es decir, $x \in M$ y $Rx \in \sigma$, por lo tanto $x \in t_\sigma(M)$, así $t_\sigma(t_\sigma(M)) \subseteq t_\sigma(M)$.

   Sea $x \in t_\sigma(M)$, entonces $x \in M$ y $Rx \in \sigma$, es decir, $x \in t_\sigma(M)$ y $Rx \in \sigma$, por lo tanto $x \in t_\sigma(t_\sigma(M))$ y así $t_\sigma(M) \subseteq t_\sigma(t_\sigma(M))$.

4. Sea $x \in t_\sigma(M)$, entonces $Rx \in \sigma$, como σ es cerrada bajo cocientes tenemos que $Rx/Rx\cap N \in \sigma$, pero $Rx/Rx\cap N \cong Rx+N/N \cong R(x+N)$, por lo tanto $R(x+N) \in \sigma$, es decir, $x + N \in t_\sigma(M/N)$; por hipótesis $t_\sigma(M/N) = 0$, entonces $x \in N$ y así $t_\sigma(M) \leq N$.

5. Claramente $tr_\sigma(M) \subseteq t_\sigma(M) = \sum\{N : N \leq M \text{ y } N \in \sigma\}$.

   Sea $N \in t_\sigma(M)$, entonces $N \leq M$ y $N \in \sigma$. Consideremos $f : N \to M$ la inclusión de N en M, entonces $f(N) = N \in \sigma$, por lo tanto $t_\sigma(M) \subseteq tr_\sigma(M)$.

6. Sea $x \in t_\sigma(M)$ y $y \in t_\sigma(N)$, entonces $Rx, Ry \in \sigma$. Como σ es cerrada bajo sumas finitas, entonces $Rx + Ry \in \sigma$, pero $R(x+y) \leq Rx + Ry$, por lo tanto $R(x+y) \in \sigma$, pues σ es cerrada bajo submódulos, es decir, $x+y \in t_\sigma(M+N)$ y así $t_\sigma(M)+t_\sigma(M) \subseteq t_\sigma(M+N)$.

7. La igualdad se obtiene por ser t_σ un prerradical.

■

3.2. Inyectividad Relativa a Clases Aditivas

Como en el capítulo anterior, vamos a definir la inyectividad relativa pero ahora con respecto a una clase aditiva de R-módulos izquierdos σ.

Definición 3.2.1. *Sea σ una clase aditiva y $\mathcal{L}_\sigma$ su filtro lineal asociado. Diremos que un R-módulo izquierdo E es σ-inyectivo si cada diagrama de R-módulos izquierdos*

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd}$$

tal que $B/A \in \sigma$, puede ser completado a un diagrama

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

el cual conmuta, es decir, $h \circ i = f$.

Teorema 3.2.2. ***(Lema de Baer relativo a clases aditivas)*** *Sea σ una clase aditiva. Un R-módulo izquierdo E es σ-inyectivo si y solo si para cada diagrama*

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \end{tikzcd}$$

con $I \in \mathcal{L}_\sigma$, existe un homomorfismo g que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

Prueba. Para la necesidad, basta observar que es un caso particular de la definición de σ-inyectividad.

Para la suficiencia, supongamos que tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd}$$

tal que $B/A \in \sigma$.

Sea $\mathcal{C}$ la familia de pares (A', g') tales que $A \leq A' \leq B$, $g' : A' \to E$ extiende a f y $B/A' \in \sigma$. Esta familia es no vacía pues $(A, f) \in \mathcal{C}$. Ahora damos un orden parcial a $\mathcal{C}$ definido por: $(A', g') \leq (A'', g'')$ si $A' \leq A''$ y g'' extiende a g'.

Sean $(A_1, g_1) \leq (A_2, g_2) \leq \cdots$ una cadena en $\mathcal{C}$, $\overline{A} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ y $g : \overline{A} \to E$, definida por $g(a) = g_i(a_i)$, si $a_i \in A_i$. Notemos que g está bien definida por la condición de compatibilidad de las $g_i's$

El par $(\overline{A}, g) \in \mathcal{C}$ pues $A \leq \overline{A} \leq B$; además g extiende a f. Como $A_i \hookrightarrow \overline{A}$, entonces existe un epimorfismo $p : B/A_i \to B/\overline{A}$; por hipótesis, $B/A_i \in \sigma$ para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces $B/\overline{A} \in \sigma$ ya que σ es cerrada bajo cocientes. Como $(A_i, g_i) \leq (\overline{A}, g)$ para toda $i \in \mathbb{N}$, entonces $(\overline{A}, g)$ es una cota superior de la cadena en $\mathcal{C}$.

Por el lema de Zorn, existen máximos en $\mathcal{C}$; tomemos uno de ellos, digamos $(A_0, g_0) \in \mathcal{C}$. Si $A_0 = B$, hemos acabado. Si no, entonces sea $x \in B - A_0$ e $I = \{r \in R : rx \in A_0\} = (A_0 : x)$, el cual sabemos que es un ideal izquierdo de R; por lo tanto tenemos $R/I = R/(A_0 : x) = R/(0 : x + A_0) \cong R(x + A_0) \cong Rx + A_0/A_0 \leq B/A_0 \in \sigma$; como σ es cerrada bajo submódulos, podemos concluir que $R/I \in \sigma$.

Definimos ahora $h : I \to E$ por $h(r) = g_0(rx)$; por hipótesis existe $h' : R \to E$ que extiende a h. Sea $A_1 = A_0 + rx$ y $g_1 : A_1 \to E$ dada por $g_1(a_0 + rx) = g_o(a_0) + rh'(1)$, con

$r \in R$, la cual está bien definida y extiende a g_0. Entonces $(A_1, g_1) \in \mathcal{C}$ y $(A_0, g_0) \leq (A_1, g_1)$, lo que es una contradicción pues (A_0, g_0) es máximo en $\mathcal{C}$, por lo tanto $A_0 = B$ y así E es σ-inyectivo. ■

Es interesante mencionar que la demostración del lema de Baer relativo a clases aditivas es una adaptación de la prueba clásica y solo requirió que la clase fuese cerrada bajo submódulos y bajo cocientes.

Al igual que en el caso de clases de torsión hereditaria, la siguiente proposición da un criterio de σ-inyectividad para un R-módulo izquierdo M.

Teorema 3.2.3. *Sea σ una clase aditiva. Un R-módulo izquierdo M es σ-inyectivo si y solo si $t_\sigma(E(M)/M) = 0$.*

Prueba. Supongamos que M es σ-inyectivo y sea $x + M \in t_\sigma(E(M)/M)$, es decir, $x + M \in E(M)/M$ es tal que $R(x + M) \in \sigma$. Basta probar que $x \in M$.

Definimos $f : (M : x) \to M$ por $f(r) = rx$ y consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & M & & & \\
0 \arrow[r] & (M : x) \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[r] & R/(M : x) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Nótese que $R/(M : x) \cong R/(0 : x + M) \cong R(x + M) \in \sigma$.

Como M es σ-inyectivo, existe $g : R \to M$ tal que $g \circ i = f$. Sea $g(1) = z \in M$; afirmamos que $(M : x)(x - z) = 0$ puesto que $(M : x)(x) = f((M : x)) = g((M : x)) = g((M : x) \cdot 1) = (M : x)g(1) = (M : x)(z)$.

Más aún $R(x - z) \cap M = (M : x)(x - z)$, ya que si $r \in R$, $r(x - z) \in M$, entonces $rx - rz \in M$, pero $rz \in M$, lo que implica que $rx \in M$, por lo tanto $r \in (M : x)$ y así $R(x - z) \cap M = (M : x)(x - z) = 0$; por lo tanto $R(x - z) \cap M \subseteq (M : x)(x - z)$. La otra contención es clara.

Puesto que M es esencial en $E(M)$, tenemos que $R(x - z) = 0$, en particular $1(x - z) = 0$, es decir, $x = z \in M$.

Recíprocamente, supongamos que $t_\sigma(E(M)/M) = 0$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, hook] & E(M) & & \\
0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[u, dashed, "g"'] \arrow[r] & R/I \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $R/I \in \sigma$.

Entonces existe $g : R \to E(M)$ por ser $E(M)$ inyectivo. Sea $g(1) = x \in E(M)$. Basta demostrar que $R/(M : x) \cong R(x + M) \in \sigma$, pues de ser así $x + M \in t_\sigma(E(M)/M)$ y como

$t_\sigma(E(M)/M) = 0$ entonces $g(1) = x \in M$, lo que nos dice que $g : R \to M$ y por lo tanto M es σ-inyectivo.

Tomemos $r \in I$, entonces $rx = rg(1) = g(r) = f(r) \in M$, por lo tanto $I \leq (M : x)$, lo que implica que existe un epimorfismo $p : R/I \to R/(M : x)$; como σ es cerrada bajo cocientes, tenemos que $R/(M : x) \in \sigma$. ■

A continuación mostramos un ejemplo de un R-módulo que es σ-inyectivo pero no es inyectivo.

Ejemplo 3.2.4. *Sean $R = \mathbb{Z}$ y σ la clase aditiva de todos los submódulos isomorfos a una suma finita de copias de $\mathbb{Z}_p$, donde p es un primo.*

Sabemos que $\mathbb{Z}_p$ no es inyectivo pues $E(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$, entonces si tomamos el cociente $\mathbb{Z}_{p^\infty}/\mathbb{Z}_p$ tenemos que $t_\sigma(\mathbb{Z}_p^\infty/\mathbb{Z}_p) = 0$, ya que los cíclicos $\mathbb{Z}_p^\infty/\mathbb{Z}_p$ que están en σ son sumas directas finitas isomorfas a $\mathbb{Z}_p$, lo cual es cero pues se los quitamos en el cociente y por el teorema anterior tenemos que $\mathbb{Z}_p$ es σ-inyectivo y no inyectivo.

Las siguientes propiedades de módulos σ-inyectivos son similares a las correspondientes del caso estándar vistos en el primer capítulo.

Proposición 3.2.5. *Sean $\{M_j\}_{j\in J}$ una familia de módulos σ-inyectivos, entonces $\prod\limits_{j\in J} M_j$ es σ-inyectivo.*

Prueba. Consideremos el siguiente diagrama donde $B/A \in \sigma$, para cada M_j:

$$\begin{tikzcd}
 & \prod M_j \arrow[r, shift left, "\pi_j"] & M_j \arrow[l, shift left, "\lambda_j"] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[u, dashed, "g_j"']
\end{tikzcd}$$

Sean λ_j las inclusiones y π_j las proyecciones de $\prod\limits_{j\in J} M_j$, con $j \in J$. Puesto que cada M_j es σ-inyectivo, existe $g_j : B \to M_j$ tal que $g_j \circ i = \pi_j \circ f$. Ahora definimos $h : B \to \prod M_j$ dada por $h(b) = (g_j(b))$, con $j \in J$, y así tenemos que $(h \circ i)(a) = ((g_j \circ i)(a)) = ((\pi_j \circ f)(a)) = f(a)$, entonces $\prod\limits_{j\in J} M_j$ es σ-inyectivo. ■

Corolario 3.2.6. *La suma directa finita de módulos σ-inyectivos es σ-inyectiva.*

Prueba. Es un caso particular de la proposición anterior. ■

Proposición 3.2.7. *Todo sumando directo de un módulo σ-inyectivo es σ-inyectivo.*

Prueba. Sea M un módulo σ-inyectivo y D un sumando directo de M, entonces podemos construir el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[r, shift left, "\lambda"] & M \arrow[l, shift left, "\pi"] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[u, dashed, "g"'] \arrow[r] & B/A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $B/A \in \sigma$, λ es la inclusión y π es la proyección natural.

Como M es σ-inyectivo, existe $g : B \to M$ tal que $(g \circ i)(a) = (\lambda \circ f)(a)$, para toda $a \in A$. Definimos $h : B \to D$ por $h(b) = (\pi \circ g)(b)$, entonces tenemos que $(h \circ i)(a) = (\pi \circ g \circ i)(a) = (\pi \circ \lambda \circ f)(a) = f(a)$, para toda $a \in A$, por lo tanto D es σ-inyectivo. ■

Es importante mencionar que en las clases aditivas no tenemos cápsula σ-inyectiva, debido a que se necesita que la clase sea cerrada bajo sumas directas arbitrarias; en el caso de las clase aditivas, solo se cumple que la clase es cerrada bajo sumas directas finitas.

3.3. Módulos σ-Noetherianos

Hasta este punto hemos demostrado que el producto de módulos σ-inyectivos es σ-inyectivo, pero ahora nos interesa saber bajo qué condiciones la suma directa de módulos σ-inyectivos es σ-inyectivo; para ello, primero daremos unas definiciones que nos van a servir para poder dar dichas condiciones.

Definición 3.3.1. *Diremos que un anillo R cumple la* ***condición de cadena ascendente en ideales izquierdos σ-densos*** *(*CCA*) si para cada cadena ascendente de ideales izquierdos de R, $I_1 \leq I_2 \leq I_3 \leq \cdots$, tal que $I_j \in \mathcal{L}_\sigma$, para toda $j \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \cdots$.*

Definición 3.3.2. *Diremos que Un anillo R es* ***σ-Noetheriano*** *si para cada cadena ascendente de ideales izquierdos de R, $I_1 \leq I_2 \leq I_3 \leq \cdots$, tales que $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \in \mathcal{L}_\sigma$, entonces $I_n \in \mathcal{L}_\sigma$, para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Proposición 3.3.3. *Sean $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia numerable de módulos σ-inyectivos y $E = \bigoplus_{\alpha \in A} E_\alpha$; si R es σ-Noetheriano y cumple* CCA *en σ-densos, entonces E es σ-inyectivo.*

Prueba. Consideremos el diagrama tal que $R/I \in \sigma$:

$$\begin{tikzcd} & E & & & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & R \arrow[r] & R/I \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Denotemos por π_α la proyección de E en E_α, y sea $B = \{\alpha \in A : (\pi_\alpha \circ f)(I) \neq 0\} \subseteq A$. Veamos que B es finito. Supongamos lo contrario, es decir, B es infinito, entonces podemos escoger un subconjunto infinito $C = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ de B.

Consideremos $I_k = f^{-1}(\bigoplus_{\alpha \in (A-C)\cup\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\}} E_\alpha)$ ideales izquierdos de R, para toda k, entonces la cadena estrictamente ascendente de ideales izquierdos:

$$I_1 = f^{-1}(\bigoplus_{\alpha \in (A-C)\cup\{\alpha_1\}} E_\alpha) < I_2 = f^{-1}(\bigoplus_{\alpha \in (A-C)\cup\{\alpha_1,\alpha_2\}} E_\alpha) < \cdots$$

$$\cdots < I_k = f^{-1}(\bigoplus_{\alpha \in (A-C)\cup\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\}} E_\alpha) < \cdots,$$

es tal que $\bigcup I_k = I$; pero $R/I \in \sigma$ y R es σ-Noetheriano, esto es, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $R/I_{k_0} \in \sigma$, lo que da una cadena ascendente de ideales $I_{k_0} \leq I_{k_0+1} \leq I_{k_0+2} \leq \cdots$; tomando el epimorfismo $R/I_{k_0} \to R/I_{k_0+1}$ vemos que $R/I_{k_0+1} \in \sigma$, pues σ es cerrada bajo cocientes, por lo tanto, procediendo de manera similar, concluimos que los ideales de la cadena ascendente son σ-densos.

Como σ cumple CCA en σ densos, entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $I_r = I_{r+1} = I_{r+2} = \cdots$, lo que contradice la cadena estrictamente de ideales izquierdos, por lo tanto B es finito y consecuentemente, por 3.2.6, $\bigoplus_{\alpha \in B} E_\alpha$ es σ-inyectivo. Por lo tanto existe $g : R \to \bigoplus_{\alpha \in B} E_\alpha \leq E$ que extiende a f, con $R/I \in \sigma$, lo que nos permite concluir que E es σ-inyectivo. ∎

Proposición 3.3.4. *Sea R tal que la suma directa numerable de módulos σ-inyectivos es σ-inyectiva. Entonces R es σ-Noetheriano y satisface* CCA *en σ-densos.*

Prueba. Sean $I_1 \leq I_2 \leq \cdots$ una cadena ascendente numerable de ideales izquierdos tales que $R/I \in \sigma$, donde $I = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ y E_k σ-inyectivo tal que $R/I_k \leq E_k$ (podemos tomar la cápsula inyectiva de R/I_k, la cual es un módulo σ-inyectivo). Consideremos $E = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} E_k$ y $f : I \to E$ dada por $f(x) = (x + I_k)_{k=1}^{\infty}$; f esta bien definida pues si $x \in I$, entonces $x \in I_{k_0}$, para algún k_0, por lo tanto $x + I_k = 0$ para toda $k > k_0$.

Por hipótesis, E es σ-inyectivo y por lo tanto existe $g : R \to E$ tal que $g|_I = f$; sea $g(1) \in E$ y k_1 el mayor índice tal que $\pi_{k_1}(g(1)) \neq 0$.

Afirmamos que $I = I_{k_1}$. Supongamos que no; entonces existe $0 \neq y \in I - I_{k_1}$; como $y \notin I_{k_1}$, existe $k_1 \leq k_2$ tal que $\pi_{k_2}(f(y)) \neq 0$, por ende tenemos que:

$$0 \neq \pi_{k_2}(f(y)) = \pi_{k_2}(g(y)) = \pi_{k_2}(yg(1)) = y(\pi_{k_2}(g(1))),$$

es decir, $\pi_{k_2}(g(1)) \neq 0$, lo que contradice que k_1 es máximo, por lo tanto $I = I_{k_1}$ y $R/I_{k_1} = R/I \in \sigma$, en consecuencia R es σ-Noetheriano.

Ahora sean $J_i \leq J_2 \leq J_3 \leq \cdots$ una cadena de ideales izquierdos σ-densos y $J = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$; como existe un epimorfismo $p : R/J_i \to R/J$ y σ es cerrada bajo cocientes, entonces $R/J \in \sigma$. Procediendo análogamente a lo anterior, existe $J_{k_1} = J$, por lo tanto $J_{k_1} = J_{k_1+1} = J_{k_1+2} = \cdots$ y así la cadena se estaciona. ■

Conclusiones

El objetivo de este trabajo consistió en dar algunas relativizaciones del concepto de inyectividad relativa a clases de módulos. Vimos que se sigue cumpliendo el lema de Baer cuando la clase es una clase de pretorsión hereditaria ó una clase aditiva σ; también se cumplen las propiedades tales como que producto directo de módulos σ-inyectivos es un módulo σ-inyectivo, todo sumando directo de un módulo σ-inyectivo es σ-inyectivo y que bajo ciertas condiciones del anillo se tiene que la suma directa arbitraria de módulos σ-inyectivos es σ-inyectiva. Además, con respecto a una clase aditiva, se logró dar un criterio de σ-inyectividad utilizando el prerradical t_σ.

Cabe aquí puntualizar que no se pudo relativizar el concepto de cápsula inyectiva relativa a clases aditivas. No obstante queda la pregunta sobre cuales son las condiciones mínimas necesarias para recuperar este concepto. De igual forma nos podemos preguntar qué condiciones son necesarias para asegurar que todo módulo es σ-inyectivo, como en el caso de la teoría clásica, donde todo módulo es inyectivo si el anillo es semisimple.

Bibliografía

[Rot] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, Inc., New York, 1979.

[And] Frank W. Anderson, Kent R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Second Edition, Springer-Verlag, , New York, 1992.

[Tep] Mark L. Teply, *Finiteness Conditions on Torsion Theories*, Departamento de Algebra y Fundamentos, Universidad de Granada, Núm. 1-1984.

[Smith-Wisb] Nguyen Viet Dung, Dinh Van Huynh, Patrick F. Smith, Robert Wisbauer, *Extending Modules*, Longman Scientific and Technical, United States, 1994.

[Wisb] Robert Wisbauer, *Foundations Of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers Reading, University of Düsseldorf, 1991.

[Ati] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[Criv] Crivei, I., Crivei, S., *Associated Classes of Modules*, Studia Univ. "Babes-Bolyai", Mathematica, 54(2)(2009), p. 23-32.

[Dau1] Dauns, J., *Direct Sums and Subdirect Products*, Methods in Module Theory, Pure and Applied Mathematics 140, Marcel Dekker, 1992.

[Dau2] Dauns, J., *Modules and Rings*, Cambridge University Press, 1994.

[Dau3] Dauns, J., Zhou, Y., *Classes of modules*, Chapman Hall/CRC, 2006.

[Dick] Dickson, S., *A torsion theory for abelian categories*, Transactions of the American Mathematical Society 121(1) (1966), p. 223-235.

[Gol1] Golan, J. S., *Torsion Theories*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 29, Longman Scientific and Technical, 1986.

[Gol2] Golan, J. S., *Localization of Noncommutative Rings*, Pure and Applied Mathematics 30, Marcel Dekker, 1975.

[Kas] Kashu, A. I., *Closed Classes of left A-Modules and Closed Sets of left Ideals of Ring A*, Matematicheskie Zametki, 5(3) (1969), p. 381-390.

[Lam] Lam, T. Y., *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts in Mathematics 189, Springer-Verlag New York, 1999.

[Leo] Leonard, W. W., *Small modules*, Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1966), p. 527- 531.

[Zhou] Page, S., Zhou, Y., *On Direct Sums of Injective Modules and Chain Conditions*, Can. J. Math. 46(3) (1994), p. 634-647.

[Rag-Rin] Raggi, F., Rincón, H., Signoret, C., *On some classes of R-modules and congruences in R-tors*, Comm. Algebra, 27(2) (1999), p. 889-901.

[Rag-Sig1] Raggi, F., Signoret, C., *Serre Subcategories of R-Mod*, Comm. Algebra, 24(9) (1996), p. 2877-2886.

[Rag-Sig2] Raggi, F., Signoret, C., *Serre Subcategories and Linear Filters*, Kyungpook Mathematical Journal, 38(2) (1998), p. 411-419.

[Smi] Smith, P. F., *Modules with many direct summands*, Osaka J. Math. 27 (1990), p. 253-264.

[Sten] Stenström, B., *Rings of Quotients*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1975.

[Walk] Walker, C., Walker, E., *Quotient Categories and Rings of Quotients*, Rocky Mountain Journal of Math. 2(4) (1972).