UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Análisis de Ecuaciones de Evolución con métodos de Espacios de Hilbert

Tesis para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta

José Antonio Gallegos Urenda

Asesor

Dr. Juan Héctor Arredondo Ruiz.

México, D.F., 13 de Diciembre de 2013

Índice general

1. INTRODUCCIÓN

Una ecuación No Lineal de Schrödinger es un modelo no lineal que describe sistemas físicos. Este tipo de ecuaciones aparecen en hidrodinámica, óptica, acústica, condensados cuánticos, pulsos de calor en sólidos y en otros diversos fenómenos físicos.

La ecuación no lineal de Schrodinger tiene la propiedad de integrabilidad, es decir, permite utilizar la teoría de la dispersión inversa con el fin de resolverla. Este enfoque utiliza el sistema Zackarov-Shabbath, en el cual se lleva la ecuación a una ecuación de evolución ver [ZABŠ72].

La ecuación de Schrodinger no lineal fue investigada numéricamente por Karpman y Krushkal [KK69], Yajima y Outi [YO97], Satsuma y Yajima [SY74], Tappert [T81] y Hardin y Tappert [HT73]. En estos dos últimos trabajos la ecuación NLS fue integrada por el método de Fourier split-step.

La noción de un conjunto regular, que aparece en este documento fue dada por Livsic en [Ls01]. Está estrechamente vinculado con el estudio de un par de operadores compactos de desplazamientos no autoadjuntos [Ls95] con partes imaginarias no nulas. Estos conceptos aparecieron por primera vez en [Ls78]. Los orígenes de esta teoría se encuentran en la obra fundamental de Livsic y Brodskii, donde se estudia la relación entre operadores no autoadjuntos y funciones meromorfas en la mitad del plano superior.

Este trabajo, cuenta con tres capítulos. En el primero se describen elementos de Espacios de Hilbert y de los Operadores Lineales en estos espacios.

El segundo capítulo se basa en el artículo [Melc], donde se muestra el desarrollo de la teoría de conjuntos regulares $\mathfrak{V}_{NLS}$ para demostrar la existencia de la solución a la ecuación de evolución no lineal de Schrödinger. Así mismo se muestra la construcción de un ejemplo para $\beta(x,t)$ a partir de las condiciones de Vessel.

En el tercer capítulo se muestran algunos ejemplos explícitos y se obtiene una fórmula de inversión para un operador del conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$.

2. PRELIMINARES

2.1. Introducción a espacios de Hilbert

Definición 2.1.1. Sea X un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Una norma sobre $\mathbb{K}$ es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tal que para todos x e y en X y $\alpha \in \mathbb{K}$,

1. $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$,

2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Teorema 2.1.2. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{K}$. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sucesiones en X que convergen a $x, y \in X$ respectivamente y sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión en $\mathbb{K}$ que converge a $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces:*

1. $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$,

2. $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$,

3. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$,

4. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = \alpha x$

Demostración:

1. Por la desigualdad del triangulo, $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x + y\| + \|y\|$ y también

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Intercambiando x y y se obtiene $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$. Como $\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\|$, se obtiene

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Por lo tanto $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

2. Dado que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $|\|x\| - \|x_n\|| \leq \|x - x_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

3. Debido a que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, y

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

4. Se tiene que la sucesión $\{\alpha_n\}$ es convergente por lo tanto es acotada, así existe una constante $C > 0$ tal que $|\alpha_n| \leq C$ para toda $n \in \mathbb{N}$. También,

$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n - \alpha x\| &= \|\alpha_n(x_n - x) + (\alpha_n - \alpha)x\| \\ &\leq |\alpha_n|\|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha|\|x\| \\ &\leq C\|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha|\|x\|,\end{aligned}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = \alpha x$.

Definición 2.1.3. Un espacio vectorial normado X se dice que es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente a un elemento en X. Es decir que si $\|x_m - x_n\| \to 0$ cuando $m, n \to \infty$, entonces existe un $x \in X$ tal que $\|x_n - x\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Un espacio vectorial normado completo es llamado **espacio de Banach**.

Definición 2.1.4. Un *producto escalar* sobre un espacio vectorial V es una función $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{K}$ tal que para cualesquiera $x, y, z \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

(a) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0$ si y solo si $x = 0$,

(b) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$,

(c) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

De (b) y (c) se sigue que para cada $x \in V$, la función $y \mapsto (x, y)$ es conjugada lineal , i.e., $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y)$.

Ejemplo 2.1.5. Considérese el espacio l_2 que consiste de todas las sucesiones complejas $x = \{x_n\}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ es convergente.

Defínase el producto escalar en l_2, como sigue. Si $x = \{x_n\}$ y $y = \{y_n\}$ están en l_2, entonces

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y_n}$$

Primero se mostrará que el producto escalar esta bien definido. Para esto se prueba que el producto escalar es una serie convergente que tiene como suma un número complejo.

Por la desigualdad de Cauchy, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |x_i \bar{y_i}| &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Dado que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2$ son convergentes, la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i \bar{y_i}|$ es una sucesión monótona decreciente acotada por arriba.

De esta manera, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \bar{y_n}|$ es convergente. Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y_n}$ es absolutamente convergente, la cual tiene como suma un número complejo.

Con lo cual se concluye que la serie que define al producto escalar es convergente, así el producto escalar está bien definido. Las propiedades del producto escalar se siguen fácilmente.

Teorema 2.1.6. *Si $V, (\cdot, \cdot)$ es un espacio con producto escalar, entonces*

(a) $|(x, y)| \leq \|(x, x)\| \, \|(y, y)\|, \qquad x, y \in V$,

(b) $\|x\| \equiv (x, x)^{1/2}$ *define una norma* $\| \cdot \|$ *sobre* V *para la cual*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) , \qquad x, y \in V \ , \ y$$

(c) el producto escalar es contínuo de $V \times V$ en $\mathbb{K}$.

Demostración:
(a) Si $y = 0$, $||y|| = 0$ y por lo tanto $|(x, y)| = 0$, de esta manera ambos lados de la desigualdad se anulan y por tanto es verdadera la desigualdad. Por lo cual asúmase que $y \neq 0$ y tómese

cualquier escalar $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces se tiene que

$$0 \leq ||x - \lambda y||^2 = (x - \lambda y, x - \lambda y).$$

Pero

$$\begin{aligned}(x - \lambda y, x - \lambda y) &= (x, x) - (x - \lambda y) - (\lambda y, x)(\lambda y, \lambda y) \\ &= (x, x) - \bar{\lambda}(x, y) - \lambda(x, y) + \lambda\bar{\lambda}(x, y) \\ &= ||x||^2 - \lambda(y, x) - \bar{\lambda}(x, y) + |\lambda|^2||y||^2.\end{aligned}$$

Por lo tanto se obtiene que $||x||^2 - \lambda(y, x) - \bar{\lambda}(x, y) + |\lambda|^2||y||^2 \geq 0$.

Como $y \neq 0$. Elijamos $\lambda = \frac{(x,y)}{||y||^2}$ y usando $(y, x) = \overline{(x, y)}$.

Se calcula que,

$$||x||^2 - \frac{(x, y)\overline{(x, y)}}{||y||^2} - \frac{\overline{(x, y)}(x, y)}{||y||^4}||y||^2 \geq 0,$$

lo cual muestra, $||x||^2 - \frac{|(x,y)|^2}{||y||^2} \geq 0$, de donde se obtiene que

$$|(x, y)| \leq ||(x, x)||\ ||(y, y)||$$

(b) Utilizando (a) se tiene que:

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2Re((x, y)) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2||x||||y)|| + \|y\| \\ &= (||x||^2 + ||y||^2)^2.\end{aligned}$$

Los axiomas de norma restantes se siguen fácilmente de las propiedades de producto escalar. Ahora, para probar la identidad del paralelogramo se calcula que:

para cualquiera $x, y \in V$, se obtiene que

$$\begin{aligned}||x + y||^2 &= (x + y, x + y) \\ &= (x, x + y) + (y, x + y) \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &= ||x||^2 + (x, y) + (y, x) + ||y||^2\end{aligned}$$

Similarmente $||x - y|| = ||x||^2 - (x, y) - (y, x) + ||y||^2$, entonces sumando los dos resultados anteriores se tiene $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.

(c) Calculamos que

$$\begin{aligned}
|(x_n, y_n)| - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| \\
&= |(x, y_n - y) + (x_n - x, y)| \\
&\leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)|.
\end{aligned}$$

Por (a), se tiene $|(x_n, y_n - y)| \leq ||x_n||\,||y_n - y||$
y $|(x_n - x, y)| \leq ||x_n - x||\,||y||$.

Entonces se obtiene que

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \leq ||x_n||\,||y_n - y|| + ||(x_n - x)||\,||y||.$$

Dado que $x_n \to x$ y $y_n \to y$, $||x_n - x|| \to 0$ y $||y_n - y|| \to 0$.

Además como $\{x_n\}$ es una sucesión convergente, está es acotada, entonces $||x_n|| \leq M$ para toda n y alguna constante M. Por lo tanto $(x_n, y_n) \to (x, y)$ cuando $n \to \infty$.
Es decir el producto escalar es continuo de $V \times V$ en $\mathbb{K}$. $\square$

Un **Espacio de Hilbert** es un espacio con producto escalar para el cual el correspondiente espacio normado es completo.

Ejemplos

Nótese que el ejemplo (2.1.5) es un espacio completo con producto escalar, ya que l_2 es un **espacio de Banach**.

(a) Defina $L^2[a, b]$ como el conjunto de funciones medibles a valores complejos en $[a, b]$, que satisfacen $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$. Definimos el producto escalar como

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

(b) El conjunto de todas las sucesiones $x = \{x_n\}$ tal que x_n es cero a partir de cierto n es un espacio con producto escalar no completo, el producto escalar es inducido por l_2. Por ejemplo la sucesión

$$x^{(n)} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots\right)$$

converge en l_2 pero su límite contiene términos no cero.

Definición 2.1.7. Sea $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con producto escalar $(\cdot,\cdot)$ y norma $||\cdot||$. Un operador A en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ se denomina operador de Hilbert-Schmidt si la traza de A^*A es finita. Es decir,

$$\operatorname{tr}(A^*A) := \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, A^*A\varphi_n) < \infty,$$

para alguna base ortonormal $\{\varphi_n\}$ de $\mathcal{H}$. Este conjunto será denotado por $\mathcal{HS}$.

2.2. *Ortogonalidad*

El producto escalar nos da una noción de ángulos entre los vectores. De la desigualdad de Cauchy-Schwarz para espacios con producto escalar real, tenemos que si x, y son vectores no cero, entonces

$$-1 \leq \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|} \leq 1,$$

y así el angulo entre x y y puede ser definido como

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}\right).$$

Definición 2.2.1. Sea V un espacio con producto escalar. Los vectores $x, y \in V$ son ortogonales si $(x,y) = 0$.

Definición 2.2.2. Sea V un espacio con producto escalar y sea M un subespacio de V. El *complemento ortogonal* de M es el conjunto

$$M^\perp = \left\{x \in V : (x,y) = 0 \text{ para todo } y \in M\right\}.$$

Lema 2.2.3. *$M^\perp$ es un subespacio cerrado de V y $M \cap M^\perp = \{0\}$.*

Demostración: Sean $y, z \in M^\perp$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x \in M$. Entonces

$$(\alpha y + \beta z, x) = \alpha(y,x) + \beta(z,x) = 0,$$

asi $\alpha y + \beta z \in M^{\perp}$, y por lo tanto $M^{\perp}$ es un subespacio lineal de V. Ahora, sea $\{x_n\}$ una sucesión en $M^{\perp}$ convergente a $x \in V$. Entonces para cualquier $y \in M$ se tiene

$$0 = \lim_{n\to\infty}(x - x_n, y) - \lim_{n\to\infty}(x_n, y) = (x, y)$$

(ya que $(x_n, y) = 0$, para toda n). Así, $x \in M^{\perp}$. Esto implica que $M^{\perp}$ es cerrado. Ahora, supongase que $x \in M \cap M^{\perp}$, entonces $(x, x) = 0$ y así $x = 0$, por lo que $M \cap M^{\perp} = \{0\}$. □

Un conjunto K en un espacio vectorial V es *convexo* si para $x, y \in K$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, se tiene $\alpha x + (1-\alpha)y \in K$. Es decir, si un par de vectores está en K, entonces también lo esta el segmento de línea que los une.

Teorema 2.2.4. *Un conjunto convexo no vacío S del espacio de Hilbert H tiene un elemento de norma mínima.*

Demostración:

Sea $d \equiv \inf\{\|x\| : x \in K\}$, se puede encontrar una sucesión $x_n \in K$ para la cual $\|x_n\| \to d$. Como K es convexo tenemos $(1/2)(x_n + x_m) \in K$ para $m, n \geq 1$. Por lo tanto usando la definición de d, se obtiene

$\|\frac{1}{2}(x_n + x_m)\|^2 \geq d$ lo cual da

$$\|x_m + x_n\| \geq 2d.$$

Del Teorema (2.1.6) (b) se obtiene que

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - \|x_m + x_n\|^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4d^2.$$

Ademas $\|x_n\|$, $\|x_m\| \to d$, cuando $n, m \to \infty$, entonces se tiene que $\|x_n - x_m\|^2 \to 0$ cuando $m, n \to \infty$.

Por lo tanto $\{x_n\}$ es de Cauchy. Debido a que S es un subespacio cerrado de un espacio completo, S es completo. Por lo tanto la sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ en S converge a un punto $x \in S$. Ahora como el producto escalar es continuo la norma también lo es, así se obtiene que $\|x\| = \|\lim_{n\to\infty} x_n\| = \lim \|x\| = d$. Así x es un vector de norma mínima.

Para probar la unicidad, sea $y \in S$ otro elemento con $\|y\| = d$. Entonces $(1/2)(x+y) \in S$ y el Teorema (2.1.6) (b) da,

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{2}(x+y)\|^2 &= 2\|\frac{x}{2}\| + 2\|\frac{y}{2}\| - \|\frac{1}{2}(x-y)\|^2 \\
&= \frac{d^2}{2} + \frac{d^2}{2} - \|\frac{1}{2}(x-y)\|^2 \\
&= d^2 - \|\frac{1}{2}(x-y)\|^2,
\end{aligned}$$

por lo tanto $\|\frac{1}{2}(x-y)\|^2 < d^2$, lo cual contradice la definición de d, ya que $\frac{1}{2}(x+y) \in S$. Por lo tanto $x \in S$ es único. $\square$

Teorema 2.2.5. *Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces $H = M \bigoplus M^\perp$*

Demostración: Como $M \cap M^\perp = \{0\}$, es suficiente mostrar que cada $x \in H$ puede ser expresado de manera única como $x = y + z$, donde $y \in M$ y $z \in M^\perp$. La unicidad se tiene ya que si $x = m_1 + n_1$ con $m_1 \in M$, $n_1 \in M^\perp$, entonces $m_1 - m = n - n_1 \in M \cap M^\perp = \{\theta\}$.

Para establecer la existencia de $y \in M$ y $z \in M^\perp$ tal que $x = y + z$, dado que $x \in H$, $x - M = \{x - m : m \in M\}$ es un conjunto no vacío convexo de H. Por lo tanto por el Teorema (2.2.4), existe un $z \in x - M$ tal que $\|z\| = \text{ínf}\{\|x'\| : x' \in x - M\}$.

Sea $y = x - z$. De la definición de M, $y \in M$ y $x = y + z$. Por lo que basta probar que $z \in M^\perp$. Como en el caso de la desigualdad de Cauchy- Schwarz para cualquier $w \in M$ y un número arbitrario complejo a,

$$(z - aw, z - aw) = \|z\|^2 - \bar{a}(z,w) - a(w,z) + |a|^2\|w\|^2.$$

Eligiendo $a = \frac{(z,w)}{\|w\|^2}$ en la ecuación anterior y simplificando, obtenemos

$$\|z - aw\|^2\|w\|^2 = \|z\|^2\|w\|^2 - |(z,w)|^2,$$

Así

$$|(z,w)|^2 = \|z\|^2\|w\|^2 - \|z - aw\|^2\|w\|^2. \tag{2.1}$$

Ahora $z - aw = x - y - aw \in x - M$. Dado que z tiene norma mínima, se obtiene que

$$\|z - aw\|^2 \geq \|z\|^2. \tag{2.2}$$

Usando (2.2) en (2.1), se calcula que $|(z,w)|^2 \leq \|w\|^2\|z\|^2 - \|z\|^2\|w\|^2 = 0$. Lo cual implica $(z,w) = 0$, es decir $z \in M^\perp$ así que $H = M \bigoplus M^\perp$, $\square$

Ejemplo 2.2.6. Considere el espacio de Hilbert $H = l_2$ con el producto escalar definido en (2.1.5).

Sea M el subespacio lineal de l_2 de todas las sucesiones que contiene solo una cantidad finita de términos distintos de cero. Entonces M es un subespacio de l_2, pero no es un subespacio cerrado como se puede ver enseguida.

Si $x = \{x_n\} \in l_2$ donde $x_n \neq 0$ para algún n, sea $x^{(1)} = (x_1, 0, 0, 0, \cdots)$ $x^{(2)} = (x_1, x_2, 0, 0, \cdots)$ $x^{(n)} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, 0, \cdots)$.

Entonces la sucesión $x^{(1)}, x^{2)}, \cdots, x^{(n)}, \cdots$ pertenece a M. Pero $x^{(n)} \to x$ cuando $n \to \infty$ en norma y $x \notin M$. Por lo tanto M no es un subespacio cerrado de l_2.

Se mostrará que $M^\perp = \{0\}$. Para esto sea $y = \{y_k\} \in M^\perp$, donde $y_k \neq 0$ para cualquier k y se probará que $y = \{0, 0, \cdots, 0, \cdots\}$. Dado un entero positivo k, se define $x_k = 0$ para todo $k \neq n$ y $x_n = 1$ para $k = n$. Entonces $\{x_n\} \in M$. Dado que $\{x_k\} \perp \{y_k\}$, se obtiene que

$$0 = (\{x_k\}, \{y_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y_k} = \bar{y_n}$$

De esto, se tiene que $y_n = 0$ para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, así que $\{y_n\} = \{0, 0, 0, \cdots\}$.

Dado que cualquier $y \in M^\perp$ es cero entonces $M^\perp = \{0\}$. Por lo tanto se ha probado que $M \oplus M \perp \neq l_2$. Así el Teorema (2.2.5) falla si M no es un subespacio lineal cerrado de H.

Definición 2.2.7. El espacio $\mathcal{L}(H, \mathbb{C})$ es llamado el **espacio dual** de H y se denota por H'. Los elementos de H' son llamados **funcionales lineales continuos**.

Definición 2.2.8. Sea f un funcional lineal en un espacio de Hilbert H, su norma en H' esta dada por

$$||f|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||f(x)||}{||x||}.$$

Teorema 2.2.9 (Riesz-Fréchet)**.** *Sean H un espacio de Hilbert y f un funcional arbitrario en H'. Entonces existe un único vector $y \in H$ tal que*

$$f(x) = (x, y)$$

para todo $x \in H$ *y además* $\|f\| = \|y\|$

Demostración:
(a) (Existencia). Sea $f(x) = 0$ para todo $x \in H$ entonces $y = 0$ por lo que se cumple el Teorema. Ahora, sea $f \neq 0$; como f es continua $\ker f$ es un subespacio cerrado de H y dado que $f \neq 0$, $\ker f \neq H$ entonces por Teorema (2.2.5) $(\ker f)^{\perp} \neq \{0\}$. Por lo tanto existe un $y_0 \neq 0 \in (\ker f)^{\perp}$. Definase para cualquier $x \in H$ arbitrario.

$$z = f(x)y_0 - f(y_0)x.$$

Ahora $f(z) = f(x)f(y_0) - f(y_0)f(x) = 0$. Esto implica que $z \in \ker f$. Notando que $y_0 \in (\ker f)^{\perp}$, se obtiene que

$$0 = (z, y_0) = ((f(x)y_0 - f(y_0)f(x))x, y_0) = f(x)(y_0, y_0) - f(y_0)(x, y_0).$$

Por lo que se calcula que

$$f(x)(y_0, y_0) - f(y_0)(x, y_0) = 0. \tag{2.3}$$

Nótese que $(y_0, y_0) = \|y_0\|^2 \neq 0$, de (2.3) se obtiene que,

$$f(x) = \left(\frac{f(y_0)}{\|y_0\|^2}\right)(x, y_0). \tag{2.4}$$

Se puede escribir (2.4) como

$$f(x) = \left(x, \frac{\overline{f(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0\right).$$

Ahora tomando $\frac{\overline{f(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0$ como y, se tiene establecido que existe un y tal que $f(x) = (x, y)$ para cualquier $x \in H$.

(b) (Unicidad) Supóngase que y no es único. Es decir, supóngase que para todo $x \in H$, existen y_1 y y_2 tales que $f(x) = (x, y_1) = (x, y_2)$.

Entonces $(x, y_1) - (x, y_2) = 0$ lo cual implica que $(x, y_1 - y_2) = 0$ para todo $x \in H$. Elijase a x como $y_1 - y_2$, así pues

$$(y_1 - y_2, y_1 - y_2) = \|y_1 - y_2\|^2 = 0.$$

Por lo tanto $y_1 - y_2 = 0$ así que $y_1 = y_2$ lo cual prueba que y es único.

(c) ($|f\| = \|y\|$). De la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Esto implica que $\sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|y\|$.

Usando la definición de la norma de f, se obtiene que $\|f\| \leq \|y\|$. Para probar la desigualdad inversa, tómese $x = y$ en $f(x) = (x, y)$, entonces se calcula que

$$\|y\|^2 = (y, y) = f(y) \leq \|f\|\|y\|.$$

Como $y \neq 0$, se obtiene que $\|y\| \leq \|f\|$.

Por lo tanto se tiene $\|f\| = \|y\|$. □

Ejemplo 2.2.10. Considérese el subespacio M de l_2 que contiene a todas las sucesiones finitas. Esto es el conjunto de todas las sucesiones escalares con términos cero después de un factor finito.

Este es un espacio con producto escalar no completo con el siguiente producto escalar

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \text{ para todo } x, y \in M$$

Ahora defínase $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ cuando $x = \{x_n\} \in M$. f es lineal y por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} |f(x)|^2 &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n}\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right) \\ &\leq \frac{\pi^2}{6}(x, x) = \frac{\pi^2}{6}||x||^2, \text{ ya que } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

de modo que f es un funcional lineal continuo en M.

Ahora se probará que no existe $y \in M$ tal que $f(x) = (x, y)$ para toda $x \in M$.

Tómese $x = e_n = \{0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots\}$ donde 1 se encuentra en la n-ésima posición. Usando la definición para f, se obtiene que $f(x) = \frac{1}{n}$. Supóngase que existe un $y \in M$ que satisface las condiciones del Teorema, entonces se tiene que

$$f(x) = (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} = \overline{y_n}$$

De esta manera el Teorema de Riesz-Fréchet es válido si y sólo si $y_n = \frac{1}{n} \neq 0$ para toda n.
Por lo tanto $y = \{y_n\} \notin M$.

Esto prueba que no existe $y \in M$ tal que $f(x) = (x, y)$. Por lo tanto la hipótesis de completitud de M no puede ser omitida.

2.3. Bases ortonomales

La sucesión $\{v_j\}$ de vectores en H es llamada *ortogonal* si $(v_i, v_j)_H = 0$ para cada par i, j con $i \neq j$. Sean $\{v_j\}$ una sucesión de vectores no cero y $u \in H$. Para cada j se definen los *coeficientes de Fourier* de u con respecto a v_j dada por $c_j = (u, v_j)_H / (v_j, v_j)_H$. Para cada $n \geq 1$ se sigue que $\sum_{j=1}^{n} c_j v_j$ es la proyección de u en el subespacio M_n generado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Esto se sigue del Teorema (2.2.5) notando que $u - \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$ es ortogonal para cada v_i, $1 \leq j \leq n$, por lo tanto, pertenece a $M_n^{\perp}$. Se llamará a la sucesión de vectores *ortonormal* si es ortogonal y si $(v_j, v_j)_H = 1$ para cada $j \geq 1$.

Teorema 2.3.1. *Sean $\{v_j\}$ una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H y $u \in H$. Los coeficientes de Fourier de u están dados por $c_j = (u, v_j)_H$ y satisfacen*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 \leq \|u\|^2 \ . \tag{2.5}$$

También se tiene que $u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j v_j$ si y solo si se cumple la igualdad en (2.5).

Demostración:
Sea $u_n \equiv \sum_{j=1}^{n} c_j v_j$, $n \geq 1$. Entonces $u - u_n \perp u_n$ así se tiene que

$$\|u\|^2 = \|u - u_n\|^2 + \|u_n\|^2 \ , \qquad n \geq 1 \ . \tag{2.6}$$

Pero $\|u_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2$, esto se tiene dado que el conjunto $\{v_i, \ldots, v_n\}$ es ortonormal, de este modo se obtiene que $\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \leq \|u\|^2$ para todo n, por lo tanto (2.5) se cumple. Se sigue de (2.6) que $\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\| - 0$ si, y solo si la igualdad se cumple en (2.5).

La desigualdad (2.5) es conocida como *desigualdad de Bessel* y la correspondiente igualdad es se llama *ecuación de Parseval*. La serie $\sum_{j=1}^{\infty} c_j v_j$ anterior es la *serie de Fourier* de u con respecto ala sucesión ortonormal $\{v_j\}$.

Teorema 2.3.2. *Sea $\{v_j\}$ una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H. Entonces cualquier elemento de H es igual a la suma de su serie de Fourier si, y solo si $\{v_j\}$ es un* base *para H, esto es, su respectivo espacio generado es denso en H.*

Demostración:
Supongase que $\{v_j\}$ es una base y sea $u \in H$. Para cualquier $\epsilon > 0$, existe un $n \geq 1$ para el cual el espacio lineal M generado por el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ contiene un elemento el cual se aproxima a u via ϵ. Esto es, $\inf\{\|u - w\| : w \in M\} < \epsilon$. si u_n esta dado como en la demostración del Teorema (2.3.1), entonces se tiene que $u - u_n \in M^{\perp}$. Por lo tanto, para cualquier $w \in M$ se calcula que

$$\|u - u_n\|^2 = (u - u_n, u - w)_H \leq \|u - u_n\| \, \|u - w\| \ ,$$

por lo tanto $u_n - w \in M$. Tomando el ínfimo sobre todo $w \in M$ se tiene que

$$\|u - u_n\| \leq \inf\{\|u - w\| : w \in M\} < \epsilon \ . \tag{2.7}$$

Así, $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. Lo implicación contrario se sigue fácilmente.

2.4. El adjunto de un operador

Teorema 2.4.1. *Sean V y W espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces existe un único operador $T^* \in \mathcal{L}(W, V)$ tal que*

$$(Tx, y) = (x, T^* y) \tag{2.8}$$

para todo $x \in V$ y todo $y \in W$

Demostración:
Sean $y \in W$ y $f : W \to \mathbb{K}$ definida por $f(x) = (Tx, y)$. Entonces f es una transformación lineal y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (2.1.6) (a) y la continuidad de T se tiene que

$$|f(x)| = |(Tx, y)| \leq \|Tx\| \|y\| \leq \|T\| \|x\| \|y\|.$$

Por lo tanto f es acotada y utilizando el Teorema de Riesz-Fréchet (2.2.9) existe una única $z \in V$ tal que $f(x) = (x, z)$ para todo $x \in V$. Defínase $T^*(y) = z$, así se tiene que T^* es una función de W a V tal que

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \tag{2.9}$$

para todo $x \in V$ y todo $y \in W$. Entonces T^* es una función la cual satisface la ecuación (2.8). Ahora, se mostrará que $T^* \in \mathcal{L}(W, V)$.

Sean $y_1, y_2 \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x \in V$. Entonces por (2.9),

$$\begin{aligned}
(x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)) &= (T(x), \alpha y_1 + \beta y_2) \\
&= \bar{\alpha}(T(x), y_1) + \bar{\beta}(T(x), y_2) \\
&= \bar{\alpha}(x, T^*(y_1)) + \bar{\beta}(x, T^*(y_2)) \\
&= (x, \alpha T^*(y_1) + \beta T^*(y_2)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)) = \alpha T^*(y_1) + \beta T^*(y_2)$, es decir T^* es una transformación lineal.

En seguida se obtendrá que T^* es acotado. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\|T^*(y)\|^2 = (T^*(y), T^*(y)) = (TT^*(y), y) \leq \|TT^*(y)\|\|y\| \leq \|T\|\|T^*(y)\|\|y\|.$$

Si $\|T^*(y)\| > 0$ entonces dividiendo la desigualdad anterior por $\|T^*(y)\|$, se obtiene que $\|T^*(y)\| \leq \|T\|\|y\|$. Mientras que si $\|T^*(y)\| = 0$ entonces trivialmente $\|T^*(y)\| \leq \|T\|\|y\|$. Por lo tanto para toda $y \in W$,

$$\|T^*(y)\| \leq \|T\|\|y\|$$

y asi T^* es acotada y $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Finalmente, se tendrá que T^* es única. Supongase que T_1^* y T_2^* están en $\mathcal{L}(W, V)$ y que para todo $x \in V$ y $y \in W$,

$$(Tx, y) = (x, T_1^* y) = (x, T_2^* y).$$

Por lo tanto $T_1^* y = T_2^* y$ para todo $y \in W$, lo que implica que $T_1^* = T_2^*$ y por lo tanto T^* es único □

Ejemplo 2.4.2. Sea M un subespacio de l_2 que consiste de todas las sucesiones reales, que cada una contiene solo un número finito de términos no cero. M es un espacio con producto escalar no completo con el mismo producto escalar que l_2 dado por

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

para cada $x \in M$, defínase

$$T(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}, 0, 0, \cdots \right)$$

Entonces para $x, y \in M$, se tiene que,

$$(Tx, y) = y_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}.$$

Ahora, sea $e_n = \{0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots\}$ donde 1 se encuentra en la n-ésima posición.

Entonces, se obtiene que

$$(Te_n, e_1) = 1 \cdot \sum \frac{e_n(j)}{j} = 1 \cdot \frac{1}{n}.$$

Se verá si existe un T^* el cual es el adjunto de T.

Ahora se tiene que $(e_n, T^*(e_1)) = T^*(e_1) \cdot e_n$ donde el lado derecho se obtiene del producto escalar. Ahora como $T^*(e_1) \in M$, $T^*(e_1) \cdot e_n$ no puede ser igual a $\frac{1}{n}$ para $n = 1, 2, 3, \cdots$.

Esto muestra que no existe T^* en M tal que

$$(T(e_n), e_1) = (e_n, T^*(e_1)).$$

Por lo tanto la completitud no se puede omitir en las hipótesis.

Definición 2.4.3. Si V y W son espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(V, W)$, el operador T^* construido en Teorema (2.4.1) es llamado el adjunto de T.

Definición 2.4.4. Si $A = [a_{i,j}] \in M_{mn}(\mathbb{K})$ entonces la matriz $[\overline{a_{i,j}}]$ es llamada el adjunto de A y denotado por A^*.

Ejemplo 2.4.5. Sea H un espacio de Hilbert. Si I es el operador identidad en H entonces $I^* = I$

Esto se prueba de la siguiente manera.

Si $x, y \in H$ entonces
$$(Ix, y) = (x, y) = (x, Iy).$$
Por lo tanto por la unicidad del adjunto $I^* = I$

Teorema 2.4.6. *Sean U, V y W espacios de Hilbert, considérese $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(U, V)$ y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces*

(a) $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \bar{\alpha} T_1^* + \bar{\beta} T_2^*$,

(b) $(T_1 T_2)^* = (T_2^* T_1^*)$.

Demostración:

(a) Para todo $x \in U$ y todo $y \in V$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
(x, (\alpha T_1 + \beta T_2)^* y) &= ((\alpha T_1 + \beta T_2) x, y) \\
&= (\alpha T_1 x, y) + (\beta T_2 x, y) \\
&= \alpha (T_1 x, y) + \beta (T_2 x, y) \\
&= \alpha (x, T_1^* y) + \beta (x, T_2^* y) \\
&= (x, \bar{\alpha}(T_1^* y)) + (x, \bar{\beta}(T_2^* y)) \\
&= (x, \bar{\alpha}(T_1^* y) + \bar{\beta}(T_2^* y)).
\end{aligned}$$

Entonces considerando la unicidad de el adjunto, se tiene que $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \bar{\alpha} T_1^* + \bar{\beta} T_2^*$.

(b) Para todo $x \in U$ y todo $y \in V$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(x, (T_1 T_2)^* y) &= ((T_1 T_2) x, y) \\
&= (T_1 (T_2 x), y) \\
&= (T_2 x, T_1^* y) \\
&= (x, (T_2^* T_1^*) y)
\end{aligned}$$

Por lo tanto utilizando la unicidad del adjunto, $(T_1 T_2)^* = (T_2^* T_1^*)$. □

Lema 2.4.7. *Si H es un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$ es invertible entonces T^* es invertible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Demostración:

Como $TT^{-1} = T^{-1}T = I$, si se calcula el adjunto de esta ecuación se obtiene que $(TT^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I^*$ entonces utilizando Teorema (2.4.6) y el Ejemplo (2.4.5) se tiene $(T^{-1})^*T^* = T^*(T^{-1})^* = I$. Por lo tanto T^* es invertible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. □

Definición 2.4.8. *Un operador T en un espacio de Hilbert H es llamado autoadjunto si $T = T^*$*

2.5. Analíticidad

Sea B un espacio de Banach y D una región en el plano complejo. Considérese $x : D \to B$ una función del plano complejo un espacio de Banach, dada por $\lambda \to x(\lambda)$.

Definición 2.5.1. *La función $x(\lambda)$ se dice que es analítica en D si para todo λ_0, el límite*

$$\frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$$

existe en el sentido de la norma de B

Este límite si existe es llamado la derivada de $x(\lambda)$ en λ_0.

Sea $f \in B'$. Entonces $f(x(\lambda))$ está bien definida como una función a valores complejos de una variable compleja. Si puede ser considerada como una función de D en D, se tiene que el siguiente teorema.

Teorema 2.5.2. *Si $x(\lambda)$ es una función analítica en D como una función vector-valuada, entonces $f(x(\lambda))$ es también una función analítica en D*

Demostración:
Para demostrar esto, se debe probar que $f(x(\lambda))$ posee derivadas en cada punto de D. Ahora como f es lineal y continua, tenemos, basta probar analiticidad en algún elemento de D. Ahora, se tiene que

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{f(x(\lambda)) - f(x(\lambda_0))}{\lambda - \lambda_0} = f\left(\frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right) = f(x'(\lambda_0)).$$

Esto prueba que $f(x)$ es analítica en D.

2.6. Operadores compactos

Definición 2.6.1. Un subconjunto A de un espacio lineal normado N se dice que es pre-compacto o relativamente compacto, si su clausura $\bar{A}$ es compacta.

Definición 2.6.2. Un operador lineal T de un espacio normado X en un espacio normado Y es llamado operador compacto si lleva conjunto cerrados de X en conjuntos precompactos en Y. Esto es $T : X \to Y$ es compacto si para cualquier conjunto acotado $B \subset X$, $\overline{T(B)}$ es compacto en Y.

De la definición anterior se tienen las siguientes propiedades.

1. Sea $T : X \to Y$ un operador compacto. Entonces T es un operador acotado (contínuo).

   Mostremos que T lleva conjuntos acotados en conjuntos acotados. Sea B un conjunto acotado en X. Como T es compacto, $\overline{T(B)}$ es compacto en Y.

   De esta manera $\overline{T(B)}$ es completo y totalmente acotado en Y. Ahora como un conjunto totalmente acotado siempre es acotado, $\overline{T(B)}$ es acotado.

   Como un subconjunto de un conjunto acotado también es acotado de esta forma $T(B)$ es acotado. Esto prueba que T es un operador lineal acotado y por lo tanto continuo.

2. Sea T un operador lineal en un espacio de dimensión finita X. Entonces T es un operador compacto.

   Dado que X tiene dimensión finita y T es lineal, $T(X)$ es de dimensión finita. Además cualquier operador lineal en un espacio de dimensión finita es acotado, $T(B)$ es un subconjunto acotado de $T(X)$ para cualquier $B \subset X$.

   Ahora si $T(B)$ es acotado, $\overline{T(B)}$ también es acotado y cerrado. Como $T(X)$ es de dimensión finita, cualquier cualquier conjunto cerrado y acotado de $T(X)$ es compacto.

   Por lo cual $\overline{T(B)}$ es compacto, y es un subconjunto cerrado y acotado de $T(X)$.

3. El operador 0 en cualquier espacio lineal normado X es compacto.

   Porque lleva cualquier conjunto acotado al conjunto $\{0\}$ cuya clausura es $\{0\}$ el cual es compacto.

4. Si la dimensión de un espacio X es infinita X, entonces el operador identidad $I : X \to Y$ no es un operador compacto.

Considérese la esfera cerrada unitaria $S = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$. Entonces S es acotada. Por otra parte X es de dimension infinita, $I(S) = S = \overline{S}$ no escompacto. Por lo tanto $I : X \to X$ no es un operador compacto.

Teorema 2.6.3. *Un conjunto A en un espacio normado X es precompacto si y solo si toda sucesión de puntos en A contiene una subsucesión convergente.*

Demostración:

Asúmase que A es precompacto. Dado que $A \subset \overline{A}$, cualquier sucesión en A es también una sucesión en $\overline{A}$. Ahora, como $\overline{A}$ es compacto tal sucesión en $\overline{A}$ contiene una subsucesión convergente. Por lo tanto toda sucesión en A tiene una subsucesión convergente.

Ahora considérese que toda sucesión en A contiene una subsucesión convergente y mostremos que $\overline{A}$ es compacto.

Sea $\{y_n\}$ una sucesión de puntos en $\overline{A}$. Puesto que A es denso en $\overline{A}$, existe una subsucesión de puntos $\{x_n\}$ en A tal que

$$||x_n - y_n|| \leq \frac{1}{n}.$$

Usando la hipótesis, se puede seleccionar una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que

$$x_{n_k} \to x \in \overline{A}.$$

Por lo tanto se encuentra una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ de $\{y_n\}$ tal que

$$\begin{aligned} ||y_{n_k} - x|| &= ||y_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} - x|| \\ &\leq ||y_{n_k} - x_{n_k}|| + ||x_{n_k} - x|| \to 0 \text{ cuando } k \to \infty. \end{aligned}$$

De esta manera $\overline{A}$ es compacto. □

Teorema 2.6.4. *Sean X y Y espacios lineales normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es un operador compacto si y solo si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ en X, la sucesión $\{Tx_n\}$ en Y tiene una subsucesión convergente.*

Demostración:

Sea $T : X \to Y$ un operador compacto y $\{x_n\}$ una sucesión acotada. Entonces $\{Tx_n\}$ en Y es precompacta. Por lo tanto por Teorema (2.6.3), $\{Tx_n\}$ tiene una subsucesión convergente.

Ahora, asúmase que cualquier sucesión acotada $\{x_n\}$ contiene una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$ tal que $\{Tx_{n_k}\}$ converge en Y. Sea $B \subset X$ cualquier conjunto acotado y $\{y_n\}$ cualquier sucesión en $T(B)$. Entonces $y_n = Tx_n$ para algúna x_n en B.

Puesto que B es acotado $\{x_n\} \subset B$ es también acotada. Por hipótesis $\{Tx_n\}$ contiene una subsucesión convergente. Por lo tanto por Teorema (2.6.3), $T(B)$ es precompacto. Por lo tanto T es un operador compacto. □

2.7. El espectro de un operador

Definición 2.7.1. 1. Sean H un espacio de Hilbert complejo, $I \in H'$ el operador identidad y $T \in H'$. El espectro de T, denotado por $spec(T)$ o $\sigma(T)$, esta definido como

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ es no invertible}\}.$$

2. Si A es una matriz cuadrada entonces el espectro de A, denotado por $\sigma(A)$, es

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ es no invertible}\}.$$

Ejemplo 2.7.2. Sean H un espacio de Hilbert y I el operador identidad en H. si z es cualquier número complejo entonces $\sigma(zI) = z$.
Esto se puede ver ya que si $w \in \mathbb{C}$ entonces wI es invertible menos en $w = 0$. Por lo que

$$\begin{aligned}
\sigma(zI) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : zI - \lambda I \text{ es no invertible}\} \\
&= \{\lambda \in \mathbb{C} : (z - \lambda)I \text{ es no invertible}\} \\
&= \{z\}.
\end{aligned}$$

2.8. Integración en espacios de Hilbert

Definición 2.8.1. *Sea f una función del intervalo cerrado $[a, b]$ a un espacio de Banach B, decimos que f es Integrable en el sentido de Riemann si y solo si*

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \quad \textit{converge,} \quad \textit{donde } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

En tal caso se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P|| \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Es decir $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $\forall ||P|| < \delta$ se tiene

$$\Big|\Big| \int_a^b f(x)dx - \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \Big|\Big|_B < \epsilon,$$

donde $\int_a^b f(x)dx \in B$ y P es una partición para $[a, b]$.

Teorema 2.8.2. *La integral de una función f entre a y b $(a < b)$ existe siempre que f sea continua en el intervalo cerrado $[a, b]$*

Demostración:

Considérese $S_n = \{x_o, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición para $[a, b]$, la fineza de la partición será medida mediante el máximo valor de los $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, la cual se denominará la "longitud" de S_n.

Una suma aproximada basada en la partición S_n se obtiene eligiendo un valor ξ_i en cada intervalo $[x_{i-}, x_i]$ y formando

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Se debe probar que para una sucesión de particiones S_n con longitud tendiendo a cero, las sumas F_n convergen hacia un límite que será igual a $\int_a^b f(x)dx$, y que el valor de este límite no depende de la partición y de puntos intermedios ξ_i.

Se compararan los valores de F_n y F_N correspondientes a las particiones S_n y S_N, donde la longitud de S_n es menor que δ y la partición S_N es un "refinamiento" de S_n; esto es, todos los puntos de la partición S_n se encuentran entre los de S_N.

Es decir se tiene

$$F_N = \sum_{j=1}^{N} f(\eta_j)\Delta_j,$$

donde y_i son los puntos de la partición de S_N, y $\Delta y_i = y_j - y_{j-1}$ y η_j está situado en el intervalo $[y_{j-}, y_j]$. Dos puntos x_{i-1} y x_i de la partición de S_n aparecen entre los valores y_j. Por ejemplo, $x_{i-1} = y_{r-1}$, $x_i = y_s$. En S_N el intervalo $[x_{s-1}, x_i]$ es cortado en intervalos, "$[y_{r-1}, y_r], [y_r, y_{r+1}], \ldots, [y_{s-1}, y_s]$", donde

$$\sum_{j=r}^{s} f(\eta_j)(y_j - y_{j-1})$$

es el aporte total a F_N. Se compara éste con el aporte a F_N del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, dado por $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, el cual puede ser escrito como

$$\sum_{j=r}^{s} f(\xi_j)(y_i - y_{j-1}),$$

y se encuentra que para la norma en el espacio de Banach B de la diferencia de los aportes

$$\begin{aligned}\Big|\Big|\sum_{j=r}^{s} \left(f(\eta_j) - f(\xi_j)\right)(y_j - y_{j-1})\Big|\Big|_B &\leq \sum_{j=r}^{s} \epsilon(y_j - y_{j-1}) \text{ por continuidad uniforme de } f \\ &= \epsilon(x_i - x_{i-1}).\end{aligned}$$

Por lo tanto, sumando las diferencias de los aportes a F_n y F_N para todos los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de S_n, se encuentra la estimación

$$||F_N - F_n||_B \leq \sum_{i=1}^{n} \epsilon(x_i - x_{i-1}) = \epsilon(b-a),$$

siempre que S_n tiene una longitud menor que $\delta(\epsilon)$ y S_N sea un refinamiento de S_n.

Ahora considérese S_n y S_m dos particiones cualesquiera de $[a, b]$ y sea S_N la partición formada por todos los puntos de las particiones S_n y S_m. Entonces, S_N será un refinamiento tanto de S_n como de S_m.

Supóngase que S_n y S_m poseen longitud menor que $\delta(\epsilon)$. Eligiendo cualesquiera puntos intermedios η_j de los intervalos de S_N para definir F_N, se encuentra

$$\begin{aligned}\|F_n - F_m\|_B &= \|(F_n - F_N) + (F_N - F_m)\|_B \\ &\leq \|F_n - F_m\|_B + \|F_m - F_N\_B| \\ &\leq 2\epsilon(b-a),\end{aligned}$$

para n y m suficientemente grandes. De esto se sigue que la sucesión F_n es una sucesión de Cauchy; consecuentemente

$$\lim_{n\to\infty} F_n = F$$

existe.

Queda por probar que el valor de $\lim_{n\to\infty} F_n$ no depende de las particiones y de los puntos intermedios.

Para esto sea $S_n^{'}$ denota cualquier otra sucesión de particiones cuyas longitudes tiende a cero, entonces la correspondiente $F_n^{'}$ posee un límite $F^{'}$. Ahora como

$$\|F_n^{'} - F_n\|_B < 2\epsilon(b-a)$$

siempre que las longitudes de S_n y $S_n^{'}$ sean menores que $\delta(\epsilon)$, de igual forma se tiene que para $n \to \infty$ $\|F - F^{'}\| \leq 2\epsilon(b-a)$. Además como ϵ es un número positivo arbitrario, se sigue que $F^{'} = F$.

Por lo tanto, el límite F, que se denota por $\int_a^b f(x)dx$, está determinado de manera única. $\square$

2.9. Integral exponencial

Definición 2.9.1. La función integral exponencial se define por la integral indefinida

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt$$

para todo $x \neq 0$. En $x = 0$ no esta definida.

Cuando el rango del integrando incluye $t = 0$, la integral es interpretada como el valor principal de Cauchy, es decir

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(Ei(-\epsilon) + \int_{\epsilon}^{x} \frac{e^t}{t} dt \right), \quad x > 0 \;\; \epsilon > 0.$$

Proposición 2.9.2. *Se tiene la siguiente igualdad*

$$\frac{d}{dx} Ei(bx + c) = \frac{e^{bx+c}}{x + (c/b)}, \quad \text{para } b \text{ y } c \text{ escalares con } b \neq 0$$

Demostración:

Se tiene que

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt = \int_{-\infty}^{c} \frac{e^t}{t} dt + \int_{c}^{x} \frac{e^t}{t} dt,$$

donde si "c" es negativa el integrando del primer factor no tiene singularidad en cero.

De tal forma que al derivar ambos lados respecto a x y utilizar el Teorema fundamental del cálculo, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt &= \frac{d}{dx} Ei(c) + \frac{d}{dx} \int_{c}^{x} \frac{e^t}{t} dt \\ &= \frac{e^x}{x}. \end{aligned}$$

Ahora si "c" es positiva se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t} dt &= \int_{-\infty}^{c} \frac{e^t}{t} dt + \int_{c}^{x} \frac{e^t}{t} dt \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{e^t}{t} dt + \int_{\epsilon}^{c} \frac{e^t}{t} dt \right) + \int_{c}^{x} \frac{e^t}{t} dt \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(- \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds + \int_{\epsilon}^{c} \frac{e^t}{t} dt + \int_{c}^{x} \frac{e^t}{t} dt \right) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(- \int_{\epsilon}^{c} \frac{e^{-s}}{s} ds - \int_{c}^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds + \int_{\epsilon}^{c} \frac{e^t}{t} dt + \int_{c}^{x} \frac{e^t}{t} dt \right) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{\epsilon}^{c} \frac{e^u - e^{-u}}{u} du - \int_{c}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_{c}^{x} \frac{e^u}{u} du \right) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{\epsilon}^{c} \frac{e^u - e^{-u}}{u} du \right) - \int_{c}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du + \int_{c}^{x} \frac{e^u}{u} du. \end{aligned}$$

Por lo tanto derivando ambos lados se tiene que

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt = \frac{d}{dx}\left(\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{\epsilon}^{c}\frac{e^u - e^{-u}}{u}du\right) - \int_{c}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du + \int_{c}^{x}\frac{e^u}{u}du\right)$$
$$= \frac{e^x}{x}.$$

De esta forma siguiendo los mismos pasos se prueba que

$$\frac{d}{dx}Ei(bx+c) = \frac{e^{bx+c}}{x+(c/b)}$$

□

2.10. Metodo del problema de dispersión inversa y su relación con ecuaciones de evolución

Definición 2.10.1. Una ecuación de evolución es una ecuación diferencial parcial para una función $u(x,t)$ de la forma

$$\partial u/\partial t = \hat{S}(u), \tag{2.10}$$

donde $\hat{S}(u)$ generalmente hablando es un operador diferencial no lineal en x.

Ejemplo 2.10.2. 1. La ecuación de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

2. La ecuación No Lineal de Schrödinger

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2|u|^2 u = 0$$

Un ejemplo es considerar una onda que viaja y en cierto momento choca con un objeto el cual es el dispersor, mediante los datos que se obtengan de la onda dispersada se buscara obtener información del dispersor.

En el problema inverso de la dispersión, se desconoce la forma del dispersor y mediante el conocimiento de las partículas incidentes y sus propiedades físicas (energía, momento lineal, espín, etc.) y mediante las medidas experimentales del comportamiento de las partículas dispersadas, se trata de obtener la máxima información posible sobre el dispersor.

El método del problema de dispersión inversa se aplica a ecuaciones de evolución (2.10), las cuales pueden ser asociadas a una ecuación de la forma

$$\partial L/\partial t = [L, A], \tag{2.11}$$

para algunos operadores diferenciales L y A que contienen a la función buscada $u(x,t)$. La expresión $[L,A] = LA - AL$ es el *conmutador* de L en A.

A (2.11) se le conoce como ecuación de movimiento de Heisenberg la cual describe la dinámica de un sistema por medio de la evolución temporal de los operadores (ver [DS13]).

Si una ecuación de evolución puede ser relacionada con una ecuación del tipo (2.11), entonces el espectro del operador $\hat{L}$ no depende del tiempo, y las características asintóticas de las funciones propias se pueden calcular fácilmente en cualquier instante de tiempo para sus valores iniciales. La reconstrucción de la función $u(x,t)$ en un instante arbitrario de tiempo se realiza resolviendo el problema inverso de la dispersión para el operador $\hat{L}$.

Por ejemplo, considérese la ecuación de evolución

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varkappa |u|^2 u = 0.$$

Se puede verificar que la esta ecuación se puede escribir en la forma (2.11), definiendo los operadores $\hat{L}$ y $\hat{A}$ como sigue

$$\hat{L} = i\begin{bmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1+p \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{bmatrix}, \quad \varkappa = \frac{2}{1+p},$$

$$\hat{A} = -p\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{bmatrix} |u|^2/(1+p) & iu_x^* \\ -iu_x & -|u|^2/(1-p) \end{bmatrix}.$$

2.11. Matrices de funciones racionales

Una matriz de función racional $W(z)$ es una matriz de tamaño $n \times n$ para la cual sus elementos son funciones racionales de variable compleja z.

Se presentan nociones que conciernen a la realización de matrices de funciones con entradas racionales de tamaño $n \times n$. Usualmente asúmase que las matrices de funciones racionales son regulares, es decir con determinante distinto de cero.

Considérese la matriz de función racional $W(z)$. Asumiendo que $W(z)$ es finita o infinita, es decir para cada entrada $\frac{p_{ij}(z)}{q_{ij}(z)}$ de $W(z)$,el grado del polinomio $p_{ij}(z)$ es menor o igual que el grado de $q_{ij}(z)$, defínase una *realización* de $W(z)$ como una representación de la forma

$$W(z) = D + C(zI_m - A)^{-1}B, \quad z \notin \sigma(A), \tag{2.12}$$

donde A, B, C, D son matrices de tamaños $m \times m$, $m \times n$, $n \times m$, $n \times n$, respectivamente. Observese que $\lim_{z\to\infty}(zI - A)^{-1} = 0$. (Para verificar esto, asumase que A esta en su forma de Jordan, o use la expansión en serie de Neumann.) Así necesariamente $D = W(\infty)$, y se puede identificar una realización (2.12) con la terna de matrices (A, B, C) (para $W(z)$). Las matrices de funciones racionales las cuales son finitas o infinitas son llamadas *proper*.

Teorema 2.11.1. *Cualquier matriz de función racional $W(z)$ de tamaño $n \times n$, la cual es finita o infinita admite una realización.*

Para su demostración ver [BGR90].

3. TEORÍA DE CONJUNTOS REGULARES EN RELACIÓN CON LA ECUACIÓN DE EVOLUCIÓN NLS

En esta parte se muestra una aplicación de la teoría desarrollada en los artículos [Melc], [Mela] y [Melb]. Este enfoque es similar al enfoque clásico de Zakharov-Shabat para la solución de la ecuación de evolución NLS, con la ventaja de que aparecen fórmulas más simples por medio de nuevas técnicas en la construcción de las soluciones a la ecuación NLS.

Las ecuaciones de evolución no lineales de Schrödinger juegan un papel especial en matemáticas y física. Un ejemplo es la siguiente EDP no lineal.

$$iy_t + y_{xx} + 2|y|^2 y = 0, \quad y(x,0) = \beta(x), \tag{3.1}$$

donde $y = y(x,t)$ es una función compleja de dos variables reales x, t y $y(x,0) = \beta(x)$ es la condición inicial, definida sobre un intervalo $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$.

Esta ecuación tiene la propiedad de integrabilidad, la cual permite utilizar la teoría de la dispersión inversa para resolverla. Existen varios enfoques numéricos para la obtención de soluciones, entre los que se puede mencionar el método split-step (Fourier).

SE va a presentar una generalización del método de Zakharov-Shabat [ZABŠ74] con la introducción de operadores asociados a la ecuación de evolución NLS.

Las técnicas que son indispensables para el desarrollo de esta metodología son las relacionadas a la teoría de operadores en espacios de Hilbert. Vale la pena señalar que uno puede también generalizar esta teoría a operadores no acotados (como se hizo en [Mela] para operadores de Sturm-Liuoville).

Se introducen los siguientes parámetros que son relevantes en el desarrollo del estudio de ecuaciones de evolución con esta metodología.

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definición 3.0.2. Un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$ es una colección de operadores y espacios:

$$\mathfrak{V}_{NLS} = (A, B(x), \mathbb{X}(x); \sigma_1, \sigma_2, \gamma, \gamma_*(x); \mathcal{H}, \mathbb{C}^2, \mathrm{I}), \tag{3.2}$$

donde $\sigma_1, \sigma_2, \gamma$ son los parámetros NLS, I es un intervalo cerrado. Los operadores $A, \mathbb{X} : I \to \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, $B : I \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^2, \mathcal{H})$ son acotados para $x \in \mathrm{I}$. El operador $\mathbb{X}(x)$ es invertible en I. Los operadores están sujetos a las condiciones Vessel o de desempacamiento:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}(B(x)) + AB(x)\sigma_2, && (3.3)\\ 0 &= A\mathbb{X}(x) + \mathbb{X}(x)A^* + B(x)B^*(x) && (3.4)\\ \frac{d}{dx}\mathbb{X}(x) &= B(x)\sigma_2 B^*(x) && (3.5)\\ \gamma_*(x) &:= \sigma_2 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x) - B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_2, && (3.6)\\ \mathbb{X}^*(x) &= \mathbb{X}(x), && (3.7) \end{aligned}$$

Una ecuación NLS Vessel es una ecuación de evolución NLS asociada a un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$.

Para cada ecuación NLS Vessel existen tres nociones, las cuales juegan un papel esencial en el desarrollo del método.

Definición 3.0.3. Para un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$ se definen la función de **transferencia** $S(\lambda, x)$, la función **tau** $\tau(x)$ y la función **beta** $\beta(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} S(\lambda, x) &= I - B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)(\lambda I - A)^{-1}B(x), && (3.8)\\ \tau(x) &= \det\left(\mathbb{X}^{-1}(x_0)\mathbb{X}(x)\right), && (3.9)\\ \beta(x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \gamma_*(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. && (3.10) \end{aligned}$$

En la definición (3.9) la función tau esta determinada por el determinante de la matriz $\mathbb{X}^{-1}(x_0)\mathbb{X}(x)$, para x_0 fijo, en la siguiente subsección (3.0.1) se mostrará que esta función esta bien definida.

Ademas la definición de $\beta(x)$ puede ser considerada como excesiva, porque de hecho, usando (3.6), la matriz(función) $\gamma_*(x)$ satisface

$$\gamma_*(x) = \begin{bmatrix} 0 & \beta(x) \\ -\beta^*(x) & 0 \end{bmatrix},$$

Aún así, se van a utilizar estas dos nociones ampliamente, por lo que se han definido ambas. Nótese que $S(\lambda, x)$ es de 2×2, cuyos polos y singularidades con respecto a λ están determinadas solo por el operador A ya que $S(\lambda, x)$ tiene el factor $(\lambda I - A)^{-1}$.

Ahora dado que los operadores involucrados en la definición de $S(\lambda, x)$ son todos acotados, se puede asegurar que $S(\lambda, x)$ es analítica en λ para todo $x \in \mathrm{I}$. Esto da como resultado, que se pude calcular su serie de Taylor

$$S(\lambda, x) = I - B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)(\lambda I - A)^{-1}B(x)\sigma_1 = I - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{H_i(x)}{\lambda^{i+1}}\sigma_1,$$

la cual es convergente al menos para $\lambda > \|A\|$. Así defínase los momentos como sigue:

Definición 3.0.4. N-esimo momento de vessel $\mathfrak{V}_{NLS}$ es

$$H_n(x) = B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)A^n B(x).$$

3.0.1. La función de transferencia y la función tau de un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$

La función de transferencia $S(\lambda, x)$ lleva soluciones llamadas de *entrada* de la EDL con parámetro espectral λ:

$$[\lambda\sigma_2 - \sigma_1\frac{\partial}{\partial x} + \gamma]u(\lambda, x) = 0 \tag{3.11}$$

a soluciones de *salida* de la EDL con el mismo parámetro:

$$[\lambda\sigma_2 - \sigma_1\frac{\partial}{\partial x} + \gamma_*]y(\lambda, x) = 0, \tag{3.12}$$

donde $y(\lambda, x) = S(\lambda, x)u(\lambda)$ y sumando ambas expresiones se obtiene la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{\partial}{\partial x}S(\lambda, x) = \sigma_1^{-1}(\sigma_2\lambda + \gamma_*)S - S\sigma_1^{-1}(\sigma_2\lambda + \gamma). \tag{3.13}$$

Teorema 3.0.5. *Considérese un conjunto regular* $\mathfrak{V}_{NLS}$*, definido en* (3.2) *y que* $u(x,\lambda) = \begin{bmatrix} u_1(\lambda,x) \\ u_2(\lambda,x) \end{bmatrix}$ *es una solución a la EDL de entrada* (3.11)

$$\lambda\sigma_2 u(\lambda,x) - \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} u(\lambda,x) + \gamma u(\lambda,x) = 0,$$

entonces $y(\lambda,x) = S(\lambda,x)u(\lambda)$ *es solución a la EDL de salida* (3.12)*:*

$$\lambda\sigma_2 y(\lambda,x) - \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} y(\lambda,x) + \gamma_*(x) y(\lambda,x) = 0.$$

Demostración: Sustitúyase la expresión

$$y(\lambda,x) = S(\lambda,x)u(\lambda) = (I - B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)(\lambda I - A)^{-1}B(x)\sigma_1)u(\lambda,x)$$

en (3.12) para todo $\lambda \notin spec(A)$[1]. Denótese $G(\lambda,x) = B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)(\lambda I - A)^{-1}B(x)$, entonces para todo $x \in \mathrm{I}$ y $\lambda \notin spec(A)$

[1] ver sección 2.7

$$
\begin{aligned}
\lambda\sigma_2 y(\lambda,x) - \sigma_1\frac{\partial}{\partial x}y(\lambda,x) + \gamma_*(x)y(\lambda,x) &= \Big(\lambda\sigma_2\left[(I - G(\lambda,x)\sigma_1)u(\lambda,x)\right] \\
&\quad -\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}[(I - G(\lambda,x)\sigma_1)u(\lambda,x)] \\
&\quad +\gamma_*(x)(I - G(\lambda,x)\sigma_1 u)(\lambda,x)\Big) \\
&= \Big(\lambda\sigma_2 u(\lambda,x) - \lambda\sigma_2 G(\lambda,x)\sigma_1 u(\lambda,x) \\
&\quad -\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}u(\lambda,x) + \sigma_1\frac{\partial}{\partial x}[G(\lambda,x)]\sigma_1 u(\lambda,x) \\
&\quad -\sigma_1 G(\lambda,x)\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}u(\lambda,x) + \gamma_*(x)u(\lambda,x) \\
&\quad -\gamma_*(x)G(\lambda,x)\sigma_1 u(\lambda,x)\Big) \\
&= \Big(-\lambda\sigma_2 G(\lambda,x)\sigma_1 u(\lambda,x) \\
&\quad +\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}[G(\lambda,x)]\sigma_1 u(\lambda,x) \\
&\quad -\sigma_1 G(\lambda,x)\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}u(\lambda,x) \\
&\quad +(\gamma_*(x) - \gamma)u(\lambda,x) \\
&\quad -\gamma_*(x)G(\lambda,x)\sigma_1 u(\lambda,x)\Big), \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

donde para obtener (3.14) se uso (3.11).

Se va a diferenciar la expresión $\sigma_1 G(\lambda,x)\sigma_1$ usando las fórmulas (3.3) y (3.5):

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} G(\lambda, x)\sigma_1 &= \frac{\partial}{\partial x}\big(\sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)(\lambda I - A)^{-1}B(x)\sigma_1\big) \\
&= \Big(-\sigma_2 B^*(x)A^* - \gamma B^*(x))\mathbb{X}^{-1}(x)(\lambda I - A)^{-1}B(x)\sigma_1 \\
&\quad -\sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_2 G(\lambda, x)\sigma_1 \\
&\quad +\sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)(\lambda I - A)^{-1}(-AB(x)\sigma_2 - B(x)\gamma\Big) \\
&= \Big(-\sigma_2 B^*(x)A^*\mathbb{X}^{-1}(x)(\lambda I - A)^{-1}B(x)\sigma_1 - \gamma G(\lambda, x)\sigma_1 \\
&\quad -\sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_2 G(\lambda, x)\sigma_1 \\
&\quad -\sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)(\lambda I - A)^{-1}AB(x)\sigma_2 - \sigma_1 G(\lambda, x)\gamma\Big) \\
&= \Big(-\sigma_2 B^*(x)(-\mathbb{X}^{-1}(x)A \\
&\quad -\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x))(\lambda I - A)^{-1}B(x)\sigma_1 \\
&\quad -\gamma G(\lambda, x)\sigma_1 - \sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_2 G(\lambda, x)\sigma_1 \\
&\quad -\sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)(\lambda I - A)^{-1}AB(x)\sigma_2 - \sigma_1 G(\lambda, x)\gamma\Big) \qquad (3.15) \\
&= \Big(\sigma_2 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)(A \pm \lambda I)(\lambda I - A)^{-1}B(x)\sigma_1 \\
&\quad +\sigma_2 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_1 G(\lambda, x)\sigma_1 \\
&\quad -\gamma G(\lambda, x)\sigma_1 - \sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_2 G(\lambda, x)\sigma_1 \\
&\quad -\sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)(\lambda I - A)^{-1}(A \pm \lambda I)B(x)\sigma_2 - \sigma_1 G(\lambda, x)\gamma\Big) \\
&= \Big(-\sigma_2 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_1 \\
&\quad +\lambda\sigma_2 G(\lambda, x)\sigma_1 + \sigma_2 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_1 G(\lambda, x)\sigma_1 \\
&\quad -\gamma G(\lambda, x)\sigma_1 - \sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_2 G(\lambda, x)\sigma_1 \\
&\quad +\sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_2 - \lambda\sigma_1 G(\lambda, x)\sigma_2 - \sigma_1 G(\lambda, x)\gamma\Big), \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

donde, para obtener (3.15) se uso (3.4) en $A^*\mathbb{X}^{-1}(x)$.

Introduciendo (3.16) en la ecuación (3.12) y cancelando algunos términos, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\lambda\sigma_2 y(\lambda,x) - \sigma_1 \tfrac{\partial}{\partial x} y(\lambda,x) + \gamma_*(x) y(\lambda,x) \\
&= \Big(-\lambda\sigma_2 G(\lambda,x)\sigma_1 u(\lambda,x) + \sigma_1 \tfrac{\partial}{\partial x}[G(\lambda,x)]\sigma_1 u(\lambda,x) - \sigma_1 G(\lambda,x)\sigma_1 \tfrac{\partial}{\partial x} u(\lambda,x) \\
&\quad + (\gamma_*(x) - \gamma) u(\lambda,x) - \gamma_*(x) G(\lambda,x)\sigma_1 u(\lambda,x)\Big) \\
&= \Big((-\sigma_2 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_1 + \sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_1 + \gamma_*(x) - \gamma) u(\lambda,x) \\
&\quad + (\sigma_2 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_1 - \sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_1 + \gamma_*(x) - \gamma) G(\lambda,x)\sigma_1 u(\lambda,x) \\
&\quad + \sigma_1 G(\lambda,x)(\sigma_1 \tfrac{\partial}{\partial x} u(\lambda,x) - \lambda\sigma_2 u(\lambda,x) + \gamma u(\lambda,x))\Big) = 0,
\end{aligned}$$

donde se uso la condición (3.6) y la ecuación (3.11). □

Ahora se verá el siguiente significado de la función tau $\tau(x)$, definida en (3.9). De la condición vessel (3.5), $\mathbb{X}(x)$ tiene la fórmula

$$\mathbb{X}(x) = \mathbb{X}(x_0) + \int_{x_0}^{x} B(y)\sigma_2 B^*(y)dy,$$

y como resultado

$$\mathbb{X}^{-1}(x_0)\mathbb{X}(x) = I + \mathbb{X}^{-1}(x_0)\int_{x_0}^{x} B(y)\sigma_2 B^*(y)dy.$$

Dado que σ_2 tiene rango 2, esto es que la expresión anterior es de la forma $I + T$, para un operador de traza finita T y ya que $\mathbb{X}_0 = \mathbb{X}(x_0)$ es un operador invertible, existe un intervalo no trivial $\big($de longitud a lo menos $\frac{1}{\|\mathbb{X}_0^{-1}\|}\big)$ sobre el cual $\mathbb{X}(x)$ y $\tau(\cdot)$ están definidas.

Recordando que una función $F(\cdot)$ de (a, b) en el grupo G $\big($conjunto de operadores invertibles acotados en H de la forma $I + T$, para operadores T de traza finita, véase [IG69]$\big)$, se dice que es diferenciable si $F(\cdot) - I$ es *diferenciable* como un función dentro de los operadores de traza finita. En este caso,

$$\frac{d}{dx}\left(\mathbb{X}^{-1}(x_0)\mathbb{X}(x)\right) = \mathbb{X}^{-1}(x_0)\frac{d}{dx}\mathbb{X}(x) = \mathbb{X}^{-1}(x_0)B(x)\sigma_2 B^*(x)$$

existe en norma traza finita. Israel Gohberg and Mark Krein [IG69] (fórmula 1.14 en p. 163) demostraron que si $\mathbb{X}^{-1}(x_0)\mathbb{X}(x)$ es una función diferenciable en G, entonces $\tau(x) =$

$sp(\mathbb{X}^{-1}(x_0)\mathbb{X}(x))$ [2] es una función diferenciable en $\mathbb{C}$ con

$$\frac{\tau'}{\tau} = sp\left(\big(\mathbb{X}^{-1}(x_0)\mathbb{X}(x)\big)^{-1}\frac{d}{dx}\big(\mathbb{X}^{-1}(x_0)\mathbb{X}(x)\big)\right) = sp\big(\mathbb{X}(x)'\mathbb{X}^{-1}(x)\big)$$
$$= sp\big(B(x)\sigma_2 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)\big) = tr\big(\sigma_2 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\big). \quad (3.17)$$

Una pregunta más importante, en relación con esta teoría es qué clases de $\beta(\cdot)$ son obtenidos. Esta pregunta se responde en el siguiente teorema.

Teorema 3.0.6. *Sea $\mathfrak{V}_{NLS}$ un conjunto regular, definido en* (3.2). *Entonces la función $\beta(\cdot)$ es analítica en el intervalo* I.

Demostración: Utilizando (3.3) y aplicando el método correspondiente para la EDO resultante, se obtiene que $B(x)$ es analítico en x. Ahora como $\mathbb{X}(x)$ es invertible en I, el operador $\mathbb{X}^{-1}(x)$ es también analítico en x, ya que se tiene la fórmula

$$\frac{d}{dx}\mathbb{X}^{-1}(x) = -\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_2 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)$$

Así $\beta(x)$, definida por (3.10) es analítica en I. □

Teorema 3.0.7 (Condiciones de Permanencia)**.** *Considérese un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$, entonces*

1. *si la ecuación de Lyapunov* (3.4) *se cumple para un punto fijo $x_0 \in$ I, entonces se da para todo $x \in$ I,*

2. *si $S^*(-\bar{\lambda}, x_0)\sigma_1 S(\lambda, x_0) = \sigma_1$ entonces*

$$S^*(-\bar{\lambda}, x)\sigma_1 S(\lambda, x) = \sigma_1, \quad (3.18)$$

para cualesquiera $x \in$ I,

3. $\det S(\lambda, x) = \det S(\lambda, x_0)$ *para cualesquiera $x_0, x \in$ I y todo punto fijo de λ-analíticidad de $S(\lambda, x)$.*

Demostración: Diferenciando la ecuación de Lyapunov y usando las condiciones de vessel

[2] *sp* - siglas de la traza en espacios de dimensión infinita.

(3.3), (3.5), se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&A\frac{d}{dx}\mathbb{X}(x)+\frac{d}{dx}\mathbb{X}(x)A^*+\frac{d}{dx}(B(x))B^*(x)+B(x)\frac{d}{dx}B^*(x)\\
&\quad =AB(x)\sigma_2B^*(x)+B(x)\sigma_2B^*(x)A^*+(-AB(x)\sigma_2)B^*(x)+B(x)(-\sigma_2B^*A^*)=0, \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

por lo tanto la derivada de la ecuación de Lyapunov es cero, es decir la ecuación de Lyapunov para $x\in \mathrm{I}$ es constante y utilizando la hipótesis se sigue la permanencia de la ecuación de Lyapunov. Similarmente, diferenciando $S^*(-\bar{\lambda},x)\sigma_1S(\lambda,x)$ y usando (3.13) se obtiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\big(S^*(-\bar{\lambda},x)\sigma_1S(\lambda,x)\big) &= \Big(S^*(-\bar{\lambda},x)\sigma_1\frac{d}{dx}S(\lambda,x)+S(\lambda,x)\sigma_1\frac{d}{dx}S^*(-\bar{\lambda},x)\Big)\\
&= \Big(S^*(-\bar{\lambda},x)\sigma_1\left(\sigma_1^{-1}(\sigma_2\lambda+\gamma_*)S-S\sigma_1^{-1}(\sigma_2\lambda+\gamma)\right)\\
&\quad +S(\lambda,x)\sigma_1\left(\sigma_1^{-1}S^*(\sigma_2^*(\overline{-\bar{\lambda}})+\gamma_*^*)-(\sigma_2^*(\overline{-\bar{\lambda}})+\gamma^*)S^*\sigma_1^{-1}\right)\Big)\\
&= \Big(S^*(-\bar{\lambda},x)\sigma_1\left(\sigma_1^{-1}\sigma_2\lambda S+\sigma_1^{-1}\gamma_*S-S\sigma_1^{-1}\sigma_2\lambda-S\sigma_1^{-1}\gamma\right)\\
&\quad +S(\lambda,x)\sigma_1\left(\sigma_1^{-1}S^*(\sigma_2^*(-\lambda)-\gamma_*)-(\sigma_2^*(-\lambda)+\gamma)S^*\sigma_1^{-1}\right)\Big)\\
&= \Big(S^*(-\bar{\lambda},x)\sigma_1\left(\sigma_1^{-1}\sigma_2\lambda S+\sigma_1^{-1}\gamma_*S-S\sigma_1^{-1}\sigma_2\lambda-S\sigma_1^{-1}\gamma\right)\\
&\quad +S(\lambda,x)\sigma_1\left(-\sigma_1^{-1}S^*\sigma_2\lambda-\sigma_1^{-1}S^*\gamma_*+\sigma_2\lambda S^*\sigma_1^{-1}-\gamma S^*\sigma_1^{-1}\right)\Big)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Esto se debe a que $SS^*=S^*S$, lo cual se prueba posteriormente, así se tiene que se cumple (3.18). Para el último apartado, usando (3.13) y calculando para $\lambda\notin spec(A)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{\partial}{\partial x}\det S(\lambda,x)}{\det S(\lambda,x)} &= tr(S^{-1}(\lambda,x)\frac{\partial}{\partial x}S(\lambda,x))\\
&= tr(S^{-1}(\lambda,x)[(\sigma_2\lambda+\gamma_*(x))S(\lambda,x)-S(\lambda,x)(\sigma_2\lambda+\gamma)])\\
&= tr(\sigma_2\lambda+\gamma_*(x)-(\sigma_2\lambda+\gamma))=tr(\gamma_*(x)-\gamma(x))\\
&= tr(B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)\sigma_2-\sigma_2B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x))\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

donde se uso

$$
\frac{d}{d\mu}\ln\det(I-A(\mu))=-sp\left[(I-A(\mu))^{-1}\frac{dA(\mu)}{d\mu}\right],
$$

(ver [IG69](fórmula 1.14 en p. 163)) para algún operador A. Dando así que $\det S(\lambda, x) = c \neq 0$ entonces al evaluar en x_0 se tiene que $c = \det S(\lambda, x_0)$, es decir lo que se buscaba. $\square$

3.0.2. Momentos

Las siguientes propiedades de los momentos $H_n(\cdot)$ definidos en (3.0.4) de un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$, se dan mediante la definición de los coeficientes de $\dfrac{1}{\lambda^{n+1}}$ en la serie de Taylor de $S(\lambda, x)$.

Teorema 3.0.8. *Consideremos un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$. Entonces sus momentos satisfacen las ecuaciones*

$$\begin{aligned} \sigma_1^{-1}\sigma_2 H_{n+1} - H_{n+1}\sigma_2\sigma_1^{-1} &= \frac{d}{dx}H_n - \sigma_1^{-1}\gamma_* H_n + H_n\gamma\sigma_1^{-1}, && (3.20) \\ H_{n+1} + (-1)^n H_{n+1}^* &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} H_{n-j}\sigma_1 H_j^*. && (3.21) \end{aligned}$$

Demostración: Sustituyendo la expansión de Taylor en la fórmula (3.13) e igualando los coeficientes de $\dfrac{1}{\lambda^{n+1}}$ se obtiene la primera fórmula (3.20). La segunda fórmula es obtenida de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} H_n^*(x) &= \big(B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)A^n B(x)\big)^* \\ &= B^*(x)(A^n)^*(\mathbb{X}^{-1}(x))^* B(x) \\ &= B^*(x)A^n\mathbb{X}^{-1}(x)B(x) \\ &= B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)A^n B(x) \\ &= H_n(x) \end{aligned}$$

entonces

$$H_{n-j}\sigma_1 H_n^* = B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)A^{n-j}B(x)\sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)A^n B(x) \tag{3.22}$$

y por otra parte

$$
\begin{aligned}
B(x)\sigma_1 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x) &= -A\mathbb{X}(x)\mathbb{X}^{-1}(x) - \mathbb{X}(x)A^*\mathbb{X}^{-1} \\
&= -A - \mathbb{X}A\mathbb{X}^{-1}(x) \\
&= -A - A\mathbb{X}(x)\mathbb{X}^{-1}(x) \\
&= -2A
\end{aligned}
$$

Así, reemplazando esta igualdad en (3.22) se obtiene que

$$
\begin{aligned}
H_{n-j}\sigma_1 H_n^* &= -2B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)A^{n+1}B(x) \\
&= -2H_{n+1}(x)
\end{aligned}
$$

entonces cuando n es par se tiene que

$$
\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1}H_{n-j}\sigma_1 H_j^* = 2H_{n+1}
$$

,

por otro lado

$$
H_{n+1} + (-1)^n H_{n+1}^* = 2H_{n+1}
$$

Para el caso n impar se realiza similarmente, con lo que se tiene (3.21). □

Resulta que utilizando únicamente la ecuación diferencial (3.20) se puede crear una fórmula recursiva para las entradas de $H_n = \begin{bmatrix} H_n^{11} & H_n^{12} \\ H_n^{21} & H_n^{22} \end{bmatrix}$ como se sigue

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
H_n^{21} & = & -\dfrac{d}{dx}\left(H_{n-1}^{21}\right) - \beta^* H_{n-1}^{11}, \\
H_n^{12} & = & \dfrac{d}{dx}\left(H_{n-1}^{12}\right) - \beta H_{n-1}^{22}, \\
\dfrac{d}{dx}\left(H_n^{11}\right) & = & \beta H_n^{21}, \\
\dfrac{d}{dx}\left(H_n^{22}\right) & = & -\beta^* H_n^{12}.
\end{array}
\right. \tag{3.23}
$$

mientras que el primer momento H_0 se encuentra de la condición (3.6)

$$H_0 = \begin{bmatrix} H_0^{11} & \beta \\ \beta^* & H_0^{22} \end{bmatrix},$$

y sus entradas H_0^{11}, H_0^{22} se encuentran usando la ultimas ecuaciones de (3.23):

$$\frac{d}{dx}\left(H_0^{11}\right) = \beta H_0^{21} = \beta\beta^*,$$
$$\frac{d}{dx}\left(H_0^{22}\right) = -\beta^* H_0^{12} = -\beta^*\beta.$$

Como un resultado colateral, se obtiene una ecuación para las función tau (3.17) como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\tau'}{\tau} &= tr(\sigma_2 B^*(x)\mathbb{X}^{-1}(x)B(x)) \\ &= tr(\sigma_2 H_0) \\ &= \frac{1}{2}(H_0^{11} - H_0^{22}) \\ &= \frac{1}{2}(H_0^{11}(0) - H_0^{22}(0)) + \int_{x_0}^{x} |\beta(y)|^2 dy.\end{aligned}$$

Por ejemplo, si se eligen los parámetros iniciales $H_0^{11}(0), H_0^{22}(0)$ iguales entre si, se obtiene que bajo la normalización $\tau(x_0) = 1$:

$$\tau(x) = e^{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t} |\beta(y)|^2 dydt}. \tag{3.24}$$

3.1. Ejemplos de construcciones de conjuntos regulares $\mathfrak{V}_{NLS}$

3.1.1. Construcción de un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$ a partir de una función realizada

Construcción de un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$ a partir de los datos de dispersión (condición inicial $S(x_0, \lambda)$). Suponga que la función $S(\lambda, x_0)$ se realiza (ver sección 2.11) como sigue:

$$S(x_0, \lambda) = I - B_0\mathbb{X}_0^{-1}(\lambda I - A)^{-1}B_0\sigma_1,$$

satisfaciendo adicionalmente $A\mathbb{X}_0 + \mathbb{X}_0 A^* + B_0 B_0^* = 0$ y $\mathbb{X}_0^* = \mathbb{X}_0$. Estas condiciones son requeridas por las condiciones de permanencia (Teorema (3.0.7)) y se mantendrá para todo

x por construcción. Entonces se define $B(x)$ como la solución de (3.3) con valor inicial B_0:

$$0 = \frac{d}{dx}(B(x)) + AB(x)\sigma_2, \quad B(0) = B_0. \tag{3.25}$$

Se tiene

$$\mathbb{X}(x) = \mathbb{X}_0 + \int_{x_0}^{x} B(y)\sigma_2 B^*(y)dy, \tag{3.26}$$

y defínase $\gamma_*(\cdot)$ (y por lo tanto $\beta(\cdot)$) usando (3.6). Es sencillo verificar que se cumplen todas las condiciones de vessel:

Teorema 3.1.1. *Sea la función*

$$S(x_0, \lambda) = I - B_0\mathbb{X}_0^{-1}(\lambda I - A)^{-1}B_0,$$

donde se esta usando un espacio auxiliar de Hilbert $\mathcal{H}$ y los operadores actúan como sigue:

$$A, \mathbb{X}_0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad B_0 : \mathbb{C}^2 \to \mathcal{H}$$

y satisface $A\mathbb{X}_0 + \mathbb{X}_0 A^* + B_0 B_0^* = 0$ y $\mathbb{X}_0^* = \mathbb{X}_0$. Usando las fórmulas (3.25), (3.26) *y* (3.6), *definase una colección de la forma* (3.2)

$$\mathfrak{V}_{NLS} = (A, B(x), \mathbb{X}(x); \sigma_1, \sigma_2, \gamma, \gamma_*(x); \mathcal{H}, \mathbb{C}^2).$$

Entonces esta colección es un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$, el cual existe sobre un intervalo I *sobre el cual el operador $\mathbb{X}(x)$ es invertible.*

Se muestran dos ejemplos especiales, que surgen de esta construcción para casos especiales de la elección de $\mathcal{H}$.

3.1.2. Construcción de un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$ con espectro sobre una curva Γ

Sea una curva fija continua y acotada $\Gamma = \{\mu(t) \mid t \in [a, b]\}$ (i.e. $\mu(t)$ es continua) y defina $\mathcal{H} = L^2(\Gamma) = \{f(\mu) \mid \int_a^b |f(\mu(t))|^2 dt < \infty\}$, de esta forma los elementos en H se denotaran como "$f(\mu)$" con $\mu \in \Gamma$. Se supone sin perdida de generalidad que $x_0 = 0$ y construyase un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$, existente sobre un intervalo I incluyendo el cero.

Sea $A = 2\mu\mathrm{I}$, i.e. es un operador actuando sobre $L^2(\Gamma)$. Resolviendo la ecuación diferencial

(3.3) se obtiene que

$$B(x) = \left[\begin{array}{cc} e^{-\mu x} b_1(\mu) & e^{\mu x} b_2(\mu) \end{array}\right], \quad b_1(\mu), b_2(\mu) \in \mathcal{H}. \tag{3.27}$$

Ahora, se calculará el operador $B^* : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^2$, como sigue:

$$\begin{aligned}
\left(B(x)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, f\right) &= \big(z_1 e^{-\mu x} b_1(\mu) + z_2 e^{\mu x} b_2(\mu), f\big) \\
&= \int_a^b \big(z_1 e^{-\overline{\mu} x}\overline{b_1}(\mu) + z_2 e^{\overline{\mu} x}\overline{b_2}(\mu)\big)\, f(\mu) d\mu \\
&= \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \int_a^b e^{-\overline{\mu} x}\overline{b_1}(\mu) f(\mu) d\mu \\ \int_a^b e^{\overline{\mu} x}\overline{b_2}(\mu) f(\mu) d\mu \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, B^*(x) f\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$B^*(x) f(\mu) = \int_a^b \left[\begin{array}{c} e^{-\bar{\mu}(t)x}\bar{b}_1(\mu(t)) \\ e^{\bar{\mu}(t)x}\bar{b}_2(\mu(t)) \end{array}\right] f(\mu(t)) dt.$$

Este es un operador bien definido, ya que por la desigualdad de Cauchy-Schwartz las integrales son finitas.

De igual forma el operador $\mathbb{X}(x)$ se obtiene como sigue:

Para cualquier $f \in \mathcal{H}$, nótese que $\mathbb{X}(x) f$ es una nueva función en $\mathcal{H}$, para la cual se presenta su valor en un punto $\mu = \mu(t) \in \Gamma$.

Así, utilizando los operadores $B(x)$, $B^*(x)$ y

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right],$$

se calculará el siguiente operador $\int_{x_0}^{x} (B(y)\sigma_2 B^*(y))(f(y)) dy$.

Se tiene que

$$\begin{aligned}(B(y)\sigma_2 B^*(y))(f(\mu)) &= \begin{bmatrix} e^{-\mu y}b_1(\mu) & e^{\mu y}b_2(\mu)\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \int_a^b e^{-\bar{s}y}\overline{b_1}(s)f(s)ds \\ \int_a^b e^{\bar{s}y}\overline{b_2}(s)f(s)ds \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-\mu y}b_1(\mu) & e^{\mu y}b_2(\mu)\end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\int_a^b e^{-\bar{s}y}\overline{b_1}(s)f(s)ds \\ -\frac{1}{2}\int_a^b e^{\bar{s}y}\overline{b_2}(s)f(s)ds \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_a^b b_1(\mu)\overline{b_1}(s)e^{-(\mu+\overline{s})y} - b_2(\mu)\overline{b_2}(s)e^{(\mu+\overline{s})y}\right) f(s)ds.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x}(B(y)\sigma_2 B^*(y))(f(y))dy \quad &= \quad \frac{1}{2}\Big(\int_a^b \Big(b_1(\mu)\overline{b_1}(s)\int_{x_0}^{x} e^{-(\mu+\overline{s})y}dy \\ &\quad -b_2(\mu)\overline{b_2}(s)\int_{x_0}^{x} e^{(\mu+\overline{s})y}dy\Big)f(s)ds\Big) \\ &= \quad -\frac{1}{2}\Big(\int_a^b \Big(\frac{b_1(\mu)\overline{b_1}(s)}{\mu+\overline{s}}e^{-(\mu+\overline{s})x} \\ &\quad +\frac{b_2(\mu)\overline{b_2}(s)}{\mu+\overline{s}}e^{(\mu+\overline{s})x}\Big)f(s)ds\Big) \\ &\quad +\frac{1}{2}\Big(\int_a^b \Big(\frac{b_1(\mu)\overline{b_1}(s)}{\mu+\overline{s}}e^{-(\mu+\overline{s})x_0} \\ &\quad +\frac{b_2(\mu)\overline{b_2}(s)}{\mu+\overline{s}}e^{(\mu+\overline{s})x_0}\Big)f(s)ds\Big).\end{aligned}$$

Por lo tanto se obtiene que

$$(\mathbb{X}(x)f)(\mu) = -\frac{1}{2}\int_a^b \left(\frac{b_1(\mu)\bar{b}_1(\mu(s))e^{-(\mu+\bar{\mu}(s))x}}{\mu+\bar{\mu}(s)} + \frac{b_2(\mu)\bar{b}_2(\mu(s))e^{(\mu+\bar{\mu}(s))x}}{\mu+\bar{\mu}(s)}\right) f(\mu(s))ds.$$

Este operador satisface las condiciones (3.4) y (3.5). Para la ecuación de Lyapunov, se debe ver que cumpla:

$$\left(A\mathbb{X}(x)f\right)(\mu) + \left(\mathbb{X}(x)A^*f\right)(\mu) + \left(B(x)B(x)^*f\right)(\mu) = 0$$

Dado que $A = 2\mu\mathrm{I}$ se obtiene que $A^* = 2\overline{\mu}\mathrm{I}$, entonces

$$
\begin{aligned}
(A\mathbb{X}(x)f)(\mu) + (\mathbb{X}(x)A^{*}f)(\mu) &= 2(\mu+\overline{\mu}(s))\,(\mathbb{X}(x)f)(\mu) \\
&= -\Bigg(\int_a^b \Big(b_1(\mu)\overline{b_1}(\mu(s))e^{-(\mu+\overline{\mu}(s))x} \\
&\quad +b_2(\mu)\overline{b_2}(\mu(s))e^{(\mu+\overline{\mu}(s))x}\Big)f(\mu(s))ds\Bigg) \\
&= -\left(B(x)B(x)^{*}f\right)(\mu)
\end{aligned}
$$

Con lo cual se satisface (3.4). Ahora, se probará que

$$\left(\frac{d}{dx}\mathbb{X}(x)f\right)(\mu) = \left(B(x)\sigma_2 B^{*}(x)f\right)(\mu).$$

Se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\mathbb{X}(x)f\right)(\mu) &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\Bigg(\int_a^b \Big(\frac{b_1(\mu)\overline{b_1}(\mu(s))}{\mu+\overline{\mu}(s)}e^{-(\mu+\overline{\mu}(s))x} \\
&\quad +\frac{b_2(\mu)\overline{b_2}(\mu(s))}{\mu+\overline{\mu}(s)}e^{(\mu+\overline{\mu}(s))x}\Big)f(\mu(s))ds\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\int_a^b \Big(b_1(\mu)\overline{b_1}(\mu(s))e^{-(\mu+\overline{\mu}(s))x} \\
&\quad -b_2(\mu)\overline{b_2}(\mu(s))e^{(\mu+\overline{\mu}(s))x}\Big)f(\mu(s))ds\Bigg) \\
&= \left(B(x)\sigma_2 B^{*}(x)f\right)(\mu).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se cumple (3.5). Solo existe un problema, que surge del cero del denominador $\mu(t)+\bar{\mu}(s)=0$. Este se puede superar al requerir que $\Gamma\cap(-\Gamma^{*})=\emptyset$, o b_1, b_2 son funciones de Hölder y $b_1(\mu(t))\bar{b}_1(\mu(s))+b_2(\mu(t))\bar{b}_2(\mu(s))=0$, cuando $\mu(t)+\bar{\mu}(s)=0$ (así que el cero del denominador se cancela por el numerador).

Se hará la siguiente hipótesis de la curva, para simplificar argumentos:

Definición 3.1.2. Supóngase que $\Gamma\cap(-\Gamma^{*})=\emptyset$, donde $-\Gamma^{*}=\{-\bar{\mu}(t)\mid t\in[a,b]\}$.

Entonces se tiene que para cada $f\in\mathcal{H}$ el operador $\mathbb{X}(x)$ esta dado como sigue

$$(\mathbb{X}(x)f)(\mu) = -\frac{b_1(\mu)e^{-\mu x}}{2}\int_a^b \frac{\bar{b}_1(\mu(s))e^{-\bar{\mu}(s)x}}{\mu+\bar{\mu}(s)}f(\mu(s))ds - \frac{b_2(\mu)e^{\mu x}}{2}\int_a^b \frac{\bar{b}_2(\mu(s))e^{\bar{\mu}(s)x}}{\mu+\bar{\mu}(s)}f(\mu(s))ds \tag{3.28}$$

Notése que esta expresión puede ser presentada como

$$(\mathbb{X}(x)f)(\mu) = b_1e^{-\mu x}c_1(\mu) + b_2e^{\mu x}c_2(\mu),$$

donde las funciones

$$c_1(\mu) = -\frac{1}{2}\int_a^b \frac{\bar{b}_1(\mu(s))e^{-\bar{\mu}(s)x}}{\mu+\bar{\mu}(s)}f(\mu(s))ds, \quad c_2(\mu) = -\frac{1}{2}\int_a^b \frac{\bar{b}_2(\mu(s))e^{\bar{\mu}(s)x}}{\mu+\bar{\mu}(s)}f(\mu(s))ds$$

son analíticas de μ en $\mathbb{C}\backslash(-\Gamma^*)$. Notése también que $\Gamma \subseteq \mathbb{C}\backslash(-\Gamma^*)$ por la asunción sobre Γ. Así las funciones $c_1(\mu), c_2(\mu)$ pueden tener ceros aislados en Γ o ser idénticamente cero.

Para simplificar la demostración de que $\mathbb{X}(x)$ es un un operador invertible, supóngase que $b_1 = b_2$ y que son funciones analíticas de μ. Entonces la igualdad $\mathbb{X}(x)f = 0$ es equivalente a

$$e^{-\mu x}\int_a^b \frac{\bar{b}_1(\mu(s))e^{-\bar{\mu}(s)x}}{\mu+\bar{\mu}(s)}f(\mu(s))ds + e^{\mu x}\int_a^b \frac{\bar{b}_1(\mu(s))e^{\bar{\mu}(s)x}}{\mu+\bar{\mu}(s)}f(\mu(s))ds = 0$$

Tomando aquí μ alrededor de infinito tal que $e^{-\mu x}$ es muy pequeño en valor absoluto y $e^{\mu x}$ es muy grande se obtiene que

$$\int_a^b \frac{\bar{b}_1(\mu(s))e^{\bar{\mu}(s)x}}{\mu+\bar{\mu}(s)}f(\mu(s))ds = 0.$$

Inversamente, eligiendo $e^{\mu x}$ pequeño y $e^{-\mu x}$ grande tal que la expresión

$$\int_a^b \frac{\bar{b}_1(\mu(s))e^{-\bar{\mu}(s)x}}{\mu+\bar{\mu}(s)}f(\mu(s))ds$$

también debe anularse. Finalmente, considerando valores de $\mu \to \infty$, desarrollamos la serie de Taylor siguiente:

$$\frac{1}{\mu+\mu(s)} = \frac{1}{\mu}\sum(-1)^n\frac{\mu^n(s)}{\mu^n},$$

sustituyendo está expresión en

$$\int_a^b \frac{\bar{b}_1(\mu(s))e^{-\bar{\mu}(s)x}}{\mu+\bar{\mu}(s)} f(\mu(s))ds$$

y

$$\int_a^b \frac{\bar{b}_1(\mu(s))e^{\bar{\mu}(s)x}}{\mu+\bar{\mu}(s)} f(\mu(s))ds,$$

se obtiene que los momentos de la función $b_1(\mu(s))e^{\pm\mu(s)x}f(\mu(s))$ deben ser cero para todo s, o que la función $b_1(\mu(s))e^{\pm\mu(s)x}f(\mu(s))$ es ortogonal a un subconjunto denso $\{\mu^n(s)\}$ de $L^2(\Gamma)$. Así $f(\mu(s))$ es idénticamente cero y $\mathbb{X}(x)$ es invertible para todo x.

Lema 3.1.3. *Sean Γ una curva continua acotada, que satisface $\Gamma \cap (-\Gamma^*) = \emptyset$ y $\mathbb{X}(x)$ el operador definido en (3.28), usando la analíticidad de las funciones $b_1(\mu) = b_2(\mu)$, se satisface que $\mathbb{X}(x)$ es un operador acotado e invertible para todo $x \in \mathrm{I}$.*

Finalmente, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.1.4. *Suponga que Γ es una curva continua acotada, satisfaciendo $\Gamma\cap(-\Gamma^*) = \emptyset$, definimos una colección (3.2)*

$$\mathfrak{V}_{NLS} = (A, B(x), \mathbb{X}(x); \sigma_1, \sigma_2, \gamma, \gamma_*(x); \mathcal{H}, \mathbb{C}^2),$$

donde $\mathcal{H} = L^2(\Gamma)$, $A = 2\mu\mathrm{I}$, $\mathbb{X}(x)$ y $B(x)$ están definidos por (3.28) y por (3.27) para $|\mu(t)|^2 + |\mu(s)|^2 \neq 0$. Entonces la colección $\mathfrak{V}_{NLS}$ es un conjunto regular existente sobre I.

Demostración: Por construcción los operadores están bien definidos y satisfacen las condiciones de vessel. Dado que el operador $\mathbb{X}(x)$ es invertible para todo $x \in \mathrm{I}$.

3.1.3. Construcción de un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$ con un espectro discreto

En está sección se quiere mostrar cómo construir un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$, cuyo espectro es un conjunto de números $D = \{2\mu_n\}$. Definimos $\mathcal{H} = \ell^2$, el cual es el conjunto de sucesiones infinitas, sumables en valor absoluto al cuadrado. Ahora podemos imitar la construcción de un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$ sobre una curva Γ usando discretización como sigue.

Definimos primero el operador $A = diag(2\mu_n\mathrm{I})$ y para que este operador sea acotado, tenemos que requerir que la sucesión D sea acotada por abajo y por arriba.

Definición 3.1.5. La sucesión D es llamada **acotada** si existe $M > 0$ tal que $|\mu_n| < M$ para $\mu_n \in D$. Es llamada **separada de cero** si existe $m > 0$ tal que $0 < m < |\mu_n|$ para todo $\mu_n \in D$.

En la siguiente definición se considera al operador $\mathbb{X}(x)$ como una matriz infinita con entradas m, n denotada por $[\mathbb{X}(x)]_{n,m}$:

$$B(x) = \begin{bmatrix} e^{-\mu_n x} b_{1n} & e^{\mu_n x} b_{2n} \end{bmatrix}, \quad \{b_{1n}\}, \{b_{2n}\} \in \mathcal{H}, \tag{3.29}$$

$$[\mathbb{X}(x)]_{n,m} = -\frac{b_{1n}\bar{b}_{1m} e^{-(\mu_n+\bar{\mu}_m)x} + b_{2n}\bar{b}_{2m} e^{(\mu_n+\bar{\mu}_m)x}}{2(\mu_n+\bar{\mu}_m)}. \tag{3.30}$$

También asúmase que

$$[\mathbb{X}(x)]_{n,m} = \frac{b_{1n}\bar{b}_{1m} - b_{2n}\bar{b}_{2m}}{2} x, \text{ siempre que } \mu_n + \bar{\mu}_m = 0.$$

El hecho que $B(x)$ sea un operador bien definido es inmediato de la definición. Dado que la sucesión μ_n es acotada, el término $e^{\pm\mu_n x}$ es uniformemente acotado en valor absoluto por e^{Mx}. El hecho de que el operador $\mathbb{X}(x)$ es acotado se sigue de las definiciones y de la asunción sobre D:

$$\|\mathbb{X}(x)\| \leq \frac{e^{2Mx}}{2} \| \left(\frac{|b_{1n}\bar{b}_{1m}| + |b_{2n}\bar{b}_{2m}|}{\mu_n + \bar{\mu}_m} \right) \| \leq \frac{e^{2Mx}}{2} (\|b_{1n}\|^2 + \|b_{2n}\|^2) < \infty.$$

Bajo la condición de que $\mathbb{X}_0 = \mathbb{X}(0)$ es invertible, existe un intervalo no trivial (de longitud al menos $\frac{1}{\|\mathbb{X}_0^{-1}\|}$) sobre el cual $\mathbb{X}(x)$ es también invertible. Así se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 3.1.6. *Considérese un conjunto $\{\mu_n\}$ acotado, separado de cero y dos sucesiones $\{b_{1n}\}, \{b_{2n}\}$ en ℓ^2. Defínase una colección*

$$\mathfrak{V}_{NLS} = (A, B(x), \mathbb{X}(x); \sigma_1, \sigma_2, \gamma, \gamma_*(x); \mathcal{H}, \mathbb{C}^2),$$

donde $\mathcal{H} = \ell^2$, $A = diag(2\mu_n \mathrm{I})$, $\mathbb{X}(x)$ y $B(x)$ están definidas por (3.30) y por (3.29) para $|\mu_n| + |\mu_m| \neq 0$. Considérese que el operador $\mathbb{X}(0)$ sea invertible. Entonces la colección $\mathfrak{V}_{NLS}$ es un conjunto regular sobre un intervalo no trivial I *"incluyendo el cero" de longitud a lo menos $\frac{1}{\|\mathbb{X}_0^{-1}\|}$.*

3.2. Conjunto regular de evolución $\mathfrak{V}_{ENLS}$

Se presentará una construcción de soluciones de la ecuación (3.1) la cual tiene valor inicial $\beta(x,0)$ que surge de un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$. Para esto se va a insertar la dependencia de la variable t dentro de los operadores vessel y postular los operadores de evolución $B(x)$ y $\mathbb{X}(x)$ con respecto a t. Esto se realiza en la siguiente definición.

Definición 3.2.1. La colección

$$\mathfrak{V}_{ENLS} = (A, B(x,t), \mathbb{X}(x,t); \sigma_1, \sigma_2, \gamma, \gamma_*(x); \mathcal{H}, \mathbb{C}^2), \tag{3.31}$$

es llamado **un conjunto regular de evolución** $\mathfrak{V}_{ENLS}$ si adiccionalmente a las ecuaciones (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) los operadores satisfacen también las ecuaciones de evolución

$$\frac{\partial}{\partial t}B(x,t) = iA\frac{\partial}{\partial x}B(x,t), \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{X}(x,t) = iAB\sigma_2B^* - iB\sigma_2B^*A^*. \tag{3.33}$$

Teorema 3.2.2. *Los momentos $H_N(x,t)$ de un conjunto regular de evolución $\mathfrak{V}_{ENLS}$ satisfacen la siguiente ecuación de recurrencia*

$$\frac{\partial}{\partial t}H_N(x,t) = i\frac{\partial}{\partial x}H_{N+1}(x,t) + i\frac{\partial}{\partial x}H_0(x,t)\sigma_1 H_N.$$

y la función de transferencia satisface

$$\frac{\partial}{\partial t}S(x,t) = i\lambda\frac{\partial}{\partial x}S(x,t) + i\frac{\partial}{\partial x}H_0(x,t)\sigma_1 S(x,t). \tag{3.34}$$

Demostración: calculamos las derivada de H_N usando las condiciones de vessel:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}H_N(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}(B^*\mathbb{X}^{-1}A^NB) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(B^*)\mathbb{X}^{-1}A^NB + B^*\frac{\partial}{\partial t}(\mathbb{X}^{-1})A^NB + B^*\mathbb{X}^{-1}A^N\frac{\partial}{\partial t}B \\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial x}(B^*)(-iA^*)\mathbb{X}^{-1}A^NB - B^*\mathbb{X}^{-1}\big(iAB\sigma_2B^* \\
&\quad -iB\sigma_2B^*A^*\big)\mathbb{X}^{-1}A^NB + B^*\mathbb{X}^{-1}A^N(iA)\frac{\partial}{\partial x}B\Big) \qquad (3.35) \\
&= \Big(i\frac{\partial}{\partial x}(B^*)(\mathbb{X}^{-1}A + \mathbb{X}^{-1}B\sigma_1B^*\mathbb{X}^{-1})A^NB \\
&\quad -iB^*\mathbb{X}^{-1}AB\sigma_2B^*\mathbb{X}^{-1}A^NB - iB^*\mathbb{X}^{-1}B\sigma_2B^*(\mathbb{X}^{-1}A \\
&\quad +\mathbb{X}^{-1}B\sigma_1B^*\mathbb{X}^{-1})A^NB + iB^*\mathbb{X}^{-1}A^{N+1}\frac{\partial}{\partial x}B\Big) \qquad (3.36) \\
&= \Big(i\big(\frac{\partial}{\partial x}(B^*)\mathbb{X}^{-1}A^{N+1}B - B^*\mathbb{X}^{-1}AB\sigma_2B^*\mathbb{X}^{-1}A^{N+1}B \\
&\quad +iB^*\mathbb{X}^{-1}A^{N+1}\frac{\partial}{\partial x}B\big) - iB^*\mathbb{X}^{-1}B\sigma_2B^*\mathbb{X}^{-1}B\sigma_1B^*\mathbb{X}^{-1}A^NB\Big) \\
&= \Big(i\frac{\partial}{\partial x}(H_{N+1}) + i\frac{\partial}{\partial x}(B^*)\mathbb{X}^{-1}B\sigma_1H_N + B^*\mathbb{X}^{-1}\frac{\partial}{\partial x}B\sigma_1H_N \\
&\quad +B^*\frac{\partial}{\partial x}(\mathbb{X}^{-1})B\sigma_1H_N\Big) \qquad (3.37) \\
&= i\frac{\partial}{\partial x}(H_{N+1}) + i\frac{\partial}{\partial x}(H_0)\sigma_1H_N,
\end{aligned}
$$

donde para obtener (3.35) se uso (3.32) y (3.33), para (3.36) se utilizo (3.4) y para (3.37) se uso (3.5) y la definición de momentos.

La fórmula para $\frac{\partial}{\partial t}S(x,t)$ es consecuencia de la representación en serie de S, usando los momentos e igualando las potencias de λ. □

Teorema 3.2.3. *Sea $\mathfrak{V}_{ENLS}$ un conjunto regular de evolución, entonces $\beta(x,t)$ definida en* (3.10) *satisface la ecuación de evolución NLS* (3.1).

Desmotración: Considérese la igualdad de las derivadas mixtas

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}S = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}S.$$

Sustituyendo (3.13) y (3.34) en la expresión exterior y la representación de S como serie de momentos se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(i\lambda\frac{\partial}{\partial x}S(x,t) + i\frac{\partial}{\partial x}(H_0)(x,t)\sigma_1S\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_1^{-1}(\sigma_2\lambda+\gamma_*)S - S\sigma_1^{-1}(\sigma_2\lambda+\gamma)\right).$$

Ahora, considerando ambos lados de esta igualdad y tomando los coeficientes libres, se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma_*(x,t) = -i\gamma_*\frac{\partial}{\partial x}(H_0)\sigma_1 + i\sigma_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}(H_0)\sigma_1 + i\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}(H_0)\gamma_*. \tag{3.38}$$

Finalmente de definición (3.6)

$$\gamma_* = \begin{bmatrix} 0 & \beta(x,t) \\ -\beta^*(x,t) & 0 \end{bmatrix},$$

y usando la fórmula para $\frac{\partial}{\partial x}H_0(x,t) = \begin{bmatrix} |\beta|^2 & \frac{\partial}{\partial x}\beta(x,t) \\ \frac{\partial}{\partial x}\beta^*(x,t) & -|\beta|^2 \end{bmatrix}$, se obtiene que la entrada "12" es trasladada en la ecuación (3.1) para $\beta(x,t)$, definida por (3.10). □

Así para resolver (3.1) con valor inicial $\beta(x,0)$, la cual surge de un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$, es suficiente añadir la dependencia de t de manera que $B(x,0) = B(x)$, $\mathbb{X}(x,0) = \mathbb{X}(x)$ y las ecuaciones diferenciales (3.32), (3.33) se cumplan. Se mostraran algunos ejemplos.

3.3. Ejemplos de construcciones de soluciones de la ecuación de evolución NLS

Se presentan ejemplos de soluciones de la ecuación de evolución NLS (3.1) cuando para el valor inicial $t = 0$, $\beta(x)$ es analítica en $\mathbb{R}$ y surge de un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$. Se mostrará como construir un conjunto regular de evolución $\mathfrak{V}_{ENLS}$, coincidiendo con el conjunto regular a partir de una función realizada, dicha coincidencia sera $\beta(x,t) = \beta(x)$ para $t = 0$.

La función beta resultante de los operadores de este conjunto regular de evolución $\mathfrak{V}_{ENLS}$ es solución de (3.1) con valor inicial.

3.3.1. Construcción de una solución para el conjunto regular de evolución $\mathfrak{V}_{ENLS}$ a partir de una función realizada

Suponga que $\beta(x)$ fue construida a partir de una función realizada como en sección 3.1.1

$$S(\lambda, x_0) = I - B_0^*\mathbb{X}_0^{-1}(\lambda I - A)^{-1}B_0.$$

Entonces la construcción puede proceder de los siguientes pasos, cada uno requiere una solución de una ecuación diferencial lineal con valor inicial. Construyase $B(x)$ y $\mathbb{X}(x)$ por las fórmulas (3.25) y (3.26). Entonces resolviendo se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t}B(x,t) = iA\frac{\partial}{\partial x}B(x,t) = iA(-AB(x,t)\sigma_2), \quad B(x,0) = B(x).$$

Finalmente, defínase

$$\mathbb{X}(x,t) = \mathbb{X}(x) + \int_0^t [iAB(x,s)\sigma_2 B^*(x,s) - iB(x,s)\sigma_2 B^*(x,s)A^*]ds.$$

Todas las condiciones de vessel se satisfacen por contrucción.

3.3.2. Solución de la ecuación de evolución NLS con espectro sobre una curva Γ

Si se da $\beta(x)$, la cual surge de un conjunto regular sobre una curva, se puede solucionar explicitamente las ecuaciones para $B(x,t)$ y $\mathbb{X}(x,t)$ como sigue:

$$B(x,t) = \begin{bmatrix} \exp(-\mu x - 2i\mu^2 t)b_1(\mu) & \exp(\mu x + 2i\mu^2 t)b_2(\mu) \end{bmatrix}, \quad b_1(\mu), b_2(\mu) \in \mathcal{H}. \tag{3.39}$$

Está función coincide con $B(x)$ para $t = 0$ y satisface (3.3) y (3.32). La fórmula para $\mathbb{X}(x,t)$ está dada como sigue:

$$\begin{aligned}(\mathbb{X}(x,t)f)(\mu) = &-\frac{1}{2}\int_a^b \frac{b_1(\mu)\bar{b}_1(\mu(s))\exp(-(\mu+\bar{\mu}(s))x - i(\mu^2+\bar{\mu}^2(s))t)}{\mu+\bar{\mu}(s)}f(\mu(s))ds \\ &-\frac{1}{2}\int_a^b \frac{b_2(\mu)\bar{b}_2(\mu(s))\exp((\mu+\bar{\mu}(s))x + i(\mu^2+\mu^2(s))t)}{\mu+\bar{\mu}(s)}f(\mu(s))ds. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Por lo tanto basándose en el Ejemplo (3.1.1) es posible obtener $B^*(x,t)$, con lo cual se construye una solución de (3.1) con valor inicial $\beta(x)$ derivado de un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$ con espectro sobre una curva Γ.

3.3.3. Solución de la ecuación de evolución NLS con espectro sobre un conjunto discreto

Similarmente a el caso de espectro continuo se define

$$B(x,t) = \begin{bmatrix} \exp(-\mu_n x - 2i\mu_n^2 t)b_{1n} & \exp(\mu_n x + 2i\mu_n^2 t)b_{2n} \end{bmatrix}, \quad \{b_{1n}\}, \{b_{2n}\} \in \mathcal{H}, \tag{3.41}$$

$$[\mathbb{X}(x,t)]_{n,m} = -\frac{b_{1n}\bar{b}_{1m}e^{-(\mu_n+\bar{\mu}_m)x-2i(\mu_n^2+\bar{\mu}_m^2)t} + b_{2n}\bar{b}_{2m}e^{(\mu_n+\bar{\mu}_m)x+2i(\mu_n^2+\bar{\mu}_m^2)t}}{2(\mu_n+\bar{\mu}_m)}. \tag{3.42}$$

Del mismo modo asúmase que $[\mathbb{X}(x,t)]_{n,m} = \dfrac{b_{1n}\bar{b}_{1m} - b_{2n}\bar{b}_{2m}}{2}(x + 2i\mu_n t)$, siempre que $\mu_n + \bar{\mu}_m = 0$.

3.3.4. Solitones

También podemos considerar el caso dimensionalmente finito: $\dim \mathcal{H} < \infty$. Tomando que $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ y fijando valores no cero $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$, satisfaciendo $\mu_i + \bar{\mu}_j \neq 0$ para todo $1 \leq i, j \leq N$, se pude obtener que

$$B(x,t) = \begin{bmatrix} \exp(-\mu_1 x - 2i\mu_1^2 t)b_{11} & \exp(\mu_1 x + 2i\mu_1^2 t)b_{21} \\ \exp(-\mu_2 x - 2i\mu_2^2 t)b_{12} & \exp(\mu_2 x + 2i\mu_2^2 t)b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ \exp(-\mu_N x - 2i\mu_N^2 t)b_{1N} & \exp(\mu_N x + 2i\mu_N^2 t)b_{2N} \end{bmatrix}, \tag{3.43}$$

y el operador $\mathbb{X}(x,t)$ es una matriz de $N \times N$, definida por la fórmula (3.42). Entonces la función

$$\beta(x,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} B^*(x,t)\mathbb{X}^{-1}(x,t)B(x,t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un Solitón, el cual es solución de (3.1), porque se construye a partir de las condiciones de vessel.

3.4. Ejemplo para $\beta(x,t)$

Se presentara el siguiente ejemplo, el cual se construirá a partir de las condiciones de vessel, para simplificar notación de los operadores usados, en ocasiones se omitirá la dependencia de sus parámetros.

El espacio de Hilbert que consideraremos para este ejemplo es $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Retomando que

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix},$$

y eligiendo $b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = 1$ en (3.43), se tiene que

$$B[x, t, \mu 1, \mu 2] = \begin{bmatrix} e^{\left(-\mu 1 * x - 2i * \mu 1^2 * t\right)} & e^{\left(\mu 1 * x + 2i * \mu 1^2 * t\right)} \\ e^{\left(-\mu 2 * x - 2i * \mu 2^2 * t\right)} & e^{\left(\mu 2 * x + 2i * \mu 2^2 * t\right)} \end{bmatrix},$$

de esta forma tomando la transpuesta conjugada de B se obtiene

$$B^*[x,t,\mu 1,\mu 2] = \begin{bmatrix} e^{-x\overline{\mu 1}+2it*\overline{\mu 1}^2} & e^{-x\overline{\mu 2}+2it*\overline{\mu 2}^2} \\ e^{x\overline{\mu 1}-2it*\overline{\mu 1}^2} & e^{x\overline{\mu 2}-2it*\overline{\mu 2}^2} \end{bmatrix},$$

y entonces

$$BB^*[x,t,\mu 1,\mu 2] = \begin{bmatrix} (BB^*)_{11} & (BB^*)_{12} \\ (BB^*)_{21} & (BB^*)_{22} \end{bmatrix},$$

donde para simplificar notación se usa que

$$(BB^*)_{11} = e^{x\mu 1+2it\mu 1^2+x\overline{\mu 1}-2it\overline{\mu 1}^2} + e^{-x\mu 1-2it\mu 1^2-x\overline{\mu 1}+2it\overline{\mu 1}^2},$$

$$(BB^*)_{12} = e^{x\mu 1+2it\mu 1^2+x\overline{\mu 2}-2it\overline{\mu 2}^2} + e^{-x\mu 1-2it\mu 1^2-\overline{\mu 2}+2it\overline{\mu 2}^2},$$

$$(BB^*)_{21} = e^{x\mu 2+2it\mu 2^2+x\overline{\mu 2}-2it\overline{\mu 1}^2} + e^{-x\mu 2-2it\mu 2^2-x\overline{\mu 1}+2it\overline{\mu 1}^2},$$

$$(BB^*)_{22} = e^{x\mu 2+2it\mu 2^2+x\overline{\mu 2}-2it\overline{\mu 2}^2} + e^{-x\mu 2-2it\mu 2^2-x\overline{\mu 2}+2it\overline{\mu 2}^2}.$$

Por otra parte se tiene que

$$B\sigma_2 B^*[x,t,\mu 1,\mu 2] = \begin{bmatrix} (B\sigma_2 B^*)_{11} & (B\sigma_2 B^*)_{12} \\ (B\sigma_2 B^*)_{21} & (B\sigma_2 B^*)_{22} \end{bmatrix},$$

$$(B\sigma_2 B^*)_{11} = -\frac{1}{2}e^{x\mu 1+2it\mu 1^2+x\overline{\mu 1}-2it\overline{\mu 1}^2} + \frac{1}{2}e^{-x\mu 1-2it\mu 1^2-x\overline{\mu 1}+2it\overline{\mu 1}^2},$$

$$(B\sigma_2 B^*)_{12} = -\frac{1}{2}e^{x\mu 1+2it\mu 1^2+x\overline{\mu 2}-2it\overline{\mu 2}^2} + \frac{1}{2}e^{-x\mu 1-2it\mu 1^2+-\overline{\mu 2}+2it\overline{\mu 2}^2},$$

$$(B\sigma_2 B^*)_{21} = -\frac{1}{2}e^{x\mu 2+2it\mu 2^2+x\overline{\mu 2}-2it\overline{\mu 1}^2} + \frac{1}{2}e^{-x\mu 2-2it\mu 2^2-x\overline{\mu 1}+2it\overline{\mu 1}^2},$$

$$(B\sigma_2 B^*)_{22} = -\frac{1}{2}e^{x\mu 2+2it\mu 2^2+x\overline{\mu 2}-2it\overline{\mu 2}^2} + \frac{1}{2}e^{-x\mu 2-2it\mu 2^2-x\overline{\mu 2}+2it\overline{\mu 2}^2}.$$

Recordando que

$$\mathbb{X}(x,t) = \mathbb{X}(x_0,t) + \int_{x_0}^{x} B(y,t)\sigma_2 B^*(y,t)dy.$$

Entonces

$$X[x,x_0,t,\mu 1,\mu 2]=X(x_0)+\begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x}(B\sigma_2B^*)_{11}(y)dy & \int_{x_0}^{x}(B\sigma_2B^*)_{12}(y)dy \\ \int_{x_0}^{x}(B\sigma_2B^*)_{21}(y)dy & \int_{x_0}^{x}(B\sigma_2B^*)_{22}(y)dy \end{bmatrix},$$

donde

$$X(x_0)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

de esta manera para elegir los términos de $\mathbb{X}(x_0)=\mathbb{X}_0$, elijamos $x_0=0$ de está forma se debe cumplir que

$$A\mathbb{X}(0)+\mathbb{X}(0)A^*=-BB^*(0). \tag{3.44}$$

Ahora como

$$A=\begin{bmatrix} 2\mu 1 & 0 \\ 0 & 2\mu 2 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned}\left(\begin{bmatrix} 2\mu 1 & 0 \\ 0 & 2\mu 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mu 1 & 0 \\ 0 & 2\mu 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) \\ = \begin{bmatrix} 4a_{11}\mu 1 & 2a_{12}(\mu 1+\mu 2) \\ 2a_{21}(\mu 1+\mu 2) & 4a_{22}\mu 2 \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{3.45}$$

y por (3.44), esta matriz debe ser igual a

$$-BB^*(0)=-\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}. \tag{3.46}$$

De esta manera de (3.45) y (3.46) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{matrix} 4a_{11}\mu 1=-2 & 2a_{12}(\mu 1+\mu 2)=-2 \\ 2a_{21}(\mu 1+\mu 2)=-2 & 4a_{22}\mu 2=-2 \end{matrix},$$

donde eligiendo $a_{11}=1$ y $a_{22}=3$ se obtiene que $\mu 1=-1/2$, $\mu 2=-1/6$ y con estos valores $a_{12}=a_{21}=3/2$. Entonces

$$X_0=\begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 3 \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix},$$

y considerando el valor de A, se tiene que

$$X[x,0,t,\mu 1,\mu 2]=\begin{bmatrix} 1+\int_0^x(B\sigma_2B^*)_{11}(y)dy & \frac{3}{2}+\int_0^x(B\sigma_2B^*)_{12}(y)dy \\ \frac{3}{2}+\int_0^x(B\sigma_2B^*)_{21}(y)dy & 3+\int_0^x(B\sigma_2B^*)_{22}(y)dy \end{bmatrix},$$

$$X[x,0,0,-1/2,-1/6]=\begin{bmatrix} \mathrm{Cosh}[x] & \frac{3}{2}+3\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{3}\right]^2 \\ \frac{3}{2}+3\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{3}\right]^2 & 3+6\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{6}\right]^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} AX_0+X_0A^* &= \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{Cosh}[x] & \frac{3}{2}+3\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{3}\right]^2 \\ \frac{3}{2}+3\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{3}\right]^2 & 3+6\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{6}\right]^2 \end{bmatrix}\right. \\ &\quad \left.+\begin{bmatrix} \mathrm{Cosh}[x] & \frac{3}{2}+3\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{3}\right]^2 \\ \frac{3}{2}+3\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{3}\right]^2 & 3+6\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{6}\right]^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} -e^{-x}-e^{x} & -e^{-2x/3}-e^{2x/3} \\ -e^{-2x/3}-e^{2x/3} & -e^{-x/3}-e^{x/3} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

por otra parte

$$-BB^*(0)=\begin{bmatrix} -e^{-x}-e^{x} & -e^{-2x/3}-e^{2x/3} \\ -e^{-2x/3}-e^{2x/3} & -e^{-x/3}-e^{x/3} \end{bmatrix}.$$

Con lo cual se cumple la condición (3.4).

De igual manera para comprobar la ecuación (3.32), se tiene que

$$B[x,t,-1/2,-1/6]=\begin{bmatrix} e^{-\frac{it}{2}+\frac{x}{2}} & e^{\frac{it}{2}-\frac{x}{2}} \\ e^{-\frac{it}{18}+\frac{x}{6}} & e^{\frac{it}{18}-\frac{x}{6}} \end{bmatrix}.$$

Entonces se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}B[x,t,-1/2,-1/6]=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}ie^{-\frac{it}{2}+\frac{x}{2}} & \frac{1}{2}ie^{\frac{it}{2}-\frac{x}{2}} \\ -\frac{1}{18}ie^{-\frac{it}{18}+\frac{x}{6}} & \frac{1}{18}ie^{\frac{it}{18}-\frac{x}{6}} \end{bmatrix},$$

por otra lado se obtendrá $-iA\frac{\partial}{\partial x}B(x,t)=-iA^2B(x,t)\sigma_2$:

$$
\begin{aligned}
-iA\frac{\partial}{\partial x}B(x,t) &= -iA^2B(x,t)\sigma 2\\
&= \left(\begin{bmatrix} -i & 0\\ 0 & -\frac{1}{9}i\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-\frac{it}{2}+\frac{x}{2}} & e^{\frac{it}{2}-\frac{x}{2}}\\ e^{-\frac{it}{18}+\frac{x}{6}} & e^{\frac{it}{18}-\frac{x}{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}ie^{-\frac{it}{2}+\frac{x}{2}} & \frac{1}{2}ie^{\frac{it}{2}-\frac{x}{2}}\\ -\frac{1}{18}ie^{-\frac{it}{18}+\frac{x}{6}} & \frac{1}{18}ie^{\frac{it}{18}-\frac{x}{6}}\end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

es decir se cumple que $\frac{\partial}{\partial t}B(x,t) = -iA\frac{\partial}{\partial x}B(x,t)$.

Ahora por la condición (3.33) se tiene que $\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{X}(x,t) = iAB\sigma_2B^* - iB\sigma_2B^*A^*$, por lo cual se calculará el término de la derecha en dos partes, es decir,

$$
\begin{aligned}
iAB\sigma_2B^*(x,t) &= \begin{bmatrix} -i & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}i\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-\frac{it}{2}+\frac{x}{2}} & e^{\frac{it}{2}-\frac{x}{2}}\\ e^{-\frac{it}{18}+\frac{x}{6}} & e^{\frac{it}{18}-\frac{x}{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\frac{it}{2}+\frac{x}{2}} & e^{\frac{it}{18}+\frac{x}{6}}\\ e^{-\frac{it}{2}-\frac{x}{2}} & e^{-\frac{it}{18}-\frac{x}{6}}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} \frac{ie^{-x}}{2}-\frac{ie^{x}}{2} & \frac{1}{2}ie^{\frac{4it}{9}-\frac{2x}{3}}-\frac{1}{2}ie^{-\frac{4it}{9}+\frac{2x}{3}}\\ \frac{1}{6}ie^{-\frac{4it}{9}-\frac{2x}{3}}-\frac{1}{6}ie^{\frac{4it}{9}+\frac{2x}{3}} & \frac{1}{6}ie^{-x/3}-\frac{1}{6}ie^{x/3}\end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

similarmente

$$
\begin{aligned}
-iB\sigma_2B^*A^*(x,t) &= -\begin{bmatrix} ie^{-\frac{it}{2}+\frac{x}{2}} & ie^{\frac{it}{2}-\frac{x}{2}}\\ ie^{-\frac{it}{18}+\frac{x}{6}} & ie^{\frac{it}{18}\frac{x}{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\frac{it}{2}+\frac{x}{2}} & e^{\frac{it}{18}+\frac{x}{6}}\\ e^{-\frac{it}{2}-\frac{x}{2}} & e^{-\frac{it}{18}-\frac{x}{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}ie^{-x}+\frac{ie^{x}}{2} & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}ie^{\frac{4it}{9}-\frac{2x}{3}}+\frac{1}{2}ie^{-\frac{4it}{9}+\frac{2x}{3}}\right)\\ -\frac{1}{2}ie^{-\frac{4it}{9}-\frac{2x}{3}}+\frac{1}{2}ie^{\frac{4it}{9}+\frac{2x}{3}} & \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}ie^{-x/3}+\frac{1}{2}ie^{x/3}\right)\end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

entonces sumando (3.47) y (3.48), se obtiene que $iAB\sigma_2B^* - iB\sigma_2B^*A^*$ esta dado por

$$
\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3}ie^{-\frac{4it}{9}-\frac{2x}{3}}\left(e^{\frac{8it}{9}}-e^{4x/3}\right)\\ \frac{1}{3}ie^{-\frac{4it}{9}-\frac{2x}{3}}\left(-1+e^{\frac{8it}{9}+\frac{4x}{3}}\right) & 0\end{bmatrix}.
$$

Ahora se obtendrá $\int_0^t((iAB\sigma_2B^* - iB\sigma_2B^*A^*)(x,z))dz$, para esto hagamos que $(iAB\sigma_2B^* - iB\sigma_2B^*A^*) = C(x,t)$,

donde, se utilizará que

$$
\begin{aligned}
C_{11}(x,z) &= 0,\\
C_{12}(x,z) &= \frac{1}{3} i e^{-\frac{4it}{9}-\frac{2x}{3}}\left(e^{\frac{8it}{9}} - e^{4x/3}\right),\\
C_{21}(x,z) &= \frac{1}{3} i e^{-\frac{4it}{9}-\frac{2x}{3}}\left(-1 + e^{\frac{8it}{9}+\frac{4x}{3}}\right),\\
C_{22}(x,z) &= 0,
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\int_0^t ((iAB\sigma_2B^* - iB\sigma_2B^*A^*)(x,z))dz &= \begin{bmatrix} \int_0^t C_{11}(x,z)dz & \int_0^t C_{12}(x,z)dz \\ \int_0^t C_{21}(x,z)dz & \int_0^t C_{22}(x,z)dz \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} C_{11}^{'} & C_{12}^{'} \\ C_{21}^{'} & C_{22}^{'} \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
C_{11}^{'} &= 0,\\
C_{12}^{'} &= -3\mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{9}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{2}{9}(t+3ix)\right],\\
C_{21}^{'} &= -3\mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{9}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{2}{9}(t-3ix)\right],\\
C_{22}^{'} &= 0.
\end{aligned}
$$

Entonces se obtiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{X}[x,t] &= \mathbb{X}[x,0] + \int_0^t [iAB(x,s)\sigma_2B^*(x,s) - iB(x,s)\sigma_2B^*(x,s)A^*]ds\\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{Cosh}[x] & \frac{3}{2} + 3\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{3}\right]^2 \\ \frac{3}{2} + 3\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{3}\right]^2 & 3 + 6\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{6}\right]^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}^{'} & C_{12}^{'} \\ C_{21}^{'} & C_{22}^{'} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

De esta forma se puede obtener la matriz $\mathbb{X}^{-1}[x,t]$, la cual esta dada por

$$\mathbb{X}^{-1}[x,t]=\begin{bmatrix} \frac{3+6\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{6}\right]^2}{D} & \frac{-\frac{3}{2}+3\mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{9}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{2}{9}(t+3ix)\right]-3\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{3}\right]^2}{D} \\ \frac{-\frac{3}{2}+3\mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{9}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{2}{9}(t-3ix)\right]-3\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{3}\right]^2}{D} & \frac{\mathrm{Cosh}[x]}{D} \end{bmatrix},$$

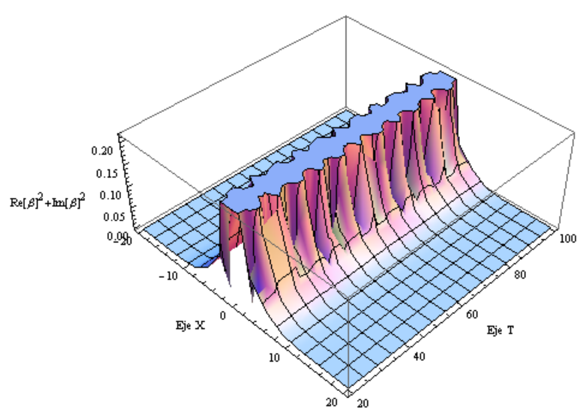
donde

$$\begin{aligned} D &= \mathrm{Cosh}[x]\left(3+6\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{6}\right]^2\right)-\left(\frac{3}{2}-3\mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{9}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{2}{9}(t-3ix)\right]\right. \\ &\left.+3\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{3}\right]^2\right)\left(\frac{3}{2}-3\mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{9}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{2}{9}(t+3ix)\right]+3\mathrm{Sinh}\left[\frac{x}{3}\right]^2\right). \end{aligned}$$

Entonces sustituyendo las expresiones obtenidas para $B[x,t]$, $B^*[x,t]$ y $\mathbb{X}^{-1}[x,t]$, se tiene que

$$\begin{aligned} \beta[x,t] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} B^*\mathbb{X}^{-1}B[x,t]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{2e^{\frac{it}{9}-x}\left(1-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{2x}{3}}+e^{2x}-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{4x}{3}}\right)}{3\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)}. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Una gráfica para el cuadrado de la amplitud $(Re(\beta)^2+Im(\beta)^2)$ de la función (3.49), esta dada por



Lo cual es un solitón como se menciona en (3.3.4).

Ahora la ecuación no lineal de Schrödinger (3.1) esta dada por

$$i\frac{\partial}{\partial t}\beta[x,t]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\beta[x,t]+2|\beta[x,t]|^2\beta[x,t]=\frac{N_1[x,t]}{27D_1^2}-\frac{N_2[x,t]}{3D_1}+\frac{N_3[x,t]}{27D_1^3}, \tag{3.50}$$

donde $D_1=\left(-3\text{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\text{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\text{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)$,

$$\begin{aligned} N_1[x,t] \;=\;& 2ie^{\frac{it}{9}-x}\Bigg(-24ie^{\frac{8it}{9}+\frac{2x}{3}}\left(1+e^{2x/3}\right)\left(3\text{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]-4\text{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]-\text{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right) \\ & -i\left(1-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{2x}{3}}+e^{2x}-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{4x}{3}}\right)\left(-3\text{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\text{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\text{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right) \\ & +24\left(1-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{2x}{3}}+e^{2x}-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{4x}{3}}\right)\text{Sin}\left[\frac{8t}{9}\right]\Bigg), \end{aligned}$$

$N_2[x,t] = N_2'[x,t] + N_2''[x,t]$ y

$$\begin{aligned}
N_2'[x,t] \;=\;& 4e^{\frac{it}{9}-x}\left(1-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{2x}{3}}+e^{2x}-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{4x}{3}}\right)\left(\frac{8\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{9}\right]^2}{9\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\right.\\
&+\frac{4e^{-2x}\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{9}\right]^2}{9\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&+\frac{4e^{2x}\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{9}\right]^2}{9\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&-\frac{8e^{-4x/3}\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{9}\right]^2\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]}{3\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&-\frac{8e^{-2x/3}\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{9}\right]^2\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]}{3\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&-\frac{8e^{2x/3}\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{9}\right]^2\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]}{3\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&-\frac{8e^{4x/3}\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{9}\right]^2\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]}{3\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&+\frac{8\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{9}\right]^2\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]^2}{\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&+\frac{4e^{-2x/3}\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{9}\right]^2\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]^2}{\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&\left.+\frac{4e^{2x/3}\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{9}\right]^2\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]^2}{\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
N_2''[x,t] \;=\;& 4e^{\frac{it}{9}-x}\left(1-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{2x}{3}}+e^{2x}-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{4x}{3}}\right)\left(\frac{8\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{9}\right]^2}{9\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\right.\\
&+\frac{8\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{9}\right]^2}{9\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&+\frac{4e^{-2x}\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{9}\right]^2}{9\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&+\frac{4e^{2x}\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{9}\right]^2}{9\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&-\frac{8e^{-4x/3}\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{9}\right]^2}{3\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&-\frac{8e^{-2x/3}\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{9}\right]^2}{3\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&-\frac{8e^{2x/3}\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{9}\right]^2}{3\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&-\frac{8e^{4x/3}\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{9}\right]^2}{3\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&+\frac{8\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]^2\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{9}\right]^2}{\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&+\frac{4e^{-2x/3}\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]^2\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{9}\right]^2}{\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&+\frac{4e^{2x/3}\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]^2\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{9}\right]^2}{\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&+\frac{8\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{9}\right]^2\mathrm{Sin}\left[\frac{8t}{9}\right]^2}{\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&+\frac{4e^{-2x/3}\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{9}\right]^2\mathrm{Sin}\left[\frac{8t}{9}\right]^2}{\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&+\frac{4e^{2x/3}\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{9}\right]^2\mathrm{Sin}\left[\frac{8t}{9}\right]^2}{\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&+\frac{8\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{9}\right]^2\mathrm{Sin}\left[\frac{8t}{9}\right]^2}{\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&+\frac{4e^{-2x/3}\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{9}\right]^2\mathrm{Sin}\left[\frac{8t}{9}\right]^2}{\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\\
&\left.+\frac{4e^{2x/3}\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{9}\right]^2\mathrm{Sin}\left[\frac{8t}{9}\right]^2}{\left(-3\mathrm{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\mathrm{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\mathrm{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_3[x,t] \;=\; & 2e^{\frac{it}{9}-x}\Bigg(16\left(1-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{2x}{3}}+e^{2x}-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{4x}{3}}\right)\left(\text{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\text{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)\\
& \left(-3\text{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\text{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\text{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)-9\left(-\frac{4}{3}e^{\frac{8it}{9}+\frac{2x}{3}}+4e^{2x}-\frac{16}{3}e^{\frac{8it}{9}+\frac{4x}{3}}\right)\\
& \left(-3\text{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\text{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\text{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2+18\left(-2e^{\frac{8it}{9}+\frac{2x}{3}}+2e^{2x}-4e^{\frac{8it}{9}+\frac{4x}{3}}\right)\\
& \left(-3\text{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\text{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\text{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2-9\left(1-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{2x}{3}}+e^{2x}-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{4x}{3}}\right)\\
& \left(-3\text{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\text{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\text{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2+192\left(-2e^{\frac{8it}{9}+\frac{2x}{3}}+2e^{2x}-4e^{\frac{8it}{9}+\frac{4x}{3}}\right)\\
& \text{Cosh}\left[\frac{x}{3}\right]^3\left(-3\text{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\text{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\text{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)\text{Sinh}\left[\frac{x}{3}\right]\\
& -192\left(1-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{2x}{3}}+e^{2x}-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{4x}{3}}\right)\text{Cosh}\left[\frac{x}{3}\right]^3\Bigg(-3\text{Cos}\left[\frac{8t}{9}\right]+4\text{Cosh}\left[\frac{2x}{3}\right]\\
& +\text{Cosh}\left[\frac{4x}{3}\right]\Bigg)\text{Sinh}\left[\frac{x}{3}\right]-32\left(1+e^{2x/3}\right)\left(1-3e^{\frac{8it}{9}+\frac{2x}{3}}-e^{2x/3}+e^{4x/3}\right)\\
& \left(2\text{Sinh}\left[\frac{2x}{3}\right]+\text{Sinh}\left[\frac{4x}{3}\right]\right)^2\Bigg).
\end{aligned}
$$

Reduciendo la expresión (3.50) se obtiene que esta es **cero**.

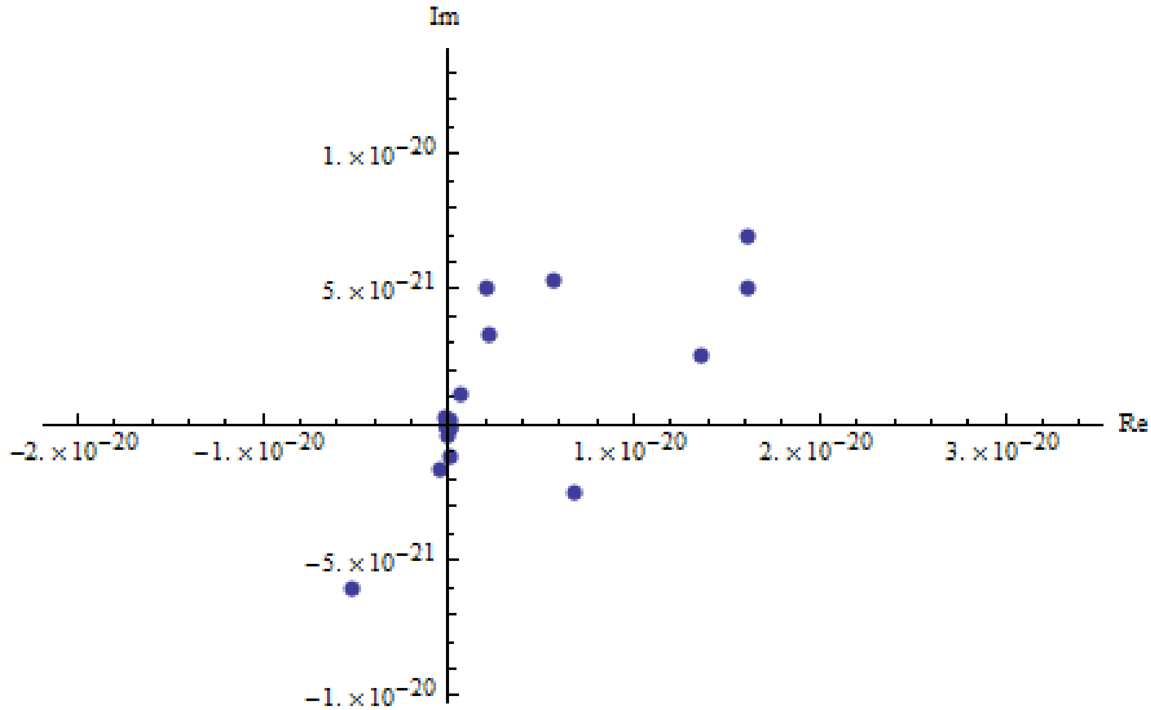
Por otra parte, se define para $\beta[x,y]$ (3.49), la ecuación

$$NLSeq[x,t]=i\frac{\partial}{\partial t}\beta[x,t]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\beta[x,t]+2|\beta[x,t]|^2\beta[x,t], \tag{3.51}$$

entonces se obtiene que

$$
\begin{aligned}
NLSeq[100000,10000] &= 0.+0.i,\\
NLSeq[.0000001,0000001] &= -5.32907*10^{-15}-6.35275*10^{-22}i,\\
NLSeq[.0000001,10000] &= -5.55112*10^{-16}-6.59195*10^{-17}i,\\
NLSeq[100,.00001] &= -1.2819*10^{-30}-1.50463*10^{-36}i.
\end{aligned}
$$

Un esbozo puntual de la gráfica para $NLSeq[x,t]$ (3.51), está dado por


Im
1. × 10^-20
5. × 10^-21
−5. × 10^-21
−1. × 10^-20
Re
−2. × 10^-20
−1. × 10^-20
1. × 10^-20
2. × 10^-20
3. × 10^-20

4. FÓRMULA DE INVERSIÓN PARA $\mathbb{X}(X)$ DEL CONJUNTO REGULAR

En este capitulo se estudiara el operador $\mathbb{X}(x)$ mostrado en (3.28), con la finalidad de conocer, cuándo y cómo es su inversa o en qué dominio vive la misma.

Únicamente para simplificar la notación vamos a suponer que la curva Γ es el intervalo cerrado $[a, b]$. El cual cumple que $\Gamma \cap (-\Gamma^*) = \varnothing$. Entonces tenemos que el operador $\mathbb{X}(x)$ (3.28) cumple lo siguiente.

Proposición 4.0.1. *El operador $\mathbb{X}(x)$ es un operador compacto*

Demostración:

Tenemos que

$$(\mathbb{X}(x)f)(\mu) = \int_a^b K_1(\mu, s) f(s) ds + \int_a^b K_2(\mu, s) f(s) ds,$$

donde,

$$K_1(\mu, s) = \frac{b_1(\mu) b_1(s)}{\mu + s} e^{-x(\mu+s)} \text{ y } K_2(\mu, s) = \frac{b_2(\mu) b_2(s)}{\mu + s} e^{x(\mu+s)}.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b d\mu \int_a^b |K_1(\mu, s)|^2 ds &= \int_a^b |b_1(\mu)|^2 \int_a^b |\tfrac{b_1(s)}{\mu+s} e^{-x(\mu+s)}|^2 ds d\mu \\ &= \int_a^b |b_1(\mu)|^2 \int_a^b |b_1(s)|^2 |\tfrac{e^{-x(\mu+s)}}{\mu+s}|^2 ds d\mu, \end{aligned}$$

ahora ya μ y s son mayores o igual que a, se tiene

$$\begin{aligned} \tfrac{|e^{-x(\mu+s)}|^2}{|\mu+s|^2} &\leq \tfrac{1}{2|a|} |e^{-2ax}|^2 \\ &= M_1, \text{ para } x \text{ fija}, \end{aligned}$$

donde $M_1 = \frac{1}{2|a|} e^{-4ax}$. Así se tiene que

$$\begin{aligned}\int_a^b d\mu \int_a^b |K_1(\mu,s)|^2 ds &\leq M_1 \int_a^b |b_1(\mu)|^2 \int_a^b |b_1(s)|^2 ds d\mu \\ &\leq \widetilde{M_1} < \infty, \text{ya que } b_1 \in L^2(\Gamma).\end{aligned}$$

Del mismo modo ya que μ y s son menores o igual que b, se tiene

$$\frac{|e^{\lambda(\mu+s)}|^2}{|\mu+s|^2} \leq M_2, \text{para } x \text{ fija},$$

donde $M_2 = \frac{1}{2|a|}e^{4bx}$. Por lo cual

$$\begin{aligned}\int_a^b d\mu \int_a^b |K_2(\mu,s)|^2 ds &\leq M_2 \int_a^b |b_2(\mu)|^2 \int_a^b |b_2(s)|^2 ds d\mu \\ &\leq \widetilde{M_2} < \infty, \text{ya que } b_2 \in L^2(\Gamma).\end{aligned}$$

Entonces por [RS72](Teorema VI.23 p. 210), $\mathbb{X}(x)$ es un operador de Hilbert-Schmidt y por lo tanto compacto. □

De esta manera se ha probado que el operador $\mathbb{X}(x)$ es compacto. De igual manera nótese que $\mathcal{H} = L^2[a,b]$ es un espacio de dimensión infinita, por lo que $\mathbb{X}(x)$ no puede ser invertible de $L^2[a,b]$ en $L^2[a,b]$. Ésto es, a pesar de que el autor del artículo estudiado demuestra que bajos ciertas condiciones sobre b_1 y b_2, $\mathbb{X}(x)$ es inyectivo.

Para ilustrar lo mencionado anteriormente, tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.0.2. Tómese el operador K sobre el siguiente espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(-1,1)$ definido como

$$(K\nu)(x) = \int_{-1}^{1} u(x,t)\nu(t)dt,$$

donde la función u es una función medible a valores complejos que satisface

$$M^2 := \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} |u(x,t)|^2 dt < \infty. \tag{4.1}$$

Por [RS72](Teorema VI.23 p. 210), se tiene que el operador K es Hilbert-Schmidt y por lo tanto compacto. De la desigualdad de Schwarz,

$$||K\nu|| \leq M||x||,$$

donde $||\cdot||$ denota la norma en $\mathcal{H}$. Sea $\{\eta_n\}$ una base ortonormal de vectores en $\mathcal{H}$. Se puede probar que el conjunto ortonormal de vectores $\{\eta_m(x)\eta_\ell(t)\}$ en $L^2((-1,1)\times(-1,1), dxdt)$ es una base ortonormal para este espacio (ver [AR97] p. 78). Por (4.1) se tiene

$$u(x,t) = \sum_{m,\ell} c_{m,\ell}\eta_m(x)\eta_\ell(t); \quad M^2 = \sum_{m,\ell} |c_{m,\ell}|^2,$$

$$c_{m,\ell} = \int_{-1}^{1} \overline{\eta_m(x)}dx \int_{-1}^{1} \overline{\eta_\ell(t)}u(x,t)dt.$$

Tómese u definido por

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x \geq t, \\ 0, & x < t. \end{cases}$$

Se probará que $\sigma(K) = \{0\}$. Sea $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ y $\eta \in Ker(K - \lambda I)$ con

$$\int_{-1}^{t} \eta(s)ds = \lambda\eta(t).$$

Esto implica que η es absolutamente continua y derivable excepto en un conjunto de medida cero (ver [AR97] p. 107). Si se derivan ambos lados de la ecuación anterior, se obtiene

$$\eta(t) = \lambda\eta^{'}(t) \text{ para casi toda } t \in (-1,1).$$

Esta igualdad significa que $\eta^{'}$ también es absolutamente continua (redefiniéndola en un conjunto de medida cero si es necesario) y derivable excepto en un conjunto de medida cero. Procediendo iterativamente, se concluye que η tiene derivadas de todos los órdenes. Es decir, η es una solución clásica a la ecuación diferencial ordinaria

$$\eta(t) = \lambda\eta^{'}(t), \;\; \eta(-1) = 0.$$

Por lo que $\eta = 0$; por consiguiente, $Ker(K - \lambda I) = \{0\}$. Para probar que $Ran(K - \lambda I) = \mathcal{H}$, es suficiente con ver que el rango es denso en $\mathcal{H}$; debido a que el rango es cerrado (ver [AR97] p. 173). Sea $\nu \in C_0^\infty((-1,1))$. La solución a la ecuación

$$\int_{-1}^{t} \eta(s)ds - \lambda\eta(t) = \nu(t),$$

es

$$\eta(t) = \lambda^{-1}e^{t/\lambda}\int_{-1}^{t} \nu(s)ds \in \mathcal{H},$$

es decir, $(K - \lambda)\eta = \nu$, lo cual muestra que el rango es denso. Por lo tanto, $\lambda \notin \sigma(K)$ si $\lambda \neq 0$. Por el Teorema de Liouville, el espectro de un operador acotado nunca es vacío (ver

[AR97] p. 187).

Necesariamente,

$$\sigma(K) = \{0\}.$$

De hecho,

$$RanK = \{\eta | \eta(t) = \int_{-1}^{t} \nu(s)ds \text{ para alguna función } \nu \in \mathcal{H}\}.$$

Este espacio no puede ser todo $\mathcal{H}$, pues en $\mathcal{H}$ hay funciones que no son continuas. Se deduce que $\sigma(K) = \{0\}$. Este único elemento en $\sigma(K)$ no es un eigenvalor. Si $K\nu = 0$, se obtiene que

$$\int_{-1}^{t} \nu(s)ds = 0,$$

así

$$\frac{d}{dt} \int_{-1}^{1} \nu(s)ds = \nu(t) = 0 \text{ casi donde quiera.}$$

Entonces 0 no es eigenvalor de K. Ahora utilizando que $\sigma(K) = \{0\}$ es equivalente a que K sea inyectivo, entonces se ha probado que este operador es inyectivo pero no es sobreyectivo es decir no tiene inversa de su dominio en su codominio. Pero si existe su inversa si se le da como codominio el $RanK$, la cuál esta dada por

$$K^{-1}\nu(t) = \frac{d}{dt}\nu(t).$$

Otra forma de ver lo mencionado anteriormente es suponiendo que $RanK = \mathcal{H}$, entonces si consideramos la función $\sin(nt)$ la cual es continua en $L^2(-1, 1)$, entonces al aplicarle el operador K^{-1} se obtiene

$$\frac{d}{dt} \sin(nt) = n \cos(nt),$$

entonces considerando la norma en $L^2(-1, 1)$, se obtiene que $n \cos(nt)$ no esta acotado es decir

$$\begin{aligned}||n\cos(nt)||^2 &= \int_{-1}^{1} |n\cos(nt)|^2 dt\\ &= |n|^2 \int_{-1}^{1} |\cos(nt)|^2 dt\\ &= |n|^2 \to +\infty, \text{ si } n \to +\infty,\end{aligned}$$

con lo cual se concluye que K^{-1} no es acotado por lo tanto no es invertible de $L^2(-1,1)$ en $L^2(-1,1)$.

Esto nos lleva estudiar el inverso del operador $\mathbb{X}(x)$, para justificar rigurosamente las fórmulas del autor en el caso concreto que el muestra.

Lo que se presenta adelante es que, bajo ciertas condiciones $\mathbb{X}(x)$ tiene inversa si se le da como dominio $L^2[a,b]$ y como codominio el $Ran(\mathbb{X}(x))$.

Es decir $\mathbb{X}' : L^2[a,b] \to Ran(\mathbb{X}(x))$, con la misma regla de correspondencia que $\mathbb{X}$, será un operador biyectivo, y por lo tanto existirá su inverso.

Recordando así, que (3.28) muestra lo siguiente

$$(\mathbb{X}(x)f)(\mu) = -\frac{1}{2}\int_a^b [\frac{b_1(\mu)\overline{b}_1(\mu(s))e^{-(\mu+\bar{\mu}(s))x}}{\mu+\bar{\mu}(s)} + \frac{b_2(\mu)\overline{b}_2(\mu(s))e^{(\mu+\bar{\mu}(s))x}}{\mu+\bar{\mu}(s)}]f(\mu(s))ds.$$

Entonces derivando ambos lados con respecto a la variable x, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left((\mathbb{X}(x)f)(\mu)\right) &= \frac{1}{2}b_1(\mu)\int_a^b e^{-(\mu+s)x}\overline{b}_1(s)f(s)ds + -\frac{1}{2}b_2(\mu)\int_a^b e^{(\mu+s)x}\overline{b}_2(s)f(s)ds\\ &= \frac{1}{2}b_1(\mu)c_1(x)e^{-\mu x} - \frac{1}{2}b_2(\mu)c_2(x)e^{\mu x},\end{aligned}$$

donde $c_1(x) = \int_a^b e^{-sx}\overline{b}_1(s)f(s)ds$ y $c_2(x) = \int_a^b e^{sx}\overline{b}_2(s)f(s)ds$

Es decir

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((\mathbb{X}(x)f)(\mu)\right) = \frac{1}{2}b_3(\mu)\left(c_2(-x)e^{-\mu x} - c_2(x)e^{\mu x}\right),$$

considerando $b_1 = b_2 = b_3$.

Así se tiene

$$\frac{2}{b_3(\mu)} \frac{\partial}{\partial x} \left((\mathbb{X}(x) f)(\mu) \right) = c_2(-x) e^{-\mu x} - c_2(x) e^{\mu x}.$$

Nombrando a $\eta(x, \mu) = \frac{2}{b_3(\mu)} \frac{\partial}{\partial x} \left((\mathbb{X}(x) f)(\mu) \right)$,

lo que es lo mismo

$$\eta(x, \mu) = c_2(-x) e^{-\mu x} - c_2(x) e^{\mu x}.$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\eta(x, \mu) \right) = x \left(-c_2(-x) e^{-\mu x} - c_2(x) e^{\mu x} \right),$$

es decir

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\eta(x, \mu) \right) = \left(-c_2(-x) e^{-\mu x} - c_2(x) e^{\mu x} \right).$$

Por lo tanto, se tiene

$$\eta(x, \mu) + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\eta(x, \mu) \right) = -2 c_2(x) e^{\mu x}. \tag{4.2}$$

De esta forma

$$\frac{-e^{\mu x}}{2} \left(\eta(x, \mu) + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\eta(x, \mu) \right) \right) = c_2(x).$$

Por lo tanto se tiene que la función c_2 depende del operador $\mathbb{X}(x)$.

Para verificar esta fórmula basta derivar ambos lados respecto a μ, es decir

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (\eta(x, \mu)) = -x \left(c_2(-x) e^{-\mu x} + c_2(x) e^{\mu x} \right).$$

Así

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} (\eta(x, \mu)) = x^2 \left(c_2(-x) e^{-\mu x} - c_2(x) e^{\mu x} \right).$$

Por lo cual

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\mu}c_2(x) &= \Bigg(-\frac{e^{-\mu x}}{2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\eta(x,\mu)\right) + \eta(x,\mu)\left(\lambda\frac{e^{-\mu x}}{2}\right) \\
&\quad +\frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}(\eta(x,\mu))\left(-\frac{e^{-\mu x}}{2}\right) + \frac{1}{x}\left(x\frac{e^{-\mu x}}{2}\frac{\partial}{\partial\mu}(\eta(x,\mu))\right)\Bigg) \\
&= \Big(-\frac{e^{-\mu x}}{2}\left(-x\left(c_2(-x)e^{-\mu x}+c_2(x)e^{\mu x}\right)\right) \\
&\quad +\frac{\lambda e^{\mu x}}{2}\left(c_2(-x)e^{-\mu x}-c_2(x)e^{\mu x}\right) \\
&\quad -\frac{1}{x}\frac{e^{-\mu x}}{2}\left(x^2\left(c_2(-x)e^{-\mu x}-c_2(x)e^{\mu x}\right)\right) \\
&\quad +\frac{e^{-\mu x}}{2}\left(-x\left(c_2(-x)e^{-\mu x}+c_2(x)e^{\mu x}\right)\right)\Big) \\
&= \Big(x\frac{e^{-2x\mu}}{2}c_2(-x)+\frac{x}{2}c_2(x)+x\frac{e^{-2\mu x}}{2}c_2(-x)-\frac{x}{2}c_2(x) \\
&\quad -x\frac{e^{-2\mu x}}{2}c_2(-x)+\frac{x}{2}c_2(x)-x\frac{e^{-2\mu x}}{2}c_2(-x)-\frac{x}{2}c_2(x)\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

De esta forma se tiene la validez de la ecuación (4.2).

Ejemplo 4.0.3. Considérese $b_3(t) = t$, $f(t) = 1 + t + t^2$, $a = 1$ y $b = 2$. Entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{X}(x)f)(\mu) &= -\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{xe^{-(\mu+s)x}}{\mu+s}(s)(1+s+s^2)ds - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{xe^{(\mu+s)x}}{\mu+s}(s)(1+s+s^2)ds \\
&= \frac{1}{2x^3}\mu\Bigg(- e^{(\mu+s)}\left(2+(-1+2s+\mu)x+(1+s+s^2-\mu-\mu s+\mu^2)x^2\right) \\
&\quad +e^{-(\mu+s)x}\Big(2+(1+2s-\mu)x+(1+s+s^2-\mu-\mu s+\mu^2)x^2 \\
&\quad +e^{(\mu+s)x}\mu(1-\mu+\mu^2)x^3 Ei(-(\mu+s)x)\Big) \\
&\quad +\mu(1-\mu+\mu^2)x^3 Ei((\mu+s)x)\Bigg)\Bigg|_{s=1}^{s=2} \\
&= \Bigg(\frac{\mu}{x^3}e^{-(\mu+s)x} - \frac{\mu}{x^3}e^{(\mu+s)x} + \frac{\mu}{2x^2}e^{-(\mu+s)x} + \frac{\mu}{2x^2}e^{(\mu+s)x} + \frac{\mu s}{x^2}e^{-(\mu+s)x} \\
&\quad +\frac{\mu s}{x^2}e^{(\mu+s)x} - \frac{\mu^2}{2x^2}e^{-(\mu+s)x} - \frac{\mu^2}{2x^2}e^{(\mu+s)x} + \frac{\mu}{2x}e^{-(\mu+s)x} - \frac{\mu}{2x}e^{(\mu+s)x} \\
&\quad +\frac{\mu s}{2x}e^{-(\mu+s)x} - \frac{\mu s}{2x}e^{(\mu+s)x} + \frac{\mu s^2}{2x}e^{-(\mu+s)x} - \frac{\mu s^2}{2x}e^{(\mu+s)x} - \frac{\mu^2}{2x}e^{-(\mu+s)x} \\
&\quad +\frac{\mu^2}{2x}e^{(\mu+s)x} - \frac{\mu^2 s}{2x}e^{-(\mu+s)x} + \frac{\mu^2 s}{2x}e^{(\mu+s)x} + \frac{\mu^3}{2x}e^{-(\mu+s)x} - \frac{\mu^3}{2x}e^{(\mu+s)x} \\
&\quad +\frac{1}{2}(\mu^2-\mu^3+\mu^4)\int_{-\infty}^{-(\mu+s)x}\frac{e^t}{t}dt + \frac{1}{2}(\mu^2-\mu^3+\mu^4)\int_{-\infty}^{(\mu+s)x}\frac{e^t}{t}dt\Bigg)\Bigg|_{s=1}^{s=2},
\end{aligned}
$$

donde se uso la definición de Ei (2.9.1). Para simplificar cálculos, se obtendrá $\frac{\partial}{\partial x}(\mathbb{X}(x)f)(\mu)$, donde se utilizara la Proposición (2.9.2) para derivar la función Ei y posteriormente se evaluará en los correspondientes limites de integración, es decir

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\mathbb{X}(x)f)(\mu)\Big|_{s=1}^{s=2} &= \Bigg(-\frac{1}{2x^4}e^{-(\mu+s)x}\mu\Big(6+(2+6s)x+(1+2s+3s^2)x^2 \\
&\quad +(s+s^2+s^3+\mu-\mu^2+\mu^3)x^3 + e^{2(\mu+s)x}\Big(-6+(2+6s)x \\
&\quad -(1+2s+3s^2)x^2+(s+s^2+s^3+\mu-\mu^2+\mu^3)x^3\Big)\Big) \\
&\quad +\frac{1}{2}(\mu^2-\mu^3+\mu^4)\left(-(\mu+s)\frac{e^{-(\mu+s)x}}{-(\mu+s)x}\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}(\mu^2-\mu^3+\mu^4)\left((\mu+s)\frac{e^{(\mu+s)x}}{(\mu+s)x}\right)\Bigg)\Bigg|_{s=1}^{s=2}.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\mathbb{X}(x)f)(\mu) &= \frac{1}{2x^4}e^{-(2+\mu)x}\mu\Big(-6-14x-17x^2-14x^3\\ &\quad +e^{2(2+\mu)x}(6-14x+17x^2-14x^3)+e^{(3+2\mu)x}(-6+8x-6x^2+3x^3)\\ &\quad +e^{x}(6+8x+6x^2+3x^3)\Big).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\eta(x,\mu) &= \frac{2}{\mu}\Bigg(\frac{1}{2x^4}e^{-(2+\mu)x}\mu\Big(-6-14x-17x^2-14x^3\\ &\quad +e^{2(2+\mu)x}(6-14x+17x^2-14x^3)+e^{(3+2\mu)x}(-6+8x-6x^2+3x^3)\\ &\quad +e^{x}(6+8x+6x^2+3x^3)\Big)\Bigg)\\ &= \frac{1}{x^4}e^{-(2+\mu)x}\Big(-6-14x-17x^2-14x^3+e^{2(2+\mu)x}(6-14x+17x^2-14x^3)\\ &\quad +e^{(3+2\mu)x}(-6+8x-6x^2+3x^3)+e^{x}(6+8x+6x^2+3x^3)\Big).\end{aligned}$$

De esta manera

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial\mu}\eta(x,\mu) &= \frac{1}{x}\Bigg(\frac{e^{(2+\mu)x}}{x^3}\Big(6-14x+17x^2+e^{-x}(-6+8x-6x^2+3x^3)\\ &\quad -e^{-(3+2\mu)x}(6+8x+6x^2+3x^3)+e^{-(2+\mu)x}(6+14x+17x^2+14x^3)\Big)\Bigg).\end{aligned}$$

Con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned}-\frac{e^{-\mu x}}{2}\left(\eta(x,\mu)+\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial\mu}\eta(x,\mu)\right) &= \frac{e^{x}}{x^4}\Big(6-8x+6x^2-3x^3\\ &\quad +e^{x}(-6+14x-17x^2+14x^3)\Big).\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int_1^2 e^{sx}(s+s^2+s^3)ds \\ &= \frac{e^x}{x^4}\left(6-8x+6x^2-3x^3+e^x(-6+14x-17x^2+14x^3)\right). \end{aligned}$$

Es decir

$$-\frac{e^{-\mu x}}{2}\left(\eta(x,\mu)+\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial\mu}\eta(x,\mu)\right)=c_2(x).$$

Con lo que se muestra que la función c_2 depende del operador $\mathbb{X}(x)$.

4.1. Caracterización del operador $\mathbb{X}^{-1}(x)$

Por la sección anterior considerando $b_1=b_2=b_3$, se tiene que

$$c_2(x)=\int_a^b e^{sx}\bar{b}_3(s)f(s)ds.$$

Es decir

$$\int_a^b e^{sx}z(s)ds=\left(e^{x(\cdot)},z(\cdot)\right)_{L^2[a,b]}=c_2(x), \quad \text{donde } z(s)=\bar{b}_3(s)f(s)$$

Ahora utilizando la expansión de Maclaurin para $c_2(x)$, se tiene

$$\begin{aligned} c_2(x) &= c_2(0)+xc_2'(0)+\frac{x^2}{2}c_2''(0)+\cdots \\ &= \int_a^b z(s)ds + x\left(\int_a^b sz(s)ds\right)+\frac{x^2}{2}\left(\int_a^b s^2z(s)ds\right)+\cdots \end{aligned}$$

Nótese que $\{1,x,x^2,\ldots\}$ es la base canónica para el conjunto de los polinomios y además es un conjunto denso en $L^2[a,b]$.

De esta manera utilizando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt se puede obtener un conjunto $\{\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3,\ldots\}$ el cual sea un conjunto ortonormal y denso en $L^2[a,b]$.

Ahora por el Teorema (2.3.2) se sabe que

$$\begin{aligned} z(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} (\upsilon_j, z(x))\, \upsilon_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{j} \alpha_{ij} x^{i-1}, z(x) \right) \left(\sum_{i=1}^{j} \alpha_{ij} x^{i-1} \right). \end{aligned}$$

Entonces

$$f(x) = \bar{b}^{-1}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{j} \alpha_{ij} x^{i-1}, z(x) \right) \left(\sum_{i=1}^{j} \alpha_{ij} x^{i-1} \right)$$

Por lo tanto

$$\left(\mathbb{X}^{-1}(x) f\right)(\mu) = \bar{b}^{-1}(\mu) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{i=1}^{j} \alpha_{ij} \left(\mu^{i-1}, z(\mu)\right) \right) \left(\sum_{i=1}^{j} \alpha_{ij} \mu^{i-1} \right) \right). \tag{4.3}$$

Ejemplo 4.1.1. Considerando el Ejemplo (4.0.3), se obtuvo que para $b_3(t) = t$, $f(t) = 1 + t + t^2$, $a = 1$ y $b = 2$.

$$c_2(x) = \frac{e^x}{x^4} \left(6 - 8x + 6x^2 - 3x^3 + e^x(-6 + 14x - 17x^2 + 14x^3)\right)$$

Por proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt se obtiene que la base ortonormal para $\{1, t, t^2, ...\}$ con el producto interior

$$(f, g) = \int_1^2 f(t) \bar{g}(t) dt,$$

esta dada por

$$\left\{1, \sqrt{12}\left(t - \frac{3}{2}\right), \sqrt{5}\left(6t^2 - 18t - 6\left(\frac{7}{3} - \frac{9}{2}\right)\right), \sqrt{7}\left(20t^3 - 90t^2 + 132t - 63\right), \ldots\right\}.$$

Por otra parte encontrando la expansión de Taylor en $x = 0$ de $c_2(x)$, se tiene

$$c_2(x) = \frac{91}{12} + \frac{737}{60}x + \frac{409}{40}x^2 + \frac{813}{140}x^3 + \cdots.$$

Para simplificar notación se hará que

$$\left(\mathbb{X}^{-1}(x)\mathbb{X}(x)\right)(z(t)) = \mathbb{W}(z(t)), \text{ donde } z(t) = 1 + t + t^2.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{W}(z(t)) &= \frac{1}{t}\Bigg((1,z(t)) + \left(\sqrt{12}\left(t-\frac{3}{2}\right), z(t)\right)\sqrt{12}\left(t-\frac{3}{2}\right)\\
&\quad + \left(\sqrt{5}\left(6t^2-18t-6\left(\frac{7}{3}-\frac{9}{2}\right)\right), z(t)\right)\sqrt{5}\left(6t^2-18t-6\left(\frac{7}{3}-\frac{9}{2}\right)\right)\\
&\quad + \left(\sqrt{7}\left(20t^3-90t^2+132t-63\right), z(t)\right)\sqrt{7}\left(20t^3-90t^2+132t-63\right)\Bigg)\\
&= \frac{1}{t}\Bigg((1,z(t)) + \left(\sqrt{12}(t,z(t)) - \frac{3\sqrt{12}}{2}(1,z(t))\right)\sqrt{12}\left(t-\frac{3}{2}\right)\\
&\quad + \left(6\sqrt{5}(t^2,z(t)) - 18\sqrt{5}(t,z(t)) - 6\sqrt{5}\left(\frac{7}{3}-\frac{9}{2}\right)(1,z(t))\right)\sqrt{5}\Bigg(6t^2\\
&\quad -18t-6\left(\frac{7}{3}-\frac{9}{2}\right)\Bigg) + \Bigg(\sqrt{7}\Big(20(t^3,z(t)) - 90(t^2,z(t)) + 132(t,z(t))\\
&\quad -63(1+z(t))\Big)\Bigg)\sqrt{7}\left(20t^3-90t^2+132t-63\right)\Bigg)\\
&= \frac{1}{t}\Bigg(\frac{91}{12} + \left(\sqrt{12}\left(\frac{737}{60}\right) - \frac{3\sqrt{12}}{2}\left(\frac{91}{12}\right)\right)\sqrt{12}\left(t-\frac{3}{2}\right)\\
&\quad + \left(6\sqrt{5}\left(\frac{409}{20}\right) - 18\sqrt{5}\left(\frac{737}{60}\right) - 6\sqrt{5}\left(\frac{7}{3}-\frac{9}{2}\right)\left(\frac{91}{12}\right)\right)\sqrt{5}\Bigg(6t^2\\
&\quad -18t-6\left(\frac{7}{3}-\frac{9}{2}\right)\Bigg) + \Bigg(20\sqrt{7}\left(\frac{813}{140}\right) - 90\sqrt{7}\left(\frac{409}{20}\right) + 132\sqrt{7}\left(\frac{737}{60}\right)\\
&\quad -63\sqrt{7}\left(\frac{91}{12}\right)\Bigg)\sqrt{7}\left(20t^3-90t^2+132t-63\right)\Bigg) \qquad (4.4)\\
&= \frac{1}{t}(t+t^2+t^3)\\
&= 1+t+t^2,
\end{aligned}
$$

donde para obtener (4.4) se usaron los coeficientes de la expansión de Taylor para c_2 en $t=0$.

De esta manera se tiene que $\mathbb{W}(z(t)) = I(z(t))$, es decir

$$\left(\mathbb{X}^{-1}(x)\mathbb{X}(x)\right)(z(t)) = I(z(t)).$$

Con lo cual se cumple que el operador mostrado en (4.3) es el inverso de $\mathbb{X}(x)$ para $b_1 = b_2$.

5. CONCLUSIONES

1. Se estudió el método desarrollado por Andrey Melnikov, para resolver ecuaciones no lineales. Este método tiene algunas similitudes con el de Zackarov-Shabbath en teoría de la dispersión inversa. Fue necesario completar los argumentos del articulo para desarrollar de manera concreta las condiciones explicitas que definen a un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$.

2. Una vez que se analizaron las condiciones que definen un conjunto regular $\mathfrak{V}_{NLS}$, fue posible calcular explicitamente soluciones a la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS). Estas soluciones están asociadas a solitones, que en la física se estudian por estar asociados a fenómenos interesantes.

3. Se obtuvo una fórmula del operador inverso para la familia de operadores integrales (3.28).

4. Como trabajo futuro se buscará ampliar la fórmula (4.3), involucrando la dependencia en la variable temporal.

5. Otro posible tema futuro es el determinar si es posible generalizar el procedimiento usado para familia (3.28) en otros casos.

Bibliografía

[AL76] M. Ablowitz y J. Ladik, Stud. Appl. Math. 55 (1976), 213.

[AR97] J. H. Arredondo Ruiz, Teoría de operadores con aplicaciones a la física, Universidad Autónoma Metropolitana (Col. Libros de Texto), 1997

[BGR90] J. Ball, I. Gohberg, y L. Rodman. *Interpolation of rational matrix functions* Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[DS13] D. Dubbers y H.-J. Stöckmann. *Quatum Physics: The Bottonm-Up Approach* From the Simple Two-Level System to Irreducible Representations. Springer, 2013.

[KK69] V. I. Karpman y E. M. Krushkal, *Modulated waves in nonlinear dispersive media*, Sooiot Phys. JETP 28 (1969), 277.

[IG69] M. Krein y I. Gohberg. *Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators.* translations of AMS, 1969.

[HT73] R. H. Hardin y F. D. Tappert, *Applications of the Split-Step Fourier Method to the Numerical Solution of Nonlinear and Variable Coefficient Wave Equations*, SIAM-SIGNUM Fall Meeting. Austin, TX, October 1972; SIAM Rev. Chronicle 15 (1973), 423.

[Ls78] M.S. Livšic. Commuting nonselfadjoint operators and solutions of systems of partial differential equations generated by them, (Russian). *Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSSR*, 91(2):281–284, 1978.

[Ls01] M.S. Livšic. Vortices of 2D systems. *Operator Theory: Advances and Applications*, 123:7–41, 2001.

[Ls58] M.S. Livšic. y M.S. Brodskii: Spectral analysis of non-self-adjoint operators and intermediate systems (Russian). Uspehi Mat. Nauk (N.S.), 13(1 (79)), 3-1-85 (1958).

[Ls95] A.S. Markus, M.S. Livšic, N. Kravitsky y V. Vinnikov: Theory of Commuting Nonselfadjoint Operators. Kluwer Academic Press, Dordrecht (1995).

[Mela] A. Melnikov. On a theory of vessels and the inverse scattering. http://arxiv.org/abs/1103.2392. In preparation.

[Melc] A. Melnikov. On construction of solutions of evolutionary Non Linear Schrödinger equation . http://arxiv.org/abs/1209.0179. In preparation.

[Melb] A. Melnikov. Solution of the KdV equation using evolutionary vessels. http://arxiv.org/abs/1110.3495. In preparation.

[Mel09] A. Melnikov. *Overdetermined 2D systems invariant in one direction and their transfer functions*. PhD thesis, Ben Gurion University, 2009.

[Mel11] A. Melnikov. Finite dimensional Sturm Liouville vessels and their tau functions. *IEOT*, 74(4):455–490, 2011.

[MVa] A. Melnikov y V. Vinnikov. Overdetermined 2D systems invariant in one direction and their transfer functions. http://arXiv.org/abs/0812.3779. In preparation.

[MVb] A. Melnikov y V. Vinnikov. Overdetermined conservative 2D systems, invariant in one direction and a generalization of Potapov's theorem. http://arxiv.org/abs/0812.3970. In preparation.

[RS72] M. Reed y B. Simon, *Method of Modern Mathematical Physics*, Vol. I, New York-San Francisco-London, Academic Press, 1972.

[RY07] B. Rynne y M.A. Youngson, *Linear functional analysis*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2007.

[SY74] J. Satsuma y N. Yajima, *Initial value problems of one-dimensional self-modulation of nonlinear waves in dispersive media*, Prog. Theor. Phys. Supp. P. 55 (1974).

[S06] D. Somasundaram, *A First Course in Functional Analysis*, Alpha Science International Ltd, 2006.

[SO87] J. Spanier y K. B. Oldham *An Atlas of Functions*, Springer-Verlang, 1987.

[T81] F. Tappert, *Private communication*, 1981.

[YOSN75] N. Yajima, M. Oikawa, J. Satsuma y C. Namba, *Modulated Langmiur waves and nonlinear landau damping*, Rep. Res. Inst. Appl. Mech. XXII, No. 70 (1975).

[YO97] N. Yajima y A. Outi, *A new example of stable solitary waves*, Prog. Theor. Phys. 45 (1971). 1997.

[ZABŠ74] V. E. Zacharov y A. B. Šabbath. Integration of the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem (Russian). *Fun. Anal.*, 8(3):43–53, 1974. Translation in Funct. Anal. Appl., 1974, 8:3, 226–235

[ZABŠ72] V. E. Zacharov y A. B. Šabbath. Exact Theory of Two-Dimensional Self-Focusing and One- Dimensional Self-Modulation of Waves in Nonlinear Media, Soviet Phys. JETP 34 (1972), 62-69.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ANÁLISIS DE ECUACIONES DE EVOLUCIÓN CON MÉTODOS DE ESPACIOS DE HILBERT

Tesis que presenta
José Antonio Gallegos Urenda
para obtener el grado de
Maestro en Ciencias Matemáticas

esor: DR. JUAN HÉCTOR ARREDONDO RUIZ

urado Calificador:

residente:	DR. SLAVISA DJORDJEVIC	BUAP
ecretario:	DRA. MARÍA DE LOURDES PALACIOS FABILA	UAM-I
ocal:	DR. JUAN HÉCTOR ARREDONDO RUIZ	UAM-I

México, D.F. 13 de Diciembre 2013