



DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERIAS

MEDICIÓN DE LA CURVATURA Y LA TORSIÓN PARA DETECTAR EL CAMPO GRAVITOMAGNÉTICO

TESIS PRESENTADA POR SAÚL SUÁREZ VALDEZ
PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)
ASESOR DR. ABEL CAMACHO QUINTANA

JURADO CALIFICADOR:

PRESIDENTE: DR. YURI BONDER GRIMBERG
SECRETARIO: DR. ABEL CAMACHO QUINTANA
VOCAL: DR. JUAN CARLOS HIDALGO CUELLAR

2022

Departamento de Física



*Dedicado a
mi familia*

Índice general

Agradecimientos	IV
Introducción	1
1. Teoría linealizada de la gravedad	4
1.1. Linealización de las ecuaciones de Einstein	6
1.2. Solución de la ecuación de onda en el vacío	12
1.3. La norma TT	15
1.3.1. La onda plana en dirección del eje z	15
1.3.2. El operador de proyección	20
1.4. ¿Qué le pasa a una partícula al fijar la norma TT?	22
1.4.1. Polarización de las ondas gravitacionales	26
2. Ondas gravitacionales	32
2.1. Generación de radiación gravitacional	32
2.2. Momentos multipolares de una partícula puntual	37
2.2.1. Momento cuadrupolar de una partícula puntual	41
2.2.2. Momentos monopolar, dipolar y leyes de conservación	46
2.2.3. Validez del límite de bajas velocidades	48
2.3. Campo magnético y campo gravitoelectromagnético	49
2.3.1. Magnetismo	50
2.3.2. El campo gravitomagnético	52
3. Campo producido por una partícula masiva en un campo gravitoelectromagnético externo	56

3.1. Partícula en un campo electromagnético	56
3.2. Partícula masiva en un campo gravitoelectromagnético externo	61
4. Conclusión	67
A. Ecuación de Einstein en el límite de campo débil	80
Bibliografía	85

Agradecimientos

La elaboración de este trabajo no habría sido posible sin el apoyo y supervisión del Dr. Abel Camacho Quintana, quien a lo largo de los últimos años me ha compartido su pasión por la física y me ha enseñado que “el diablo está en los detalles”, por lo cual es la primera persona a la que le agradezco.

También quiero agradecer a la Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa, por ser mi casa de estudios en la licenciatura y en esta etapa de posgrado. De igual manera agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca proporcionada para realizar los estudios de maestría, registrada bajo el CVU: 885842.

Agradezco las valiosas observaciones y correcciones de mis sinodales, el Dr. Yuri Bonder Grimberg y el Dr. Juan Carlos Hidalgo Cuellar.

No puedo terminar sin agradecer a mi familia, quienes me han apoyado siempre, sin ellos no habría sido posible llegar hasta aquí. Es a ellos a quien dedico este trabajo.

Introducción

En 1915 Albert Einstein publicó la teoría general de la relatividad, descrita mediante la ecuación de campo [16]

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

en donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, G la constante de gravitación, c la rapidez lumínica y $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía momento. Esta ecuación (1) presenta la estrecha relación entre la presencia de materia y la deformación del espacio-tiempo, siendo esta deformación la causante de los efectos gravitacionales.

A pesar de la complejidad de la ecuación de campo, en 1916 el físico alemán Karl Schwarzschild encontró la primera solución exacta a estas ecuaciones [30]. La dificultad de encontrar soluciones exactas a las ecuaciones de campo radica en que son ecuaciones diferenciales altamente no lineales y acopladas, es decir, los términos de autointeracción en el potencial se encuentran siempre presentes. Sin embargo, en buena parte de los fenómenos astrofísicos el campo gravitacional es lo suficientemente débil como para poder despreciar dichos términos, dejando el potencial a primer orden, lo cual permite simplificar los cálculos. Es a esto a lo que se le conoce como teoría linealizada de la gravedad.

Esta teoría linealizada de la gravitación se presenta en algunos libros de texto con poca profundidad [33]. Sin embargo, es aquí en donde se encuentran un par de los efectos importantes que predice la relatividad general. Uno de ellos es el cam-

po gravitomagnético, cuyos efectos fueron medidos gracias a un método propuesto por el físico italiano Ignazio Ciufolini usando los datos de los satélites LAGEOS y LAGEOS-2 en 2004 [10], por lo cual recibió en 2010 el premio y medalla Occhialini que entrega la UK Institute of Physics y la Italian Physical Society por “proporcionar una confirmación experimental adicional de la teoría de la relatividad general de Einstein mediante el uso de satélites de alcance láser para estudiar y medir el frame-dragging”. Otra de las predicciones es la de las ondas gravitacionales, siendo estas observadas por primera vez en septiembre de 2015 [2], y por lo cual los científicos estadounidenses Rainer Weiss, Barry Barish y Kip Thorne fueron galardonados con el premio nobel de física 2017 [1], aunque cabe destacar que las ondas gravitacionales observadas son más complejas que las predichas por la gravedad linealizada.

Al calcular la forma linealizada de las ecuaciones de Einstein las expresiones que se obtienen son bastante similares a las ecuaciones de Maxwell para la teoría electromagnética. Esta similitud entre ambas teorías se mantiene salvo constantes y con la diferencia de que la electrodinámica es una teoría de espín 1, cuyo campo electromagnético se describe a través del cuadrivector de potencial A^μ , mientras que la teoría linealizada la gravedad está descrita por un tensor de segundo rango $\bar{h}_{\mu\nu}$, es decir, es una teoría de espín 2. Este parecido entre ambas teorías permite obtener resultados para problemas en gravitación a partir de tratar ambas teorías de forma análoga y usando resultados y teoremas ya conocidos en electromagnetismo.

La presente tesis pretende dar un análisis de la teoría linealizada poniendo especial atención en la física que se esconde tras los cálculos que presentan algunos de los libros de texto [23][7][33].

Por otra parte se presenta también un estudio de la radiación producida por las ondas gravitacionales a través de los momentos multipolares de la fuente y su interpretación física, igualmente usando la aproximación de campo débil con la aproximación adicional de bajas velocidades comparadas con la rapidez lumínica en los elementos que forman la fuente.

Además, se presentan los resultados de la curva que describe la trayectoria de una partícula en el espacio-tiempo bajo los efectos de un campo gravitoelectromagnético, los campos gravitoelectrónico y gravitomagnético que genera la partícula, el análogo gravitacional del vector de Poynting, el triedro de Frenet-Serret asociado a la trayectoria de la partícula, su curvatura y su torsión. Todo esto en el contexto de la teoría linealizada de la gravedad, para finalmente hacer una propuesta experimental para la detección indirecta del campo gravitomagnético de la fuente, a través de analizar los efectos que genera esta en el momento angular de un giroscopio. Este es un problema que no se encuentra planteado en la literatura especializada en el tema, y que puede ser resuelto a partir de adecuar el uso de los métodos matemáticos usados para solucionar su problema análogo en el caso del electromagnetismo.

A lo largo del texto se emplearán por simplicidad unidades geometrizadas ($G = c = 1$), sin embargo para algunos cálculos será necesario cambiar de unidades lo cual se especificará en cada caso.

Capítulo 1

Teoría linealizada de la gravedad

La expresión propuesta por Albert Einstein para describir el campo gravitacional como consecuencia de la interacción entre la materia y la geometría del espacio-tiempo (1), se puede escribir usando unidades geometrizadas de la siguiente manera

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

en donde del lado izquierdo de la igualdad se encuentra el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, el cual contiene la información relacionada a la geometría del espacio-tiempo y que se define como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.2)$$

con $g_{\mu\nu}$ el tensor métrico, $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci y R el escalar de Ricci. Estos se obtienen a partir de la contracción de los índices, usando el tensor métrico y la convención de suma de Einstein, del tensor de Riemann que está definido en términos del tensor métrico de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} &= \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\epsilon\mu}\Gamma^{\epsilon}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\epsilon\nu}\Gamma^{\epsilon}_{\beta\mu} \\
&= \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu})
\end{aligned} \tag{1.3}$$

El tensor y el escalar de Ricci se obtienen de la contracción de este tensor de Riemann con la métrica

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}, \tag{1.4}$$

$$R \equiv g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = R^{\beta}_{\beta}. \tag{1.5}$$

Del lado derecho de la igualdad se encuentra el tensor de energía-momento, $T_{\mu\nu}$, cuyas componentes contienen la información de la fuente que produce el campo gravitacional

$$T_{\mu\nu} = \rho U_{\mu}U_{\nu}, \tag{1.6}$$

siendo ρ la densidad de energía y U_{μ} las componentes del 4-vector de velocidad. Esta elección del tensor de energía-momento es una aproximación, la cual se conoce como libre de presión. En esta aproximación se desprecian las interacciones entre los elementos que conforman la fuente.

La ecuación tensorial para describir el campo gravitacional que se muestra en la expresión (1.1) engloba 10 ecuaciones diferenciales acopladas, esto debido a que el tensor de Einstein y el de energía-momento son simétricos. Además de la restricción de simetría, el tensor de Einstein también cumple las identidades de Bianchi

$$G_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0, \quad (1.7)$$

lo que implica del lado derecho de (1.1) una de las leyes primordiales de la física, que es la ley de conservación del tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0. \quad (1.8)$$

Esto quita 4 ecuaciones, dejando solamente 6 ecuaciones linealmente independientes de las 10 iniciales.

Aun con esta simplificación las ecuaciones son altamente no lineales, lo cual vuelve complicado el buscar soluciones exactas.

Es debido a esta complicación que suelen proponerse aproximaciones que simplifican (1.1), como la que se presenta a continuación.

1.1. Linealización de las ecuaciones de Einstein

El campo gravitacional es, en la mayoría de los casos, bastante débil, lo cual permite simplificar las ecuaciones y aun así obtener bastante información y predicción de fenómenos no existentes en la ecuación de campo propuesta por Newton

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho. \quad (1.9)$$

Para poder hablar de gravedad linealizada es necesario que el campo gravitacional sea suficientemente débil, como ya se mencionó antes. Esta condición se refleja en la propuesta de la métrica a utilizar, la cual, siguiendo el texto y notación del libro de

Bernard Schutz [33], estará dada por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (1.10)$$

en donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica plana de Minkowski con signatura +2

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

más una perturbación, $h_{\mu\nu}$, cuyo módulo es muy pequeño comparado con las entradas de la métrica plana, es decir

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (1.12)$$

La importancia de proponer esta forma de la métrica radica en que el tensor de Einstein está definido en términos del tensor métrico y de sus dos primeras derivadas contenidas en el tensor y el escalar de Ricci. Estas cantidades pueden ser escritas en términos de la métrica propuesta y manteniéndolos a orden lineal en $h_{\mu\nu}$, es decir, ignorando los términos no lineales, como se muestra a continuación

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\nu,\mu\alpha}^{\alpha} + h_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - h_{,\mu\nu}), \quad (1.13)$$

$$R = h_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - h_{,\alpha}^{\alpha}. \quad (1.14)$$

Haciendo uso de estas expresiones del tensor y escalar de Ricci linealizados se puede

obtener el tensor de Einstein linealizado

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (h_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} - h_{,\mu\nu}) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{,\beta}). \quad (1.15)$$

Con las cantidades linealizadas obtenidas se puede regresar a la ecuación de campo para reescribirla como

$$2G_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu},$$

$$(h_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha} + h_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} - h_{,\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu} (h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{,\beta}) = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.16)$$

Se puede ver que aun haciendo esta linealización de la métrica la ecuación que describe el campo gravitacional sigue siendo complicada. Con la finalidad de simplificar esta ecuación se define una nueva cantidad:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (1.17)$$

en donde h y \bar{h} corresponden a las trazas de $h_{\mu\nu}$ y $\bar{h}_{\mu\nu}$ respectivamente, las cuales se calculan a partir de la contracción de sus índices

$$h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h^\nu{}_\nu. \quad (1.18)$$

Nótese que para contraer los índices en la expresión anterior se utiliza la métrica minkowskiana y no la más general $g_{\mu\nu}$, esto para preservar las expresiones a orden lineal en $h_{\mu\nu}$.

A (1.17) se le conoce en algunos textos como la perturbación de traza-invertida o en inglés “*trace reverse*” de $h_{\mu\nu}$, debido a que al calcular su traza se obtiene

$$\bar{h} \equiv \eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = -h, \quad (1.19)$$

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}, \quad (1.20)$$

con lo cual al sustituir $h_{\mu\nu}$ en términos de $\bar{h}_{\mu\nu}$ se puede reescribir nuevamente la ecuación de campo dejando menos términos que en la última versión que se había obtenido en (1.16)

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} - \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} + \bar{h}_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_{,\mu} = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.21)$$

La ecuación ahora luce más sencilla, sin embargo si se fija la condición $\bar{h}{}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ es posible reducirla aun más. A esta condición se le conoce como *Norma de Lorentz*, esto por su similitud con la condición de norma usada en electrodinámica, la cual recibe el mismo nombre. Cabe mencionar que esta norma no fue propuesta por Hendrik Lorentz sino por Ludwig Lorenz [37], sin embargo el parecido en los apellidos es lo que ha generado confusión.

Una vez habiendo fijado esta condición de norma se eliminan 4 grados de libertad. La ecuación de campo que queda como resultado mantiene únicamente el primer término del lado izquierdo de la igualdad, y es a esta expresión a la cual se le conoce como *Ecuación de Campo Linealizada de Einstein* y corresponde a una ecuación de onda

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.22)$$

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0, \quad (1.23)$$

siendo \square el operador diferencial de D'Alembert que está definido como

$$\square = \partial^\alpha \partial_\alpha. \quad (1.24)$$

Las ecuaciones (1.22) y (1.23) definen la dinámica de la teoría linealizada de la gravitación.

Ante este resultado es conveniente hacerse la pregunta ¿Siempre es posible encontrar un sistema coordenado donde esto se cumpla? La respuesta a esto es sí y es posible mostrarlo siguiendo el cálculo como lo desarrolla Schutz en el capítulo 8 de su libro [33]. Primeramente considérese un ${}^{old}\bar{h}_{\mu\nu}$ arbitrario que no obedezca la norma de Lorentz

$${}^{old}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\nu} \neq 0. \quad (1.25)$$

Aplicando un cambio de norma de la forma

$$x^\mu \longrightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \xi^\mu(x^\beta) \quad ; \quad |\xi^\mu_{,\beta}| \ll 1, \quad (1.26)$$

lo cual es un cambio en las coordenadas que mantiene la condición (1.12). Bajo esta modificación la perturbación ${}^{old}\bar{h}_{\mu\nu}$ también se ve modificada

$${}^{old}\bar{h}_{\mu\nu} \longrightarrow {}^{new}\bar{h}_{\mu\nu} = {}^{old}\bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\alpha}. \quad (1.27)$$

Tomando la divergencia de este resultado

$$\begin{aligned} {}^{new}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} &= {}^{old}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} - \xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} - \xi^{\nu,\mu}{}_{,\nu} + \eta^{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\alpha}{}_{,\nu} \\ &= {}^{old}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} - \xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

si se pide que la nueva perturbación, ${}^{new}\bar{h}^{\mu\nu}$, sí obedezca la norma de Lorentz

$${}^{new}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad (1.29)$$

entonces esto implica que de (1.28) se obtenga lo siguiente

$${}^{old}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} - \xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} = 0 \quad (1.30)$$

$$\therefore \square\xi^{\mu} = {}^{old}\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu}. \quad (1.31)$$

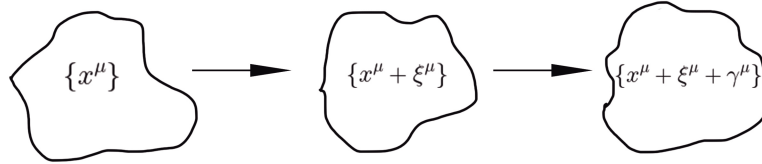
Conociendo ${}^{old}\bar{h}^{\mu\nu}$ y sus derivadas es posible resolver la ecuación (1.31), usando la función de Green asociada, por ejemplo. Sin embargo esto último no define completamente la norma, ya que tenemos una ecuación inhomogénea, la cual no tiene una solución única. A ξ^{μ} siempre se le puede agregar una función que no afecte el resultado

$$\xi^{\mu} \longrightarrow \xi^{\mu} + \gamma^{\mu}, \quad (1.32)$$

esto siempre y cuando γ^μ satisfaga la ecuación de onda homogénea

$$\square\gamma^\mu = 0. \quad (1.33)$$

Ahora sí, una vez determinado completamente el valor de γ^μ se ha usado toda la libertad de norma. Haciendo un recuento de los grados de libertad; de la simetría del tensor de Einstein y de energía-momento, en cuatro dimensiones, el número de ecuaciones se reduce de 16 a 10, de las identidades de Bianchi 4 grados de libertad menos y finalmente de la imposición de la norma de Lorentz quedan solamente 2 grados de libertad, lo cual se puede ver como una primera analogía entre la teoría linealizada de la gravedad y el electromagnetismo que de igual manera tiene el mismo número de grados de libertad.



1.2. Solución de la ecuación de onda en el vacío

Como primer acercamiento con la ecuación de onda gravitacional consideremos el caso de gravedad linealizada sin fuentes, es decir $T_{\mu\nu} = 0$, la ecuación de onda de la expresión (1.22) ahora se puede reescribir de la siguiente manera

$$\square\bar{h}^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta}\bar{h}^{\mu\nu}_{,\alpha\beta} = 0, \quad (1.34)$$

siendo para esta ecuación de onda homogénea la solución de una onda plana la más sencilla, sin embargo, se puede mostrar que directamente del teorema de Fourier cualquier otra solución se puede escribir como una superposición de ondas planas

[19],

$$\bar{h}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} \exp(ik^\alpha x_\alpha), \quad (1.35)$$

en donde k^α son las componentes del 4-vector de onda, el cual está definido como

$$[k^\alpha] \equiv (\omega, \vec{k}), \quad (1.36)$$

con ω como la correspondiente frecuencia angular de la onda gravitacional y \vec{k} el 3-vector de onda cuyas componentes son puramente reales ($k^\alpha \in \mathbb{R}$). Mientras que $A^{\mu\nu}$ son componentes, constantes y pertenecientes al conjunto de los complejos, de un tensor tipo (2,0) que corresponde a la amplitud de la onda plana ($A^{\mu\nu} \in \mathbb{C}$).

Derivando parcialmente dos veces esta solución y sustituyéndola en (1.34)

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\alpha} = ik_\alpha \bar{h}^{\mu\nu} \quad (1.37)$$

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\alpha\beta} = -k_\alpha k_\beta \bar{h}^{\mu\nu} \quad (1.38)$$

$$\Rightarrow \eta^{\alpha\beta} \bar{h}^{\mu\nu}_{,\alpha\beta} = -k^\alpha k_\alpha \bar{h}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.39)$$

En este último resultado se puede ver que la única posibilidad de que $\bar{h}^{\mu\nu}$ sea la solución a la ecuación de onda, una solución diferente a la trivial, es que k_α sean las componentes de una uno-forma, o bien del 4-vector de onda asociado, de tamaño nulo

$$k^\alpha k_\alpha = 0. \quad (1.40)$$

Directamente de este resultado se puede mostrar fácilmente que la rapidez con la que se propaga el frente de la onda gravitacional es igual a la rapidez lumínica en el vacío

$$k^\alpha k_\alpha = -\omega^2 + \|\vec{k}\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{\|\vec{k}\|} = 1. \quad (1.41)$$

Por otra parte, si se sustituye la solución de onda plana, (1.35), en la norma de Lorentz impuesta sobre $\bar{h}^{\mu\nu}$, (1.37), se obtiene lo siguiente

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\nu} = ik_\nu A^{\mu\nu} \exp(ik^\alpha x_\alpha) = 0 \quad (1.42)$$

$$\Rightarrow A^{\mu\nu} k_\nu = 0, \quad (1.43)$$

lo cual restringe a la onda gravitacional a ser transversal, es decir, la dirección de propagación de la onda está restringida a ser ortogonal a la amplitud, siendo esta una similitud más con las ondas electromagnéticas.

Hasta este momento solamente se ha impuesto la norma de Lorentz con lo cual, recordando que $A^{\mu\nu}$ es un tensor simétrico, únicamente quedan 6 componentes independientes de $h^{\mu\nu}$. Sin embargo también se tiene la libertad de hacer transformaciones de norma, lo que finalmente dejará sólo 2 entradas independientes como se mostrará más adelante.

1.3. La norma TT

Como ya se mencionó, hay aun grados de libertad que no se han ocupado. En esta parte se mostrarán un par de métodos que permiten usar esos grados de libertad de norma, haciendo una transformación en las coordenadas dejando únicamente los términos físicamente relevantes, además de analizar su significado.

1.3.1. La onda plana en dirección del eje z

Considérese una onda gravitacional que se propaga a lo largo de la dirección del eje z, lo cual no quita generalidad dado que bien pudo haberse elegido cualquier otra dirección, además de que esto sólo requiere de una rotación de los ejes coordenados y sabemos que una rotación es una transformación que pertenece al grupo de Lorentz las cuales no usan grados de libertad de norma. Con esta elección de la dirección de propagación el 4-vector de onda definido en (1.36) únicamente tendrá dos componentes idénticas

$$\begin{aligned}(k^\mu) &= (\omega, 0, 0, k) \\ &= (k, 0, 0, k).\end{aligned}\tag{1.44}$$

Con esto y usando la restricción de transversalidad, (1.43), se obtiene que

$$\begin{aligned}-A^{\mu 0}k + A^{\mu 3}k &= 0 \\ \Rightarrow A^{\mu 0} &= A^{\mu 3}.\end{aligned}\tag{1.45}$$

Ahora, usando la transformación de norma (1.26) e imponiendo que se siga cumpliendo la norma de Lorentz se debe cumplir que ξ^μ satisfaga la ecuación de onda homogénea

$$\square^2 \xi^\mu = 0. \quad (1.46)$$

Nuevamente se puede elegir como solución a la anterior ecuación la de una onda plana, que como ya se mencionó por el teorema de Fourier se permite construir cualquier otra solución como superposición de estas ondas planas.

$$\xi^\mu = B^\mu \exp(ik^\beta x_\beta), \quad (1.47)$$

en donde B^μ son las componentes constantes de un 4-vector que pueden ser determinadas completamente al imponer las condiciones

$$A_\mu^\mu = 0 \quad (1.48)$$

$$A_{\mu\nu} U^\nu = 0, \quad (1.49)$$

con U^ν una 4-velocidad que pertenece a un fotón que sigue a la onda gravitacional, la cual siempre se puede imponer sin perder generalidad, ya que basta con un boost para fijarla; esto no quita grados de libertad de norma debido a que un boost es una transformación que pertenece también al grupo de Lorentz.

Para mostrar cómo es que estas condiciones, (1.48) y (1.49), permiten determinar completamente el valor de B^μ se puede seguir el ejercicio 9,5 del libro de Schutz [33]. Primeramente se sustituyen las soluciones de onda plana propuestas para ξ^μ y para $\bar{h}^{\mu\nu}$ en la expresión deducida para ${}^{new}\bar{h}^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
{}^{new}A_{\mu\nu}e^{ik_{\alpha\beta\gamma}} &= {}^{old}A_{\mu\nu}e^{ik_{\alpha\beta\gamma}} - (iB_{\mu}k_{\nu}e^{ik_{\alpha\beta\gamma}}) - (iB_{\nu}k_{\mu}e^{ik_{\alpha\beta\gamma}}) + i\eta_{\mu\nu}B_{\gamma}k^{\gamma}e^{ik_{\alpha\beta\gamma}} \\
&= {}^{old}A_{\mu\nu} - iB_{\mu}k_{\nu} - iB_{\nu}k_{\mu} + i\eta_{\mu\nu}B_{\gamma}k^{\gamma}.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Lo siguiente es imponer la condición de traza nula, (1.48), usando la métrica de Minkowski para contraer los índices en la expresión obtenida para ${}^{new}A_{\mu\nu}$

$${}^{new}A^{\mu}_{\mu} = 0 = {}^{old}A^{\mu}_{\mu} - iB^{\nu}k_{\nu} - iB_{\nu}k^{\nu} + i\eta^{\nu}_{\nu}B_{\gamma}k^{\gamma}. \tag{1.51}$$

Después de hacer el álgebra necesaria para simplificar el anterior resultado se obtiene

$$B^{\nu}k_{\nu} = \frac{i}{2} {}^{old}A^{\nu}_{\nu}. \tag{1.52}$$

La condición de traza nula, (1.48), nos quita solamente un grado de libertad. Sin embargo, también se impuso la restricción (1.49), la cual al ser usada en (1.27), y después de hacer algo de álgebra, se puede mostrar que las ecuaciones que se obtienen para B^{μ} no son linealmente independientes y deja únicamente 3 condiciones de norma usadas, y no 4 como se pensaría por el hecho de que el índice μ toma valores entre 0 y 3. Dejando finalmente sólo 2 de las componentes del tensor $A_{\mu\nu}$ independientes.

El conjunto de restricciones dadas por la condición de transversalidad (1.43), la condición de traza nula (1.48) y la condición dada por (1.49) definen lo que se conoce como la condición de norma *transversa-sin traza (TT)* (*transverse-traceless gauge conditions* en inglés).

Ya que se tienen las condiciones que permiten usar toda la libertad de norma, ahora queda aplicarlas a la solución propuesta inicialmente para obtener la forma de

la perturbación $\bar{h}_{\mu\nu}$ en el sistema coordenado que fija la norma TT , y a partir de ello poder identificar los efectos que produce el paso de la onda sobre partículas de prueba.

Se sabe que un espacio-tiempo de Minkowski es una variedad lorentziana de cuatro dimensiones, y en ella siempre es posible usar un boost, esto sin perder generalidad como ya se mencionó antes, para encontrar un marco de referencia en el cual la 4-velocidad U^ν sea

$$(U^\nu) = (1, 0, 0, 0). \quad (1.53)$$

De la condición (1.49) se obtiene directamente que con esta 4-velocidad

$$\begin{aligned} {}^{new}A_{\mu\nu}U^\nu &= {}^{new}A_{\mu 0}U^0 = 0, \\ \Rightarrow {}^{new}A_{\mu 0} &= 0. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Por otra parte usando la condición de transversalidad, (1.43), se obtiene

$$\begin{aligned} {}^{new}A^{\mu\nu}k_\nu &= -{}^{new}A^{\mu 0}k + {}^{new}A^{\mu 3}k = 0, \\ \Rightarrow {}^{new}A_{\mu 3} &= 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Esto concuerda con el resultado ya obtenido en (1.45).

De estos dos últimos resultados se tiene que en ${}^{new}A_{\mu\nu}$ las entradas de la primera fila, la primer columna, la última fila y la última columna son nulas. Finalmente de la restricción de traza nula se obtiene que $A_{11} = -A_{22}$, con lo cual queda completamente determinada la norma TT

$$(A_{\mu\nu}^{TT}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11}^{TT} & A_{12}^{TT} & 0 \\ 0 & A_{12}^{TT} & -A_{11}^{TT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

Por conveniencia se nombrará a las únicas dos componentes independientes de $A_{\mu\nu}^{TT}$ de la siguiente forma

$$A_{11}^{TT} \equiv h_+, \quad (1.57)$$

$$A_{12}^{TT} \equiv h_\times. \quad (1.58)$$

Más adelante se explicará con mayor cuidado por qué se usan los subíndices + y \times en estas definiciones. Con las condiciones impuestas y sustituyendo la forma que tomó el tensor de amplitud, $A_{\mu\nu}$, en (1.35) se obtiene la solución a la ecuación de onda sin fuentes en el marco TT, tomando únicamente la parte real de la exponencial compleja

$$h_{\mu\nu}^{TT} = A_{\mu\nu}^{TT} \cos[\omega(t - z)]. \quad (1.59)$$

Con esto finalmente se puede calcular la forma que toma la métrica y por lo tanto el diferencial de longitud

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -dt^2 + dz^2 + \{1 + h_+ \cos[\omega(t - z)]\} dx^2 + \\ &\quad + \{1 - h_+ \cos[\omega(t - z)]\} dy^2 + \\ &\quad + 2h_\times \cos[\omega(t - z)] dx dy, \end{aligned} \quad (1.60)$$

1.3.2. El operador de proyección

Como ya se mostró, las ondas gravitacionales son transversales, lo cual significa que sus efectos son percibidos solamente en las direcciones perpendiculares a la dirección de propagación. El caso analizado antes es uno particular en el cual la onda se propaga en una dirección específica haciendo una rotación de los ejes coordenados. Sin embargo, si la onda se propaga en una dirección arbitraria, \hat{n} , es posible definir un nuevo tensor proyector que permita encontrar la forma que toman las componentes espaciales de la perturbación h_{ij} o cualquier otro tensor en el marco de referencia definido por la norma TT. Primeramente definamos un operador

$$P_{ij}(\hat{n}) = \delta_{ij} - n_i n_j, \quad (1.61)$$

en donde los índices latinos corresponden a coordenadas espaciales, es decir,

$$i, j = 1, 2, 3.$$

Es fácil mostrar que este operador elimina de un vector las componentes paralelas a la dirección de propagación

$$n^i P_{ij}(\hat{n}) = 0. \quad (1.62)$$

Con este tensor, (1.61), es posible construir otro tensor

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl}. \quad (1.63)$$

Hay que prestar atención en que en esta ocasión la coma entre los índices del tensor $\Lambda_{ij,kl}$ no denota una deriva parcial como en las ocasiones anteriores, sino que aquí su

única utilidad es separar los pares de índices para marcar de forma explícita la simetría del tensor ante el intercambio simultáneo de los pares de índices. Este tensor, aparte de la simetría ya mencionada, mantiene la propiedad de transversalidad con la dirección de propagación de la onda gravitacional en cada uno de sus índices, es decir

$$n^i \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = n^j \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = n^k \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = n^l \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = 0. \quad (1.64)$$

Sustituyendo (1.61) en (1.63) se obtiene una expresión para el tensor $\Lambda_{ij,kl}$ de manera explícita en términos de la dirección de propagación de la onda gravitacional \hat{n}

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ik}n_jn_l - \delta_{jl}n_in_k + \frac{1}{2}n_in_jn_kn_l - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}\delta_{ij}n_kn_l + \frac{1}{2}\delta_{kl}n_in_j. \quad (1.65)$$

En general el tensor $\Lambda_{ij,kl}(\hat{n})$ permite obtener las componentes de la parte transversa y sin traza (TT) de cualquier tensor simétrico, pero en especial para la perturbación $h_{\mu\nu}$ que satisface la norma de Lorentz

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl}(\hat{n})h_{kl}. \quad (1.66)$$

¿Qué pasa con las componentes tiempo-tiempo y tiempo-espacio de $h_{\mu\nu}$? La respuesta se encuentra en la sección anterior, el resultado obtenido en (1.54) implica directamente que estas componentes son nulas sin importar la dirección de propagación de la onda gravitacional, ya que este resultado se obtiene únicamente de hacer una transformación de Lorentz para obtener una 4-velocidad con componentes espaciales nulas.

1.4. ¿Qué le pasa a una partícula al fijar la norma TT?

Considérese una partícula inicialmente en reposo ($\tau = 0$)

$$\left. \frac{dx^i}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (1.67)$$

cuya trayectoria está dada por la ecuación geodésica

$$\left. \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} + \left[\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right]_{\tau=0} = 0 \quad ; \quad (1.68)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = - \left[\Gamma_{00}^i \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \right]_{\tau=0}. \quad (1.69)$$

En este marco de referencia los símbolos de Christoffel a orden lineal quedan dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\rho}^\mu &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} \left[-h_{\nu\rho,\sigma} + h_{\rho\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\rho} \right], \\ \Rightarrow \Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2} \left[2h_{0,0}^{TT,i} - h_{00}^{TT,i} \right], \end{aligned} \quad (1.70)$$

si la onda gravitacional se propaga en dirección del eje z entonces es esta norma las componentes tiempo-tiempo y tiempo-espacio de la perturbación son nulas

$$h_{0i}^{TT} = h_{00}^{TT} = 0,$$

sustituyendo esto en (1.69) obtenemos

$$\left. \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = 0, \quad (1.71)$$

lo cual significa que ante el paso de una onda gravitacional la trayectoria de la partícula no se ve modificada, es decir, la partícula de muestra que se encontraba inicialmente en reposo antes de la llegada de la onda gravitacional permanecerá en reposo después del paso de la misma.

Es claro que en este marco de referencia los cálculos se ven simplificados pero también, como se acaba de mostrar aquí, los efectos producidos por el paso de una onda gravitacional sobre la posición de una partícula no se encuentran presentes, entonces ¿Cómo es que se miden los efectos producidos por el paso de una onda gravitacional en el marco TT?

Para responder a esta pregunta comencemos por considerar dos rutas geodésicas separadas por un vector ξ^μ

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0, \quad (1.72)$$

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x^\mu + \xi^\mu) \frac{d(x^\nu + \xi^\nu)}{d\tau} \frac{d(x^\rho + \xi^\rho)}{d\tau} = 0. \quad (1.73)$$

Tomando la diferencia entre estas dos últimas ecuaciones y manteniendo el resultado a orden lineal en ξ^μ

$$\left[\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x^\mu + \xi^\mu) \frac{d(x^\nu + \xi^\nu)}{d\tau} \frac{d(x^\rho + \xi^\rho)}{d\tau} \right] - \left[\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} \right] = 0,$$

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\nu\rho}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\rho}{d\tau} + \xi^\sigma \Gamma_{\nu\rho,\sigma}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0. \quad (1.74)$$

Sabemos que en $\tau = 0$ las partículas se encuentran en reposo, es decir,

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = (1, 0, 0, 0), \quad (1.75)$$

con esta condición inicial, evaluando (1.74) en $\tau = 0$ la expresión se reduce a

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 \xi^i}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} &= - \left[2\Gamma_{0\rho}^i \frac{dx^0}{d\tau} \frac{d\xi^\rho}{d\tau} + \xi^\sigma \Gamma_{00,\sigma}^i(x) \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} \right]_{\tau=0} \\ &= - \left[2\Gamma_{0\rho}^i \frac{d\xi^\rho}{d\tau} + \xi^\sigma \Gamma_{00,\sigma}^i \right]_{\tau=0}, \end{aligned} \quad (1.76)$$

con el segundo símbolo de Christoffel nulo y la única posibilidad para que el primer símbolo sea diferente de cero es que la coordenada ρ sea una coordenada tipo espacio

$$\left. \frac{d^2 \xi^i}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = -2\Gamma_{0j}^i \left. \frac{d\xi^j}{d\tau} \right|_{\tau=0}, \quad (1.77)$$

sustituyendo en valor de $\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} h_{kj,0}^{TT}$

$$\left. \frac{d^2 \xi^i}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = -h_{j,0}^{TTi} \left. \frac{d\xi^j}{d\tau} \right|_{\tau=0}. \quad (1.78)$$

Nuevamente se puede ver que si en $\tau = 0$ $\frac{d\xi^i}{d\tau} = 0$ entonces

$$\Rightarrow \frac{d^2 \xi^i}{d\tau^2} = 0. \quad (1.79)$$

De este último resultado se puede deducir que, al igual que la posición de una partícula, la separación coordenada entre dos geodésicas permanece constante a todo tiempo ante el paso de una onda gravitacional.

El hecho de que ante el paso de la onda gravitacional la posición coordenada de las partículas de prueba permanezca constante no significa que estas partículas no experimenten ningún efecto físico, lo único que refleja este cálculo es el hecho de que toda la libertad de norma ha sido ocupada dejando un sistema coordenado en el cual no hay cambios.

Por otra parte si se toma nuevamente el caso de la onda gravitacional propagándose en la dirección del eje z , el diferencial de longitud es el ya obtenido antes

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + \{1 + h_+ \cos[\omega(t - z)]\} dx^2 + \{1 - h_+ \cos[\omega(t - z)]\} dy^2 + 2h_\times \cos[\omega(t - z)] dx dy. \quad (1.80)$$

Al considerar dos eventos ubicados en $(t, x_1, 0, 0)$ y $(t, x_2, 0, 0)$, como ya se mostró, se sabe que la separación coordenada ($x_2 - x_1 = L$) se mantiene constante ante el paso de la onda gravitacional, sin embargo no ocurre lo mismo con la distancia propia

$$\begin{aligned} s &= \int |ds^2|^{1/2} = \int |g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|^{1/2} \\ &= \int |g_{\times\times} dx^2|^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Tomando en cuenta que $g_{\times\times}$ es prácticamente constante y usando (1.80)

$$\Rightarrow s \approx [1 + h_{\times\times}^{TT}]^{1/2} L \approx L \left[1 + \frac{1}{2} A_{\times\times} \cos(\omega t) \right]. \quad (1.82)$$

De este cálculo se puede notar que la distancia propia entre dos eventos sí se ve afectada y es directamente proporcional a la distancia coordenada inicial y cambia de forma periódica con el paso del tiempo ante el paso de la onda. Es debido a esto que para la detección de la radiación gravitacional es necesario que los detectores, como los de LIGO cuyos interferómetros miden alrededor de 4 Km, sean de gran tamaño [2].

Como ya se mostró, en el marco TT los cálculos se reducen al haber ocupado totalmente la libertad de norma. Sin embargo, no es en este marco en el cual se encuentra el laboratorio donde se efectúan las mediciones y por lo tanto no es $h_{\mu\nu}^{TT}$ lo que se mide sino $h_{\mu\nu}$. Es por ello que es necesario “traducir” los resultados obtenidos en el marco TT al marco del laboratorio. Para hacer esta traducción entre el marco TT y en el cual se llevan a cabo las mediciones, basta con hacer transformaciones de Lorentz.

1.4.1. Polarización de las ondas gravitacionales

Para seguir con el análisis de la interacción entre una onda gravitacional, que se propaga nuevamente en dirección del eje z , y la materia, se seguirán los cálculos que presenta Sean Carroll en su libro [7]. Consideremos un conjunto de partículas distribuidas en el plano $x - y$ a una distancia constante de otra partícula colocada en el origen de coordenadas; por simplicidad esta distancia entre las partículas de prueba y la que se encuentra en el origen se tomará como ϵ , con lo cual inicialmente las partículas se encuentran colocadas sobre la curva descrita por la circunferencia

$$[\xi^1(t=0)]^2 + [\xi^2(t=0)]^2 = \epsilon^2. \quad (1.83)$$

Una forma de notar los efectos tras el paso de la onda es usando la ecuación de la desviación geodésica, la cual, debido a las características del marco de referencia definido por la norma TT, se simplifica a una segunda derivada ordinaria con respecto

al tiempo propio

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = R^\alpha_{\mu\nu\beta} U^\mu U^\nu \xi^\beta, \quad (1.84)$$

en donde las ξ^α corresponde a las componentes del 4-vector que marca la separación entre la partícula colocada en el centro del arreglo y cualquier otra de las que se encuentran alrededor y U^α es la cuatro-velocidad de las mismas dos partículas. Con el resultado de esta ecuación obtendremos la deformación que sufren las partículas colocadas inicialmente en forma de aro medida por un observador en el marco de referencia propio de la partícula colocada en el centro. En el espíritu de seguir manteniendo a orden lineal la teoría despreciaremos todas las correcciones de orden $h_{\mu\nu}^{TT}$ en la cuatro-velocidad, además de que es posible pedir que U^α tenga componentes espaciales nulas, es decir, elegimos esta velocidad con la forma

$$U^\alpha = (1, 0, 0, 0). \quad (1.85)$$

Usando el hecho de que la componente temporal del 4-vector de velocidad es la única no nula se puede notar que las únicas componentes que se necesitan calcular del tensor de Riemann son [30]

$$R_{\alpha 00\beta} = \frac{1}{2} \{ h_{\alpha\beta,00}^{TT} + h_{00,\alpha\beta}^{TT} - h_{\alpha 0,0\beta}^{TT} - h_{\beta 0,0\alpha}^{TT} \}. \quad (1.86)$$

Pero recordemos que de la condición (1.49) se obtiene que las componentes $h_{\mu 0}^{TT}$ son cero, por lo tanto únicamente el primer término de (1.86) es el que se conserva. Considerando la aproximación a bajas velocidades $\tau = x^0 = t$, esta aproximación se vuelve exacta en el momento en que se considera un marco momentáneamente en reposo. Sustituyendo $R_{\alpha 00\beta}$ y con la aproximación mencionada, la ecuación para la desviación geodésica se puede reescribir como

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \xi^\beta \frac{\partial^2 h^{TT\alpha}_\beta}{\partial t^2}. \quad (1.87)$$

Como se impuso que la onda gravitacional se encuentra propagándose de forma paralela al eje z y como ya sabemos que los efectos del paso de la onda únicamente se perciben direcciones transversas a la de propagación, entonces $\alpha = 1, 2$. Dado que $h^{TT}_{\alpha\beta}$ tiene únicamente dos componentes distintas de cero, con lo cual se obtienen dos ecuaciones diferenciales acopladas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \left[\xi^1 \frac{\partial^2 h^{TT1}_1}{\partial t^2} + \xi^2 \frac{\partial^2 h^{TT1}_2}{\partial t^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\xi^1 \frac{\partial^2 \mathbb{R}(h_+ e^{i\omega(-t+z)})}{\partial t^2} + \xi^2 \frac{\partial^2 \mathbb{R}(h_\times e^{i\omega(-t+z)})}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (1.88)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \left[\xi^1 \frac{\partial^2 h^{TT2}_1}{\partial t^2} + \xi^2 \frac{\partial^2 h^{TT2}_2}{\partial t^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\xi^1 \frac{\partial^2 \mathbb{R}(h_\times e^{i\omega(-t+z)})}{\partial t^2} - \xi^2 \frac{\partial^2 \mathbb{R}(h_+ e^{i\omega(-t+z)})}{\partial t^2} \right], \end{aligned} \quad (1.89)$$

en donde \mathbb{R} denota que solamente se toma la parte real.

Primero consideremos el caso en el cual $h_\times = 0$ para después hacer lo mismo con $h_+ = 0$. Esto nos permitirá hacer un análisis de ambos casos por separado dejando ver la física que esconden las ecuaciones.

Si $h_\times = 0$ las dos ecuaciones (1.88) y (1.89) se reducen a lo siguiente

$$\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \xi^1 \frac{\partial^2 \mathbb{R}(h_+ e^{i\omega(-t+z)})}{\partial t^2}, \quad (1.90)$$

$$\frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} = -\frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 \mathbb{R}(h_+ e^{i\omega(-t+z)})}{\partial t^2}. \quad (1.91)$$

Las soluciones a estas ecuaciones no son difíciles de conseguir. Una vez hecho el cálculo y manteniendo únicamente la parte real se obtiene

$$\xi^1 = \left\{ 1 + \frac{1}{2} h_+ \cos [\omega(t - z)] \right\} \xi^1(t = 0), \quad (1.92)$$

$$\xi^2 = \left\{ 1 - \frac{1}{2} h_+ \cos [\omega(t - z)] \right\} \xi^2(t = 0). \quad (1.93)$$

Si hacemos un poco de álgebra, elevamos ambas soluciones al cuadrado y las sumamos, se obtiene el siguiente resultado

$$\left\{ \frac{\xi^1}{1 + \frac{1}{2} h_+ \cos (\omega(t - z))} \right\}^2 + \left\{ \frac{\xi^2}{1 - \frac{1}{2} h_+ \cos (\omega(t - z))} \right\}^2 = \epsilon^2. \quad (1.94)$$

Esta ecuación describe la deformación que sufre el arreglo inicial de partículas en forma de anillo tras el paso de una onda gravitacional con polarización +, formando una nueva distribución en forma de elipse que oscila con el paso del tiempo siempre dejando sus ejes focal mayor y menor paralelos a los ejes coordenados como se muestra en la imagen

Si ahora en las ecuaciones (1.88) y (1.89) se pide que $h_+ = 0$, ahora las ecuaciones que quedan por resolver son

$$\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 \mathbb{R}(h_- e^{i\omega(-t+z)})}{\partial t^2}, \quad (1.95)$$

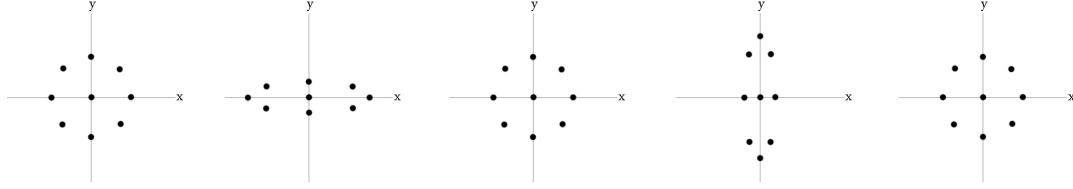


Figura 1.1: Deformación de un arreglo de partículas inicialmente en forma de anillo tras el paso de una onda gravitacional con polarización $+$.

$$\frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \xi^1 \frac{\partial^2 \mathbb{R}(h_{\times} e^{i\omega(-t+z)})}{\partial t^2}, \quad (1.96)$$

las cuales están acopladas y tienen por solución

$$\xi^1 = \xi^1(t=0) + \frac{1}{2} h_{\times} \cos[\omega(t-z)] \xi^2(t=0), \quad (1.97)$$

$$\xi^2 = \xi^2(t=0) + \frac{1}{2} h_{\times} \cos[\omega(t-z)] \xi^1(t=0). \quad (1.98)$$

A partir de estas soluciones es posible mostrar que tras el paso de una onda gravitacional con polarización \times un arreglo inicialmente en forma de anillo nuevamente sufre una deformación en forma de elipse pero esta vez rotada un ángulo de 45° con respecto a los ejes coordenados.

La teoría electromagnética tiene dos grados de libertad, los cuales corresponden a las 2 posibles polarizaciones del fotón. De manera análoga la relatividad general también tiene 2 grados de libertad y en su aproximación linealizada estos grados de libertad corresponden a los dos modos de polarización de las ondas gravitacionales $+$ y \times . En los capítulos consecuentes se presentan más analogías y diferencias entre estas dos teorías.

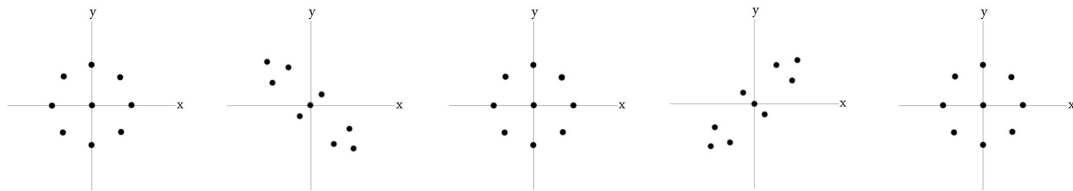


Figura 1.2: Deformación de un arreglo de partículas inicialmente en forma de anillo tras el paso de una onda gravitacional con polarización \times

Capítulo 2

Ondas gravitacionales

Este capítulo presenta un análisis sobre el desarrollo en momentos multipolares de la fuente generadora de las ondas gravitacionales, en el límite en el que los elementos de $T_{\mu\nu}$ mantengan bajas velocidades comparadas con la velocidad lumínica.

2.1. Generación de radiación gravitacional

En la sección anterior se analizó el caso de la ecuación de onda homogénea. Ahora toca el turno al estudio de la ecuación de onda con fuentes que generan la radiación gravitacional. Esta ecuación está compuesta por un operador lineal, conocido como operador de onda u operador de D'Alambert, por lo cual, de la teoría de ecuaciones diferenciales, se puede encontrar su solución usando el método de la función de Green, de manera muy similar a como lo hace Jackson en su libro para el caso de electrodinámica [26]. Se propone como solución a la ecuación la siguiente

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{r}, t) = -16\pi \int G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') T_{\mu\nu}(\vec{r}', t') d^3r' dt', \quad (2.1)$$

en donde $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$ es precisamente la función de Green asociada al operador D'Alambertiano. Para encontrar la forma que toma esta función empecemos por sustituir (2.1) en (1.22)

$$\square \bar{h}_{\mu\nu}(\vec{r}, t) = -16\pi \square \int G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') T_{\mu\nu}(\vec{r}', t') d^3r' dt'. \quad (2.2)$$

Considerando que las derivadas del operador de onda son sobre las coordenadas del punto de campo, \vec{r} y t , y no sobre las variables de integración, entonces es posible conmutar el orden entre las derivadas y la integral

$$\square \bar{h}_{\mu\nu}(\vec{r}, t) = -16\pi \int \left[\square G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') \right] T_{\mu\nu}(\vec{r}', t') d^3r' dt' = T_{\mu\nu}(\vec{r}, t). \quad (2.3)$$

Recordando la definición de la función delta de Dirac y comparando con la ecuación anterior, se obtiene que la función de Green debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial

$$\square G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'), \quad (2.4)$$

la cual, usando transformadas de Fourier y algunos teoremas del cálculo de variable compleja [35][9] se obtiene la función de Green asociada a la ecuación de onda inhomogénea

$$G^{(\pm)}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t' - t \mp \|\vec{r} - \vec{r}'\|)}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}. \quad (2.5)$$

Esta función de Green ofrece dos soluciones, pero para que esta función tenga

significado físico se debe cumplir la condición de causalidad

$$t - t' > 0 \quad (2.6)$$

Esta condición en (2.5) implica

$$\delta(t' - t + \|\vec{r} - \vec{r}'\|) = 0, \quad (2.7)$$

dejando una única solución que sí preserva el principio de causalidad

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t' - t - \|\vec{r} - \vec{r}'\|)}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}; \quad (2.8)$$

a esta solución se le conoce como la función de Green retardada debido a que define una cantidad conocida como tiempo de retardo, dado por la siguiente expresión

$$t_{ret} = t - \|\vec{r} - \vec{r}'\|, \quad (2.9)$$

y surge del hecho de que la propagación de las señales gravitacionales son emitidas por la fuente con una velocidad finita, impidiendo que sea medida en el punto \vec{r} antes de ser emitida en \vec{r}' .

Sustituyendo (2.5) en (2.1) se obtiene finalmente la solución para $\bar{h}_{\mu\nu}$ dada por

$$\bar{h}_{\mu\nu} = 4 \int \frac{\delta(t' - t - \|\vec{r} - \vec{r}'\|)}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} T_{\mu\nu}(\vec{r}', t') d^3r' dt', \quad (2.10)$$

en donde si se integra con respecto a t' se obtiene que

$$\begin{aligned}\bar{h}_{\mu\nu} &= 4 \int \frac{T_{\mu\nu}(\vec{r}', t_{ret})}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d^3 r' \\ &= 4 \int \frac{T_{\mu\nu}(\vec{r}', t - \|\vec{r} - \vec{r}'\|)}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d^3 r'.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Nótese que después de haber realizado la integral sobre el tiempo se ha cambiado t' por t_{ret} , esto para denotar el tiempo de retardo. Este resultado obtenido en (2.11) es el análogo al que se obtiene en electrodinámica con los potenciales retardados de Lienard-Wiechert [27].

Haciendo el desarrollo en serie en $\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = r - \vec{r}' \cdot \hat{n} + \dots,\tag{2.12}$$

siendo \hat{n} un vector unitario que apunta en dirección de \vec{r}

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \|\vec{r}\| \equiv r\tag{2.13}$$

y considerando el límite $\|\vec{r}'\| \gg d$, en donde d es el radio típico de la fuente, este desarrollo se puede cortar a primer orden y sustituyéndolo en (2.11) se obtiene lo siguiente

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{4}{r} \int T_{\mu\nu}(\vec{r}', t - r) d^3 r'.\tag{2.14}$$

Para obtener este resultado es necesario hacer aproximaciones y despreciar términos de orden superior, lo cual obviamente implica que la expresión anterior no incluye la información completa del sistema.

Una forma de obtener los momentos multipolares incluyendo todos los términos y que no tenga pérdida de información es haciendo el siguiente desarrollo usando armónicos esféricos. Sabemos que $\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$ es una función generadora de los polinomios de Legendre [4]

$$\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \gamma), \quad (2.15)$$

con γ el ángulo entre los vectores \vec{r} y \vec{r}' . Recordemos que los polinomios de Legendre se relacionan con los armónicos esféricos a través de lo que se conoce como el teorema de adición de armónicos esféricos [26]

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_l^{*m}(\theta', \phi') Y_l^m(\theta, \phi). \quad (2.16)$$

Haciendo la sustitución de este resultado en (2.11) se obtiene

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{4}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{1}{r^l} Y_l^m(\theta, \phi) q_{lm}(\vec{r}, t), \quad (2.17)$$

en donde

$$q_{lm} \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int T_{\mu\nu}(\vec{r}', t_{ret}) (r')^l Y_l^{*m}(\theta', \phi') d^3r'. \quad (2.18)$$

Este resultado, (2.17), contiene el desarrollo en momentos multipolares a todo

orden, sin embargo no todos tienen relevancia física, como se verá en la siguiente sección.

2.2. Momentos multipolares de una partícula puntual

La expresión obtenida en (2.17) contiene todos los momentos multipolares en términos de armónicos esféricos. En el caso $l = 0$, el único valor permitido para m es cero, con lo cual se obtiene

$$q_{00}(\vec{r}, t) = \sqrt{4\pi} \int T_{\mu\nu}(\vec{r}', t_{ret}) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} d^3r', \quad (2.19)$$

Al sustituir este resultado en (2.17) e imponiendo la condición $\|\vec{r}\| \gg d$, siendo d la medida del diámetro de la fuente, y manteniendo el límite de bajas velocidades para los elementos que la forman ($U \ll 1$), se recupera lo obtenido en (2.14)

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{4}{r} \int T_{\mu\nu}(\vec{r}', t - r) d^3r'. \quad (2.20)$$

Aplicando a la ecuación anterior el tensor de proyección, (1.63), el resultado corresponde a la perturbación gravitacional en el marco TT

$$h_{ij}^{TT}(\vec{r}, t) = \frac{4}{r} \Lambda_{ij,pq}(\hat{n}) \int T^{pq}(\vec{r}', t - r) d^3r'. \quad (2.21)$$

Para simplificar un poco más la expresión anterior resulta conveniente seguir los cálculos y la notación que usa Michele Maggiore en su libro sobre ondas gravitacio-

nales [28]. Para esto, lo primero es definir un nuevo tensor que denota el momento asociado a las componentes espaciales del tensor de energía momento, T^{ij} , evaluado en el tiempo de retardo desarrollado a primer orden en r

$$S^{ij} \equiv \int_{\mathbb{R}^3} T^{ij}(\vec{r}', t - r) d^3 r'. \quad (2.22)$$

Se puede ver que en (2.21) se mantienen únicamente las componentes espaciales, esto como ya se mostró se debe a que las componentes tipo tiempo de la perturbación en el marco TT son nulas, por lo cual es innecesario agregarlas a la expresión.

En términos del tensor S^{ij} definido en (2.35), la ecuación (2.21) se puede reescribir como

$$h_{ij}^{TT}(\vec{r}, t) = \frac{4}{r} \Lambda_{ij,pq}(\hat{n}) S^{pq}(t - r). \quad (2.23)$$

De manera similar a la forma en que se definió el tensor de momento para T_{ij} , S_{ij} , se pueden definir los tensores para los momentos para T_{00} y para T_{0i} . Los momentos para la densidad de energía quedan definidos en términos de

$$M \equiv \int T^{00}(\vec{r}', t - r) d^3 r', \quad (2.24)$$

$$M^i = \int (r')^i T^{00}(\vec{r}', t - r) d^3 r', \quad (2.25)$$

$$M^{ij} = \int (r')^i (r')^j T^{00}(\vec{r}', t - r) d^3 r', \quad (2.26)$$

$$M^{ijk} = \int (r')^i (r')^j (r')^k T^{00}(\vec{r}', t - r) d^3 r'. \quad (2.27)$$

Para de la densidad de momento lineal, los momentos están dados por

$$P^i = \int T^{0i}(\vec{r}', t-r) d^3r', \quad (2.28)$$

$$P^{ij} = \int (r')^j T^{0i}(\vec{r}', t-r) d^3r', \quad (2.29)$$

$$P^{ijk} = \int (r')^j (r')^k T^{0i}(\vec{r}', t-r) d^3r'. \quad (2.30)$$

Haciendo uso de la conservación del tensor de energía momento en su versión linealizada

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.31)$$

es posible relacionar las derivadas temporales de $T^{\alpha\beta}$ con las espaciales, como se mostrará más adelante, pero cuyo resultado permite reescribir en este momento la expresión obtenida en (2.23)

$$\begin{aligned} \partial_0 M &= 0 \\ \partial_0 M^i &= P^i \\ \partial_0 M^{ij} &= P^{ij} + P^{ji} \\ \partial_0 M^{ijk} &= P^{ijk} + P^{jki} + P^{kij} \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 P^i &= 0 \\ \partial_0 P^{ij} &= S^{ij} \\ \partial_0 P^{ijk} &= S^{ijk} + S^{ikj}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

De las expresiones en (2.32) y (2.33) es fácil notar que derivando parcialmente una vez más a M^{ij} con respecto a x^0 se obtiene una relación con las componentes *espacio-espacio* del tensor de energía momento a través de S^{ij}

$$\begin{aligned}\partial_0^2 M^{ij} &= \partial_0 P^{ij} + \partial_0 P^{ji} \\ &= S^{ij} + S^{ji} \\ &= 2S^{ij}\end{aligned}\tag{2.34}$$

$$\Rightarrow S^{ij} = \frac{1}{2} \partial_0^2 M^{ij},\tag{2.35}$$

en donde en el tercer renglón de la expresión (2.34) se usó la simetría en los índices de S^{ij} heredada directamente del tensor $T^{\mu\nu}$. Al hacer la sustitución de (2.35) en (2.23) se obtiene

$$h_{ij}^{TT}(\vec{r}, t) = \frac{2}{r} \Lambda_{ij,pq}(\hat{n}) \partial_0^2 M^{pq}(t - r).\tag{2.36}$$

A M^{ij} se le conoce como el tensor de momento cuadrupolar de la masa. Este tensor puede ser separado en dos partes

$$M^{ij} = \left(M^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \delta^{pq} M_{pq} \right) + \frac{1}{3} \delta^{ij} \delta^{pq} M_{pq}.\tag{2.37}$$

Al aplicar el tensor Λ_{ijpq} en (2.37), el término de traza se anula

$$\Lambda_{ijpq} \left[\left(M^{pq} - \frac{1}{3} \delta^{pq} \delta^{kl} M_{kl} \right) + \frac{1}{3} \delta^{pq} \delta^{kl} M_{kl} \right] = \Lambda_{ijpq} \left(M^{pq} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \delta^{pq} M_{pq} \right),$$

con lo cual, al sustituir en (2.36) se tiene que:

$$h_{ij}^{TT}(\vec{r}, t) = \frac{2}{r} \Lambda_{ij,pq}(\hat{n}) \left[\partial_0^2 \left(M^{pq} - \frac{1}{3} \delta^{pq} \delta^{kl} M_{kl} \right) \right]. \quad (2.38)$$

Definiendo el tensor de momento cuadrupolar

$$Q^{ij} \equiv M^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} M_l^l, \quad (2.39)$$

se tiene finalmente el momento cuadrupolar de una onda gravitacional en el marco TT, dejando ver que es este el primer termino no nulo de los momentos multipolares,

$$h_{ij}^{TT}(\vec{r}, t) = \frac{2}{r} \Lambda_{ij,pq}(\hat{n}) [\partial_0^2 Q^{pq}(t - r)]. \quad (2.40)$$

A diferencia de la electrodinámica, en la que el momento dipolar es el dominante, en este caso es el momento cuadrupolar el primero en contribuir. A pesar de que en algunas cosas la analogía es directa entre ambas teorías, este es un claro en el cual la analogía se rompe.

2.2.1. Momento cuadrupolar de una partícula puntual

Si se considera el caso de una partícula puntual, la componente T^{00} del tensor de energía-momento es

$$T^{00} = \rho(\vec{r}', t') = m\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0(t')), \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_{ij} &= \int m\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0(t'))(r')_i(r')_j d^3r' \\ &= m(r_0)_i(t')(r_0)_j(t'). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Derivando M_{ij} con respecto al tiempo coordenado

$$\partial_0 M_{ij} = \partial_0 \left[m(r_0)_i(t')(r_0)_j(t') \right], \quad (2.43)$$

pero sabemos que para derivar con respecto del tiempo que mide el observador, (t), hay que considerar el tiempo de retardo [31]

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}. \quad (2.44)$$

Para simplificar el cálculo comencemos por definir el vector

$$\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}' \quad ; \quad R \equiv \|\vec{R}\|. \quad (2.45)$$

Usando este vector en la expresión definida para el tiempo de retardo, (2.11), es posible calcular primero la derivada de R con respecto al tiempo t'

$$R = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2} = t - t', \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial t'} &= \frac{1}{2R} [2(x - x')(-u_x) + 2(y - y')(-u_y) + 2(z - z')(-u_z)] \\ &= -\frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{R}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Dejando este resultado de lado por un momento y haciendo ahora la derivada nuevamente de R pero en esta ocasión con respecto al tiempo coordinado t se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (t - t') = 1 - \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \\ &= -\frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Únicamente queda por determinar el valor de $\frac{\partial t'}{\partial t}$, pero de este último resultado se tiene la relación que permite despejar esta cantidad

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{R}}, \quad (2.49)$$

con lo cual finalmente se obtiene

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{R}} \frac{\partial R}{\partial t'}.$$

Si en lugar de R se tiene una función arbitraria, ψ , que de igual manera dependa de t' , se debe considerar el operador diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(\frac{1}{1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{R}} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \psi, \quad (2.50)$$

de aquí, al realizar la primer derivada de la ecuación (2.42) se obtiene

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial t} = \frac{m}{1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{R}} \frac{\partial}{\partial t'} \left[(r_0)_i (t') (r_0)_j (t') \right]. \quad (2.51)$$

Derivando una vez más

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_{ij}}{\partial t^2} &= \frac{1}{1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{R}} \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \frac{m}{1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{R}} \frac{\partial}{\partial t'} \left[(r_0)_i (t') (r_0)_j (t') \right] \right\} \\ &= \frac{m}{1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{R}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t'} \left[\frac{1}{1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{R}} \right] \frac{\partial}{\partial t'} \left[(r_0)_i (t') (r_0)_j (t') \right] \right\} + \\ &+ \frac{m}{\left[1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{R} \right]^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left[(r_0)_i (t') (r_0)_j (t') \right], \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_{ij}}{\partial t^2} &= \frac{m}{\left(1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{R}\right)^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left[(r_0)_i(t') (r_0)_j(t') \right] - \\ &\quad - \frac{m}{\left[1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{R}\right]^3} \left[\frac{\vec{R} \cdot \dot{\vec{u}} - u^2}{R} + \frac{(\vec{R} \cdot \vec{u})^2}{R^3} \right] \frac{\partial}{\partial t'} \left[(r_0)_i(t') (r_0)_j(t') \right]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Con esto S_{ij} queda dado por:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{1}{2} \frac{m}{\left(1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{R}\right)^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left[(r_0)_i(t') (r_0)_j(t') \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{m}{\left(1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{u}}{R}\right)^3} \left[\frac{\vec{R} \cdot \dot{\vec{u}} - u^2}{R} + \frac{(\vec{R} \cdot \vec{u})^2}{R^3} \right] \frac{\partial}{\partial t'} \left[(r_0)_i(t') (r_0)_j(t') \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{m}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{u})^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left[(r_0)_i(t') (r_0)_j(t') \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{m}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{u})^3} \left[\frac{\vec{R} \cdot \dot{\vec{u}} - u^2}{R} + \frac{(\vec{R} \cdot \vec{u})^2}{R^3} \right] \frac{\partial}{\partial t'} \left[(r_0)_i(t') (r_0)_j(t') \right]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Para preservar conservación de la energía, los términos de \bar{h}_{ij} que van como potencias mayores a la lineal en $\frac{1}{R}$ no pueden estar asociados a radiación. Otra condición

necesaria para que haya radiación es que el sistema se encuentre acelerado respecto a un observador en reposo cuyo tiempo coordinado es t .

Para identificar los términos de S_{ij} que contribuyen a la radiación se puede considerar un marco de referencia momentáneamente en reposo, es decir $\vec{u} = 0$, por lo cual el único termino que sobrevive es

$${}^{rad}S_{ij} = \frac{m}{2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left[(r_0)_i(t') (r_0)_j(t') \right]. \quad (2.55)$$

Ya se realizó el análisis del momento cuadrupolar, pero, ¿Por qué es el cuadrupolar el primer momento no nulo de una onda gravitacional?

2.2.2. Momentos monopolar, dipolar y leyes de conservación

Si en (2.18) se toma $l = 0$ y la componente temporal del tensor de energía momento, t^{00} , se obtiene el momento monopolar de masa que se definió arriba como M

$$M = \int T^{00}(\vec{r}', t - r) d^3r' \quad (2.56)$$

sin embargo, al estar la fuente localizada, es decir, no hay materia fluyendo ni hacia el interior ni hacia el exterior, lo cual mantiene la masa total m independiente del tiempo. Esto implica que al derivar (2.56) con respecto al tiempo el resultado es nulo

$$\partial_0 M = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_0 \rho(\vec{r}', t - r) d^3r' = 0, \quad (2.57)$$

lo cual claramente muestra la ley de conservación de la materia y esto a su vez deja ver que el término monopolar no está asociado a radiación.

Ahora queda por responder ¿Por qué en gravitación no hay radiación dipolar? Para responder a esta pregunta hay que analizar las dos primeras derivadas temporales del momento dipolar de la masa (M^i), que igualmente se definió en (2.56). Al hacer la primer derivada parcial con respecto al tiempo coordenado se tiene que

$$\begin{aligned}
 \partial_0 M^i &= \int_{\mathbb{R}^3} \partial_0 [T^{00} (r')^i] d^3 r' \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^3} (\partial_j T^{0j}) (r')^i d^3 r' \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} [\cancel{\partial_j (T^{0j} (r')^i)} + T^{0j} \partial_j (r')^i] d^3 r' \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} T^{0j} \delta_j^i d^3 r' \\
 &= \int_{\mathbb{R}^3} T^{0i} d^3 r' \\
 &= P^i.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

El resultado que se obtiene finalmente en el cálculo anterior corresponde primer momento asociado al momento lineal definido en (2.33). Al hacer la segunda derivada con respecto al tiempo coordenado de M^i y por la ley de la conservación del momento lineal se obtiene que:

$$\partial_0 P^i = 0, \tag{2.59}$$

por lo cual no hay aceleración y por lo tanto tampoco existe radiación gravitacional asociada al momento dipolar de la masa. Con esto finalmente se muestra el porque la radiación cuadrupolar es la predominante en la gravitación, a diferencia de la radiación electromagnética en donde el primer momento no nulo es el dipolar.

Como lo menciona *Misner et al* [30], lo antes descrito es consecuencia de un teorema más general:

Considérese un campo de radiación clásico, cuyas partículas asociadas en mecánica cuántica tienen espín entero s , y masa en reposo cero. Resolver ese campo de radiación en armónicos esféricos, es decir, en momentos multipolares. Todas las componentes con $l < s$ son nulas; en general aquellas con $l \geq s$ no desaparecen; ¡y esto es independiente de la naturaleza de la fuente!

Al ser la gravitación una teoría de espín $s = 2$ se espera, del teorema anterior, que el primer momento multipolar sea para $l = 2$, es decir, el momento cuadrupolar.

2.2.3. Validez del límite de bajas velocidades

Desde el inicio, uno de los pilares de la teoría linealizada de la gravedad es el considerar la condición $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ y el considerar el límite de bajas velocidades es necesario para mantener esta condición. De lo anterior resulta conveniente preguntarse ¿Qué pasa con $|h_{\mu\nu}|$ si se considera que los elementos de la fuente se mueven a velocidades cercanas a la lumínica?

Para responder a esta pregunta empecemos por lo siguiente. De relatividad especial se sabe que el cuatro-vector de velocidad está definido como

$$\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \gamma(1, \vec{u}), \quad (2.60)$$

en donde el factor γ corresponde al conocido factor de Lorentz

$$\gamma \equiv \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}. \quad (2.61)$$

Por otra parte, si se considera las componentes espacio-tiempo del tensor de energía momento, de la definición en (1.6), las cuales dependen de las componentes espaciales del cuatro-vector de velocidad

$$T^{0i} = \rho U^0 U^i = \gamma^2 \rho u^i. \quad (2.62)$$

Al tomar el límite de velocidades relativistas en la expresión anterior, es decir $|\vec{u}| \rightarrow 1$, se obtiene lo siguiente:

$$\lim_{\|\vec{u}\| \rightarrow 1} T^{0i} = \lim_{\|\vec{u}\| \rightarrow 1} \frac{\rho u^i}{1 - u^2} \rightarrow \infty. \quad (2.63)$$

De este sencillo cálculo es fácil ver que para mantener la condición de pequeñas perturbaciones a la métrica de Minkowski, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, se deben considerar bajas velocidades. Si los elementos de la fuente se mueven a velocidades cercanas a las de la luz, en el momento cuadrupolar de una onda gravitacional, analizado antes, aparecen los efectos de curvatura no-nula.

2.3. Campo magnético y campo gravitoelectromagnético

Como ya se ha visto a lo largo del texto, la similitud entre la teoría de gravedad linealizada y la teoría electromagnética es innegable y es esta similitud la que predice la existencia de un nuevo campo, que en la versión newtoniana de la gravitación no existe. A este campo nuevo se le conoce como campo gravitomagnético.

2.3.1. Magnetismo

En la teoría electromagnética al imponer la norma de Lorentz ($A^\mu_{,\mu} = 0$) se obtiene una ecuación de onda para el comportamiento del cuatropotencial A^μ

$$\square A^\mu = 0. \quad (2.64)$$

Sin embargo, si se considera solamente el caso estacionario, partiendo de la ecuación de Ampere para el campo magnético

$$\nabla \times \vec{B} = 4\pi \vec{j}, \quad (2.65)$$

en donde se sabe que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = 4\pi \vec{j}. \quad (2.66)$$

Al estar trabajando en el caso estacionario la norma de Lorentz se reduce solamente a la parte independiente del tiempo, a lo cual se le conoce como la norma de Coulomb

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad (2.67)$$

con esto en lugar de la ecuación de onda lo que se obtiene es una ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \vec{A} = -4\pi \vec{j}, \quad (2.68)$$

cuya solución es conocida y se puede escribir como

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d^3 r'. \quad (2.69)$$

Al hacer un desarrollo multipolar del potencial vectorial, el primer termino no nulo es el dipolar

$$\begin{aligned} A_i(\vec{r}) &= \frac{1}{r} \int j_i(\vec{r}') d^3 r' + \frac{r^k}{r^3} \int j_i(\vec{r}') r'_k d^3 r' + \dots \\ &= \frac{r^k}{r^3} \int j_i(\vec{r}') r'_k d^3 r' + \dots, \end{aligned} \quad (2.70)$$

en donde el primer término del desarrollo anterior, correspondiente al término monopolar, resulta ser cero debido a que la densidad de corriente se encuentra localizada,

$$\int j_i(\vec{r}') d^3 r' = 0. \quad (2.71)$$

Haciendo un poco de álgebra

$$\begin{aligned} r^k \int j_i(\vec{r}') r'_k d^3 r' &= -\frac{1}{2} r^k \int (r'_i j_k - r'_k j_i) d^3 r' \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon^{ikl} r_j \int (\vec{r}' \times \vec{j})_l d^3 r' \\ &= -\frac{1}{2} \left[\vec{r} \times \int (\vec{r}' \times \vec{j}) d^3 r' \right]_i, \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\Rightarrow A_i(\vec{r}) = -\frac{1}{2r^3} \left[\vec{r} \times \int (\vec{r}' \times \vec{j}) d^3 r' \right]_i. \quad (2.73)$$

A la integral de la expresión anterior se le puede asociar una cantidad conocida como momento magnético, la cual se define como:

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r', \quad (2.74)$$

con esto finalmente el potencial vectorial a orden dipolar toma la forma

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (2.75)$$

Recordando nuevamente la relación entre el campo magnético y el potencial vectorial se obtiene una nueva ecuación que describe el campo magnético a orden dipolar

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{3\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3}, \quad (2.76)$$

en donde \hat{n} es un vector unitario que apunta en la dirección de \vec{r} . Es claro que este campo, al ser inversamente proporcional a r^3 , no se encuentra asociado a radiación.

2.3.2. El campo gravitomagnético

En analogía con el caso del campo magnético, para una distribución de masa-energía estacionaria y localizada, los cálculos se vuelven prácticamente los mismos, obteniendo un resultado similar en el caso gravitacional salvo constantes. Para desarrollar esta parte se seguirán los cálculos y el razonamiento que exponen Ciufolini y Wheeler en el capítulo 6 de su libro [11].

Al imponer la norma de Lorentz, al ser la distribución estacionaria, se obtiene en lugar de una ecuación de onda un ecuación de Poisson. Tomando las componentes

tiempo espacio de $\bar{h}_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{h}_{0i} &= -16\pi T_{0i} \\ &= -16\pi \rho v_i.\end{aligned}\tag{2.77}$$

La solución a esta ecuación es nuevamente la análoga a la del potencial vectorial magnético (2.69)

$$\bar{h}_{0i}(\vec{r}) = -4 \int \frac{\rho(\vec{r}') v_i(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d^3 r'.\tag{2.78}$$

Si consideramos una distribución esférica rotando con velocidad angular $\vec{\alpha}$

$$\vec{v} = \vec{\alpha} \times \vec{r}',\tag{2.79}$$

$$\Rightarrow \vec{h}(\vec{r}) = -4 \int \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{\alpha} \times \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} r'^2 dr' d\Omega'.\tag{2.80}$$

Haciendo la misma álgebra que en el caso magnético, (2.72),

$$\therefore \vec{h} = \frac{16\pi}{3r^3} \left[\vec{r} \times \int \vec{\alpha}(\vec{r}') \rho(\vec{r}') r'^4 dr' \right].\tag{2.81}$$

Usando la definición del momento angular clásico

$$\begin{aligned}
\vec{J} &= \int \vec{r}' \times (\rho \vec{v}) d^3 r' \\
&= \int \vec{r}' \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}') \rho(r') r'^2 dr' d\Omega' \\
&= \frac{8\pi}{3} \int \vec{\alpha}(r') \rho(r') r'^4 dr',
\end{aligned} \tag{2.82}$$

y usando esta definición obtenemos un análogo al potencial vectorial magnético,

$$\vec{h}(\vec{r}) = -2 \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3}. \tag{2.83}$$

Calculando el rotacional de este potencial gravitomagnético se obtiene un campo análogo al campo magnético, el cual predice un efecto gravitacional que no se encuentra en la teoría newtoniana asociado a masa en movimiento. A este campo se le conoce como campo gravitomagnético y está dado por

$$\vec{H} = \nabla \times \vec{h} = 2 \left[\frac{\vec{J} - 3(\vec{J} \cdot \hat{n})\hat{n}}{r^3} \right]. \tag{2.84}$$

Como ya se mencionó antes, el campo gravitomagnético no se encuentra descrito por la teoría de la gravedad newtoniana y sus efectos fueron detectados por primera vez en el año 2004 [10], casi 90 años después del nacimiento de la teoría general de la relatividad de Einstein. El motivo por el cual este campo tardó tanto tiempo en ser detectado es debido a que el orden de magnitud del campo gravitacional newtoniano es mucho mayor que el gravitomagnético,

$$\frac{\|\vec{h}(\vec{r})\|}{|\phi(\vec{r})|} = \frac{-4\frac{m\|\vec{v}\|}{c^4 r}}{\frac{m}{r}} \quad (2.85)$$
$$\sim \frac{\|\vec{v}\|}{c^4} \ll 1.$$

Aunque la analogía entre ambas teorías no es exacta, se ha obtenido un campo gravitacional que no estaba considerado en la teoría newtoniana de la gravitación. Queda por ver que efecto tiene este campo y una posible propuesta experimental para su detección.

Capítulo 3

Campo producido por una partícula masiva en un campo gravitoelectromagnético externo

3.1. Partícula en un campo electromagnético

En electrodinámica se sabe que el movimiento de una partícula con carga e y masa m inmersa en un campo eléctrico \vec{E} y un campo magnético B está descrito por la ecuación de Lorentz para la fuerza

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \right) \right], \quad (3.1)$$

o en su forma covariante

$$m \frac{dU^\alpha}{d\tau} = e F^{\alpha\beta} U_\beta. \quad (3.2)$$

Si se tiene una partícula puntual con masa m y carga e inmersa en un campo

eléctrico \vec{E} y un campo magnético \vec{B} uniformes, estáticos y paralelos; se puede mostrar que, usando constantes de integración apropiadas, la solución paramétrica a la ecuación anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} x &= A\tilde{R} \sin \phi, \\ y &= A\tilde{R} \cos \phi, \\ z &= \frac{\tilde{R}}{\rho} \sqrt{1 + A^2} \cosh(\rho\phi), \\ ct &= \frac{\tilde{R}}{\rho} \sqrt{1 + A^2} \sinh(\rho\phi), \end{aligned} \quad (3.3)$$

en donde

$$\tilde{R} = \frac{mc^2}{eB}, \quad \rho = \frac{E}{B}, \quad \phi = \frac{1}{\tilde{R}}\tau, \quad E \equiv \|\vec{E}\|, \quad B \equiv \|\vec{B}\|. \quad (3.4)$$

Por otra parte, A corresponde a un parámetro libre, que aparece como una constante de integración al momento de resolver las ecuaciones diferenciales del problema y el cual queda determinado al imponer condiciones iniciales.

$F^{\alpha\beta}$ corresponde al tensor de Faraday, definido en un espacio-tiempo plano de cuatro dimensiones como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.5)$$

el cual en términos de los campos eléctrico y magnético tiene la forma

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Para obtener este resultado, (3.3), empecemos por considerar los campos eléctrico y magnético en la dirección \hat{z}

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (0, 0, E), \\ \vec{B} &= (0, 0, B). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Con estos campos las únicas componentes no nulas del tensor de Faraday son $F^{03} = E$, $F^{30} = -E$, $F^{12} = B$ y $F^{21} = -B$. Usando estas componentes en (3.2) se obtienen 4 ecuaciones diferenciales

$$\frac{dU^0}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{03} U_3 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 t}{\partial \tau^2} = \frac{e}{m} E \frac{dz}{d\tau}, \quad (3.8)$$

$$\frac{dU^3}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{30} U_0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 z}{\partial \tau^2} = \frac{e}{m} (-E) \frac{d(-t)}{d\tau}, \quad (3.9)$$

$$\frac{dU^1}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{12} U_2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 x}{\partial \tau^2} = \frac{e}{m} B \frac{dy}{d\tau}, \quad (3.10)$$

$$\frac{dU^2}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{21} U_1 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{e}{m} (-B) \frac{dx}{d\tau}. \quad (3.11)$$

Tenemos dos pares de ecuaciones diferenciales acopladas, (3.8) con (3.9) y (3.10) con (3.11). Para desacoplarlas comencemos por integrar estas cuatro ecuaciones una vez con respecto al tiempo propio, el resultado de hacer esta integración es

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{e}{m}Ez, \quad (3.12)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{e}{m}Et, \quad (3.13)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{e}{m}By, \quad (3.14)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{e}{m}Bx. \quad (3.15)$$

Sustituyendo (3.14) en (3.11) y (3.15) en (3.10)

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} &= \frac{e}{m}B \left(-\frac{e}{m}Bx \right) \\ &= -\left(\frac{e}{m}B \right)^2 x, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{d\tau^2} &= -\frac{e}{m}B \left(\frac{e}{m}By \right) \\ &= -\left(\frac{e}{m}B \right)^2 y. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Las soluciones generales a estas dos ecuaciones ya desacopladas son conocidas y tienen la forma

$$x = \alpha \sin \left[\frac{e}{m}B\tau \right] + \beta \cos \left[\frac{e}{m}B\tau \right], \quad (3.18)$$

$$y = \gamma \sin \left[\frac{e}{m}B\tau \right] + \delta \cos \left[\frac{e}{m}B\tau \right]. \quad (3.19)$$

Siempre es posible elegir un sistema coordenado en el cual $\beta = 0$ y $\gamma = 0$ y gracias a esto las soluciones para x y y se reducen a

$$x = \alpha \sin \left[\frac{e}{m} B \tau \right], \quad (3.20)$$

$$y = \delta \cos \left[\frac{e}{m} B \tau \right]. \quad (3.21)$$

Ahora, sustituyendo (3.12) en (3.9) y (3.13) en (3.8)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{d\tau^2} &= \frac{e}{m} E \left(\frac{e}{m} E z \right) \\ &= \left(\frac{e}{m} E \right)^2 z, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{dt^2}{d\tau^2} &= \frac{e}{m} E \left(\frac{e}{m} E t \right) \\ &= \left(\frac{e}{m} E \right)^2 t. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Nuevamente la solución a estas dos ecuaciones es conocida [3]

$$t = \tilde{\alpha} \sinh \left(\frac{e}{m} E \tau \right) + \tilde{\beta} \cosh \left(\frac{e}{m} E \tau \right), \quad (3.24)$$

$$z = \tilde{\gamma} \sinh \left(\frac{e}{m} E \tau \right) + \tilde{\delta} \cosh \left(\frac{e}{m} E \tau \right). \quad (3.25)$$

De igual forma es posible reducir las soluciones quedando únicamente

$$t = \tilde{\alpha} \sinh\left(\frac{e}{m} E \tau\right), \quad (3.26)$$

$$z = \tilde{\delta} \cosh\left(\frac{e}{m} E \tau\right). \quad (3.27)$$

Solamente queda por determinar el valor de las constantes, para lo cual se usa la condición

$$U^\alpha U_\alpha = -c^2. \quad (3.28)$$

para aplicar esta condición primero hay que calcular las componentes de la cuadrivelocidad, U_α , con lo cual finalmente se obtiene el resultado que se muestra en (3.3).

3.2. Partícula masiva en un campo gravitoelectromagnético externo

Si se pretende determina el movimiento de una partícula en un campo gravitacional, se debe usar la ecuación geodésica,

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\beta\epsilon}^\alpha x^\beta x^\epsilon = 0. \quad (3.29)$$

En el límite de campo gravitacional débil y con la aproximación de bajas velocidades, se obtiene una ecuación equivalente a la de la fuerza de Lorentz (3.1) para la electrodinámica, [34] [11]

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \left[\vec{G} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{H} \right) \right], \quad (3.30)$$

siendo \vec{G} el campo gravitacional newtoniano,

$$\vec{G}(\vec{r}, t) = -\nabla h_{00} - \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}. \quad (3.31)$$

Debido a que la ecuación que describe la ruta geodésica seguida por una partícula en el límite de campo débil (3.30), y la ecuación de la fuerza de Lorentz para la electrodinámica(3.1) son las mismas, es de esperarse que la geodésica seguida por la partícula de masa m en campos gravitoelectrónico \vec{G} y gravitomagnético \vec{H} externos, estáticos, uniformes y paralelos al eje z , coincida con la obtenida solución obtenida en (3.3)

$$\begin{aligned} x &= A\tilde{R} \sin \phi, \\ y &= A\tilde{R} \cos \phi, \\ z &= \frac{\tilde{R}}{\rho} \sqrt{1 + A^2} \cosh(\rho\phi), \\ ct &= \frac{\tilde{R}}{\rho} \sqrt{1 + A^2} \sinh(\rho\phi), \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\tilde{R} \equiv \frac{1}{H}, \quad \rho \equiv \frac{G}{H}, \quad \phi \equiv \frac{\tau}{\tilde{R}}, \quad G \equiv \|\vec{G}\|, \quad H \equiv \|\vec{H}\|. \quad (3.33)$$

Siendo nuevamente A en (3.32), al igual que en (3.3), una constante de integración que se determina al imponer condiciones iniciales al problema.

De esta solución (3.32) se puede ver que, desde un sistema de referencia que se mantiene en reposo definido a $t = 0$ y cuyas coordenadas espaciales se mantienen constantes ($x^i = cte$), al entrar la partícula a la región de los campos gravitoelectrónico y gravitomagnético paralelos esta comienza a moverse de manera acelerada sobre una curva geodésica descrita por una helicoides, como se muestra en la imagen 3.1.

Conociendo las componentes de cuadrivector de posición (3.32) se pueden calcu-

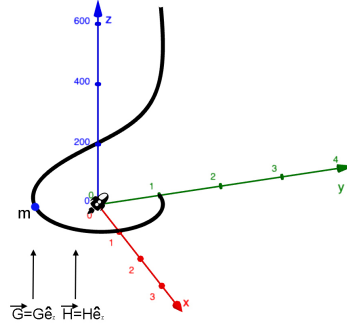


Figura 3.1: Curva de la posición de la partícula de masa m inmersa en campos gravitoelectromagnético y gravitomagnético paralelos y del mismo orden de magnitud.

lar las componentes de los 4-vectores de velocidad y de aceleración

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{1}{\gamma} A \cos \phi, \\
 u_y &= -\frac{1}{\gamma} A \sin \phi, \\
 u_z &= \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 + A^2} \sinh(\rho\phi), \\
 u_{ct} &= \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 + A^2} \cosh(\rho\phi)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
 a_x &= -\frac{A}{\gamma^2 \tilde{R}} \sin \phi - A \vec{u} \cdot \vec{a} \cos \phi, \\
 a_y &= -\frac{A}{\gamma^2 \tilde{R}} \cos \phi + A \vec{u} \cdot \vec{a} \sin \phi, \\
 a_z &= \frac{\rho \sqrt{1 + A^2}}{\gamma^2 \tilde{R}} \cosh(\rho\phi) - \sqrt{1 + A^2} \vec{u} \cdot \vec{a} \sinh(\rho\phi), \\
 a_{ct} &= \frac{\rho \sqrt{1 + A^2}}{\gamma^2 \tilde{R}} \sinh(\rho\phi) - \sqrt{1 + A^2} \vec{u} \cdot \vec{a} \cosh(\rho\phi).
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Las expresiones anteriores son validas de manera general, pero recordando que se está tomando el límite de bajas velocidades comparadas con la lumínica, esto implica que el factor de Lorentz, γ , toma un valor muy cercano a 1, dejando las componentes de la 4-velocidad únicamente como

$$\begin{aligned}
 u_x &= A \cos\phi, \\
 u_y &= -A \sin\phi, \\
 u_z &= \sqrt{1 + A^2} \sinh(\rho\phi), \\
 u_{ct} &= \sqrt{1 + A^2} \cosh(\rho\phi),
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

mientras que las componentes de la 4-aceleración se reducen a

$$\begin{aligned}
 a_x &= -\frac{A}{\tilde{R}} \sin\phi, \\
 a_y &= -\frac{A}{\tilde{R}} \cos\phi, \\
 a_z &= \frac{\rho\sqrt{1 + A^2}}{\tilde{R}} \cosh(\rho\phi), \\
 a_{ct} &= \frac{\rho\sqrt{1 + A^2}}{\tilde{R}} \sinh(\rho\phi),
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

es decir, los segundos sumandos en (3.35) corresponden a correcciones relativistas, que en este caso pueden ser despreciadas. Además, en esta aproximación, el tiempo propio de la partícula, τ , y el tiempo coordenado t , que se mide en el sistema de referencia con coordenadas espaciales constantes, son prácticamente iguales, esto permite que se pueda cambiar el parámetro que define la curva de la trayectoria de la partícula por este tiempo coordenado t .

Como ya se mencionó antes, para el sistema de referencia con $x^i = cte$, la partícula se encuentra acelerada, por lo cual, si se considera que la solución encontrada para la ecuación geodésica (3.32), y siguiendo la analogía con los campos que genera una

partícula cargada moviéndose con velocidad arbitraria, el campo gravitoelectrico y gravitomagnético de una partícula puntual masiva que se mueve con velocidad arbitraria están dados por

$$\vec{G} = m \left[\frac{(\hat{n} - \vec{\beta}(1 - \beta^2))}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3 \|\vec{r} - \vec{r}'\|^2} + \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \vec{a})}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3 \|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right], \quad (3.38)$$

$$\vec{H} = \hat{n} \times \vec{G}, \quad (3.39)$$

En donde el vector unitario \hat{n} se define de la misma manera que en (2.13):

$$\hat{n} \equiv \frac{\vec{r}}{r}. \quad (3.40)$$

En el marco de referencia con coordenadas espaciales constantes definido en $t = 0$, el cual no se encuentra en caída libre junto con la partícula, también es posible calcular un análogo al vector de Poynting electromagnético, el cual en el caso gravitacional estaría dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi} \vec{G} \times \vec{H} \quad (3.41)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi} \|\vec{G}\|^2 \hat{n}. \quad (3.42)$$

Esto significa que desde un punto colocado en el sistema de referencia en reposo y cuyas coordenadas se mantienen constantes en el tiempo sí es posible detectar radiación gravitacional, la cual, como se muestra en 2.2.1, tiene como término dominante el de orden cuadrupolar.

Usando los argumentos obtenidos en los capítulos anteriores, sobre la analogía entre la aproximación linealizada de la gravitación y la teoría electromagnética, en este capítulo se obtuvo la solución a la ecuación geodésica para una partícula puntual en una región con campos gravitoelectrónico y gravitomagnético.

Esta solución define una curva parametrizada por el tiempo coordenado t , en el límite de campo débil y con la aproximación de bajas velocidades, la cual se usará más adelante para proponer un modelo que permita detectar el campo gravitomagnético y sus efectos usando herramientas de la geometría diferencial. Esta propuesta corresponde simplemente a un modelo asociado a un experimento mental, cuya posibilidad experimental real no se especifica en este trabajo.

Capítulo 4

Conclusión

A lo largo de este trabajo se ha presentado la linealización de las ecuaciones de campo de Einstein. Además de analizar la analogía entre las ecuaciones de Maxwell para la teoría electromagnética y la teoría linealizada de la gravitación, prediciendo también la existencia de un campo que no se encuentra en la teoría newtoniana de la gravedad, a este campo se lo conoce como gravitomagnético, en analogía con el campo magnético.

Una vez ya desarrollado el marco teórico de la gravedad linealizada y sus predicciones, se presentó el problema de una partícula puntual en un campo gravitoelectrico y un campo gravitomagnético, paralelos al eje z . El análisis de este problema permite obtener resultados que no se encuentran reportados aún en la literatura y que se presentan en este trabajo.

La posición de la partícula de masa m se encuentra dada por una curva parametrizada por el tiempo coordenado t dada en (3.32), siendo medida desde el sistema de referencia con coordenadas espaciales constantes y en donde los campos gravitoelectrico y gravitomagnético se encuentran orientados de forma paralela al eje z , la cual corresponde a la parametrización de una curva tipo helicoides.

Al derivar las componentes espaciales del 4-vector de posición con respecto al parámetro se obtiene la velocidad de la partícula, (3.34); si se divide este vector por

su magnitud se obtiene como resultado un vector unitario \hat{T} tangente a la curva en todo punto, definido de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\hat{T}(s) &= \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \\ &= \frac{1}{[A^2 + (1 + A^2)\sinh^2(\rho\phi)]^{1/2}} \left(A\cos\phi, -A\sin\phi, \sqrt{1 + A^2}\sinh(\rho\phi) \right),\end{aligned}\quad (4.1)$$

en donde $s(t)$ corresponde a la longitud de arco de la curva parametrizada y que por definición está dada por:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| dt. \quad (4.2)$$

Siguiendo la teoría local de curvas paramétricas expuesta por Manfredo P. do Carmo en su libro [14], se tiene que una curva parametrizada por un parámetro arbitrario tiene asociada una cantidad que proporciona una medida de qué tan rápido se desvía la curva de la recta tangente para cada valor del parámetro. A esta cantidad se le conoce como curvatura, $(k(s))$, y cuyo valor nulo significa que la curva es una línea recta. Esta curvatura asociada a una curva parametrizada por la longitud de arco se obtiene de la ecuación

$$\left\| \frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} \right\| = k(s), \quad (4.3)$$

mientras que el valor de esta cantidad, siempre que la velocidad sea no nula y para un parámetro arbitrario, en este caso el tiempo coordenado t , se puede obtener como

$$k(t) = \frac{\|\vec{u}(t) \times \vec{a}(t)\|}{\|\vec{u}(t)\|^3}. \quad (4.4)$$

Para el caso de la curva paramétrica obtenida en (3.32) vista desde el sistema de referencia con coordenadas espaciales constantes, se obtiene que la curvatura está dada por

$$k(t) = \frac{A}{\tilde{R}} \left\{ \frac{(1 + A^2) [\rho^2 \cosh^2(\rho\phi) + \sinh^2(\rho\phi)] + A^2}{[A^2 + (1 + A^2) \sinh^2(\rho\phi)]^3} \right\}^{1/2}. \quad (4.5)$$

Existe otro vector unitario, $\hat{N}(s)$, el cual es ortogonal al vector $\hat{T}(s)$ y que corresponde a la componente de la aceleración perpendicular a la velocidad. Este vector que se conoce como *vector normal*, se obtiene directamente de la ecuación

$$\frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} = k(s)\hat{N}(s) \quad \Rightarrow \quad \hat{N}(s) = \frac{1}{k(s)} \frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2}, \quad (4.6)$$

dando como resultado en términos de velocidad y aceleración

$$\hat{N}(s) = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \frac{\left[\vec{a} - \vec{u} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{\|\vec{u}\|^2} \right) \right]}{\left\| \frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2} \right\|}. \quad (4.7)$$

Los vectores $\hat{T}(s)$ y $\hat{N}(s)$ definen un plano en cada punto de la curva paramétrica, a este plano se le conoce como el plano osculador, este contiene en cada momento a la aceleración y la velocidad de la partícula. De manera normal a este plano se puede definir un tercer vector unitario, al cual se le conoce como el vector binormal, $\hat{B}(s)$, y se obtiene de hacer el producto vectorial entre $\hat{T}(s)$ y $\hat{N}(s)$,

$$\hat{B}(s) = \hat{T}(s) \times \hat{N}(s). \quad (4.8)$$

Otra cantidad asociada a la curva es la torsión, $\tau(t)$. La torsión se encuentra ligada a la medida de la rapidez con la cual se aleja la curva del plano osculador para cada valor de t . Para una curva definida por un parámetro arbitrario, en este caso el tiempo coordenado t , la torsión está dada por la siguiente expresión

$$\tau(t) = -\frac{(\vec{u}(t) \times \vec{a}(t)) \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}}{\|\vec{u}(t) \times \vec{a}(t)\|^2}. \quad (4.9)$$

Usando el resultado obtenido en (3.32), la torsión que se obtiene es

$$\tau(t) = \frac{A\sqrt{1+A}}{\tilde{R}} \frac{(\rho^2 - 1)\sinh(\rho\phi)}{(1+A)[\rho^2 \cosh^2(\rho\phi) + \sinh^2(\rho\phi)] + A^2}. \quad (4.10)$$

Hasta el momento se han obtenido 5 cantidades asociadas a la curva paramétrica obtenida en (3.32), los tres vectores \hat{T} , \hat{N} y \hat{B} , la curvatura y la torsión, a través de las cuales se satisfacen las ecuaciones de Frenet-Serret [14],

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{T}(s)}{ds} &= k(s)\hat{N}(s), \\ \frac{d\hat{N}(s)}{ds} &= -k(s)\hat{T}(s) - \tau(s)\hat{B}(s), \\ \frac{d\hat{B}(s)}{ds} &= \tau(s)\hat{N}(s). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales vectoriales describen cómo es que varía el triedro formado por \hat{T} , \hat{N} y \hat{B} asociado a una curva.

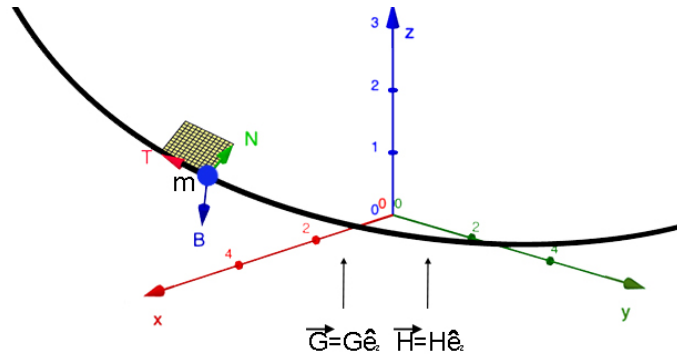


Figura 4.1: Triángulo de Frenet-Serret y plano osculador para una partícula que se mueve en campos gravitoelectrónico y gravitomagnético paralelos.

El triángulo de vectores unitarios definen un sistema de referencia conocido como el triángulo de Frenet-Serret, el cual es un marco coordenado cartesiano, que en este caso corresponde al marco en caída libre junto con la partícula que se encuentra en los campos gravitoelectrónico y gravitomagnético constantes y orientados de forma paralela en dirección al eje z . El triángulo asociado al movimiento de la partícula, del problema analizado en este trabajo, es un cálculo que no se encuentra reportado en la literatura y del cual se pueden obtener resultados interesantes.

Si se toma el límite, respecto al sistema de referencia que mantiene sus coordenadas espaciales constantes en el tiempo, para cuando $t \rightarrow \infty$ sobre la expresión que se obtuvo para la curvatura, y considerando que el campo gravitomagnético es del mismo orden de magnitud o mucho menor que el campo gravitoelectrónico, se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0, \quad (4.12)$$

en donde, desde el entendido de que el inverso multiplicativo de la curvatura se puede interpretar como el radio de curvatura, este límite nos dice que, para tiempos suficientemente largos, un observador que se mantiene con coordenadas espaciales constantes en el sistema de referencia definido en $t = 0$ vería que la partícula se mueve aproximadamente sobre una línea recta .

Por otra parte, tomando el mismo límite, y bajo las mismas condiciones, para la torsión el resultado que se obtiene es el mismo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A\sqrt{1+A}}{\tilde{R}} \frac{(\rho^2 - 1)\sinh(\rho\phi)}{(1+A)[\rho^2 \cosh^2(\rho\phi) + \sinh^2(\rho\phi)] + A^2} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Considerando la torsión como la razón entre la rapidez en el plano $x - y$ y la rapidez a lo largo del eje z , este resultado implica que para tiempos grandes la partícula se mueve mucho más rápido en dirección en la que apunta el campo gravitoelectrónico de lo que lo hace en la circunferencia generada por la fuerza que produce el campo gravitomagnético.

Esto no significa que la trayectoria que sigue la partícula sea una línea recta y no una helicoide, sino que, como ya se mencionó antes, los efectos del campo gravitomagnético se perciben con mayor intensidad en los primeros momentos de la partícula en la región de campo. En estos primeros momentos la torsión es lo suficientemente no despreciable como para poder detectarlo como efecto del campo gravitomagnético.

El producto vectorial entre $\vec{r}(t)$ y $\vec{u}(t)$ define el momento angular de la partícula,

$$\vec{L} = m\vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \quad (4.14)$$

siendo este un vector paralelo a \hat{B} , lo cual implica que \vec{L} tampoco permanece constante con el paso del tiempo para el observador en el sistema de referencia fijo cuyas coordenadas espaciales son constantes, es decir, el momento angular asociado a este sistema no se conserva para un observador en el sistema de referencia en reposo. Por otra parte esto no es percibido por el observador en caída libre debido al principio de equivalencia.

Los comentarios y cálculos presentados previamente proporcionan un argumento para plantear un modelo para un experimento mental, en el que a partir de la curvatura y la torsión de la trayectoria de una partícula, se pueda, en principio, medir de manera indirecta el campo gravitomagnético al cual se encuentra sujeta dicha partícula.

En $t = 0$ se definen dos sistemas de referencia cuyos ejes son paralelos. El primero de ellos es un marco que por definición se mantiene en una posición constante al pasar el tiempo, a este marco coordenado se le denominará K . En el origen de este marco de referencia K se coloca un dispositivo cuyas coordenadas espaciales también permanecen constantes y el cual es el encargado de recibir la información sobre las mediciones realizadas.

Por otra parte se tiene un segundo sistema de referencia formado por los tres vectores unitarios, \hat{T} , \hat{N} y \hat{B} , los cuales a $t = 0$ se encuentran alineados de manera paralela con los ejes x , y y z del sistema de referencia K , respectivamente; a este sistema de referencia se le denomina el sistema de Frenet-Serret. De igual manera, a $t = 0$ en una nave en caída libre junto con este sistema de referencia se alinean tres giroscopios, uno con cada uno de los vectores $\hat{T}(t = 0)$, $\hat{N}(t = 0)$ y $\hat{B}(t = 0)$, los cuales a su vez apuntan cada uno en dirección a un objeto astronómico lo suficientemente lejano para estar fuera de la región del marco localmente inercial, por ejemplo, un conjunto de tres estrellas lejanas. Estos objetos servirían como referencia de la posición inicial de los giroscopios. Esto no es más que afirmar que estas estrellas no se encuentran rotando respecto al espacio absoluto. Es decir, respecto a estos objetos

astronómicos es posible medir cinemáticamente rotaciones.

Debido a que, visto desde el sistema de referencia K , las estrellas se encuentran lo suficientemente alejadas como para considerar que permanecen en reposo, el calcular un vector de separación entre un punto en el sistema de referencia de Frenet-Serret y la posición de cualquiera de las tres estrellas, es equivalente a hacerlo entre el sistema de referencia de Frenet-Serret y cualquier otro punto en reposo del sistema K , por ejemplo, el origen. Lo cual implica que lo calculado para el origen de K en (3.32) es equivalente al cálculo que se pueda hacer con cualquiera de las estrellas usadas como puntos de referencia en este trabajo.

Pensar en el vector de separación entre dos geodésicas, ξ^μ , que se obtiene de la ecuación

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu_{\alpha\beta\gamma} u^\alpha \xi^\beta u^\gamma, \quad (4.15)$$

requiere de dos objetos en caída libre, pero en este caso solamente la nave que contiene los giroscopios en el sistema de Frenet-Serret se encuentra en caída libre respecto de K .

El movimiento de los giroscopios en el espacio-tiempo está descrito por dos 4-vectores, un 4-vector de momento angular s^μ y un 4-vector de velocidad u^μ .

El 4-vector de velocidad obedece la ecuación geodésica

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0, \quad (4.16)$$

mientras que la ecuación de movimiento para el 4-vector de momento angular en un espacio-tiempo curvo es

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu s^\alpha u^\beta = 0, \quad (4.17)$$

además de que estos dos 4-vectores deben cumplir la condición

$$s^\alpha u_\alpha = 0, \quad (4.18)$$

en cualquier marco de referencia.

Recordando que la torca se define como la derivada del momento angular con respecto al tiempo, de la expresión (4.17) se obtiene que la torca que se ejerce sobre un giroscopio, en el límite de campo débil y en la aproximación de bajas velocidades, está dada por [12] [11]

$$\frac{ds^i}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} s_j H_k \equiv \varepsilon^{ijk} \omega_j s_k, \quad (4.19)$$

con ω^i las componentes de la velocidad angular de precesión de giroscopio debido al campo gravitacional, y se puede ver de esta última expresión que en magnitud es proporcional al campo gravitomagnético

$$\|\vec{\omega}\| = -\frac{1}{2} \|\vec{H}\|. \quad (4.20)$$

En analogía con un dipolo magnético con momento dipolar μ^α en presencia de un campo magnético, un giroscopio en presencia de un campo gravitacional presenta lo que se conoce como precesión geodésica [21]. Este fenómeno de precesión genera que la dirección a la que apunta el vector de momento angular del giroscopio en presencia de un campo gravitacional se vea modificada con el paso del tiempo, de tal manera

que la posición final presente un ángulo con respecto a su posición en $t = 0$ [12].

Esto implica que al correr el tiempo, un observador en la nave que se encuentra en caída libre con el sistema de Frenet-Serret, podría ver que los giroscopios habrían rotado respecto a su posición a $t = 0$, dejando de estar alineados con $\hat{T}(t = 0)$, $\hat{N}(t = 0)$ y $\hat{B}(t = 0)$. Los objetos astronómicos con los que se alinearon los giroscopios al inicio, permitirían determinar el ángulo que rotaron respecto a su posición inicial. Sin estas referencias no le sería posible al observador en el sistema de referencia de Frenet-Serret notar la precesión de los giroscopios, como se puede deducir de (4.17), ya que en el marco localmente inercial todas las componentes de los símbolos de Christoffel se anulan, dejando solamente

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = 0, \quad (4.21)$$

lo cual refiere que las componentes del 4-vector de momento angular se mantienen constantes en el tiempo, esto preserva el principio de equivalencia de la teoría de la relatividad general.

La información que obtiene el observador en la nave en caída libre, acerca del ángulo como función del tiempo que se obtiene de la rotación de los tres giroscopios con respecto a los ejes del sistema de referencia de Frenet-Serret en $t = 0$, $\theta_T(t)$, $\theta_N(t)$ y $\theta_B(t)$, es enviada al sistema de referencia K que mantiene sus coordenadas espaciales constantes y sus ejes alineados con las estrellas, con lo cual, junto con la ecuación de movimiento del momento angular (4.17) y la velocidad (4.16), el observador en K debería ser capaz de determinar los vectores base que definen el sistema de Frenet-Serret como función del tiempo, $\hat{T}(t)$, $\hat{N}(t)$ y $\hat{B}(t)$.

Una generalización del triedro de Frenet-Serret, la cual sí incluye al tiempo, es la tétrada que sigue el transporte de Fermi-Walker con rotación espacial que se expone por Misner et al [30], y cuyos vectores base se obtienen de

$$\frac{d}{d\tau} {}^{(\mu)}e_\alpha = -\Omega^{\alpha\beta} {}^{(\mu)}e_\beta, \quad (4.22)$$

con ${}^{(\mu)}\hat{e}$ el conjunto de los vectores base que forman la tétrada y ${}^{(\mu)}e_\alpha$ sus componentes, mientras que $\Omega^{\alpha\beta}$ está definido en dos partes, una que contiene el transporte de Fermi-Walker y otra que es una rotación espacial [25]

$$\Omega^{\alpha\beta} = \Omega_{(F-W)}^{\alpha\beta} + \Omega_{(SR)}^{\alpha\beta}, \quad (4.23)$$

$$\Omega_{(F-W)}^{\alpha\beta} = A^\alpha U^\beta - A^\beta U^\alpha, \quad (4.24)$$

$$\Omega_{(SR)}^{\alpha\beta} = U_\mu \omega_\nu \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (4.25)$$

En las expresiones (4.24) y (4.25) A^α y U^α son las componentes de los 4-vectores de aceleración y velocidad, las cuales se pueden obtener de (3.37) y (3.36), ω_α las componentes del 4-vector de velocidad angular, cuyas componentes espaciales corresponden a la velocidad angular de precesión obtenidas en (4.20) y que se mantiene ortogonal a la 4-velocidad, y $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ el tensor de Levi-Civita. Sin embargo, a pesar de la validez de ambos sistemas de referencia, Fermi-Walker con rotación y Frenet-Serret, en este trabajo se seguirá usando la notación de Frenet-Serret con la finalidad de usar las herramientas de la geometría diferencial de curvas paramétricas.

Una vez teniendo ya determinada la curva que define la trayectoria de manera experimental y haciendo uso de las ecuaciones de Frenet-Serret (4.11), es posible calcular la curvatura y la torsión de la trayectoria que está siguiendo la nave en caída libre vista desde el sistema de referencia K . Al ser comparados los resultados obtenidos del experimento con lo obtenido de manera teórica, solamente quedaría variar los valores de los parámetros en (4.5) y (4.10) para poder obtener la intensidad del campo gravitomagnético H .

A través de los teoremas de existencia y unicidad para problemas de valores iniciales, se sabe que la torsión y la curvatura determinan la esencia de una curva paramétrica, es decir, $\tau(s)$ y $k(s)$ determinan de forma unívoca una curva, salvo isometrías de \mathbb{R}^3 (rotaciones y traslaciones) [14].

La precisión necesaria en este modelo experimental requeriría que las mediciones para detectar los efectos de \vec{H} fueran hechas al poco tiempo haber empezado la trayectoria de la masa puntual dentro de la región de los campos y durante tiempos lo suficientemente cortos. Es decir, que el numerador de las expresiones (4.5) y (4.10) sea mayor o igual que el denominador. Esto debido a que la coordenada z de la curva que parametriza la trayectoria va como el $\cosh(\rho\phi)$, haciendo que el movimiento en esta dirección crezca muy rápido comparado con el movimiento circular del plano $x - y$, como se puede ver en la imagen 3.1, en donde se tomó como ejemplo el caso en el que $G \sim H$. Si las mediciones se realizan cuando la partícula tiene ya un tiempo largo moviéndose en los campos, eso implica que el tiempo de medición durante el experimento tiene que ser suficientemente grande para poder detectar algún efecto debido a \vec{H} , esto debido a la atenuación de los efectos de curvatura y torsión como lo muestran los límites (4.12) y (4.13).

Para el caso en el que el campo gravitomagnético sea en magnitud mucho mayor que el campo gravitoelectrónico, los efectos serían más intensos. Esto debido a que la fuerza que genera el movimiento acelerado a lo largo del eje z sería mucho menor que la fuerza que hace que la partícula se mueva en el plano $x - y$.

En principio los campos gravitoelectrónico y gravitomagnético podrían estar orientados de diferentes maneras. La situación analizada en este trabajo corresponde a un caso particular que modelaría un problema astrofísico posible.

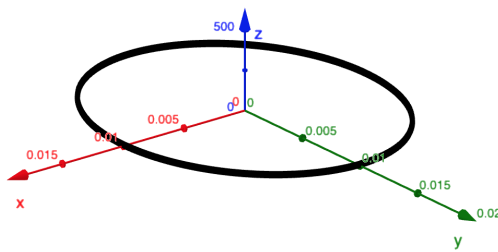


Figura 4.2: Curva de la posición de la partícula de masa m en un campo gravitomagnético intenso comparado con el campo gravitoelectrónico.

Apéndice A

Ecuación de Einstein en el límite de campo débil

Para hacer el análisis de la radiación gravitacional y del campo gravitoelectromagnético en los capítulos anteriores fue necesario hacerlo por separado, h_{ij} para el campo de radiación y h_{0i} para el gravitomagnético.

Empezando, simplemente por conveniencia y justificándolo más adelante, por descomponer el tensor de potencial gravitacional $h_{\mu\nu}$ en sus partes escalar, vectorial y tensorial de la siguiente manera

$$h_{00} = -2\phi, \tag{A.1}$$

$$h_{0i} = \omega_i, \tag{A.2}$$

$$h_{ij} = -2\psi\delta_{ij} + 2s_{ij}, \tag{A.3}$$

en donde la traza de s_{ij} es nula, siendo hasta ahora la única restricción impuesta.

Para obtener las ecuaciones de campo de Einstein es necesario primero calcular

las componentes del tensor y el escalar de Ricci, los cuales en la teoría linealizada están dados como

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} \quad (\text{A.4})$$

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

o en términos de las segundas derivadas de $h_{\mu\nu}$ como se muestran en las ecuaciones (1.13) y (1.14).

$$R_{00} = \partial_t(\partial_i\omega^i) \quad (\text{A.6})$$

$$R_{0i} = -\frac{1}{2}\partial^k\partial_k\omega_i + \frac{1}{2}\partial_i(\partial_j\omega^j) + 2\partial_t(\partial_i\psi) + \partial_t(\partial_j s_i^j) \quad (\text{A.7})$$

$$R_{ij} = -\partial_i\partial_j(\phi - \psi) - \partial_t\partial_{(i}\omega_{j)} + (\partial_t^2 - \partial^k\partial_k)(s_{ij} - \psi\delta_{ij}) + 2\partial_k\partial_{(i}s_{j)}^k \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} R &= R^\mu_\mu = R_0^0 + R_i^i \\ &= -\partial^k\partial_k\phi - \partial_t(\partial_i\omega^i) - 3\partial_t^2\psi - \partial^k\partial_k(\phi - \psi) - \partial_t\partial_{(i}\omega_{i)} + (\partial_t^2 - \partial^k\partial_k)(s_i^i - \psi\delta_i^i) + 2\partial_k\partial_{(i}s_{i)}^k \\ &= -2\partial^k\partial_k\phi - 2\partial_t\partial_i\omega^i - 6\partial_t^2\psi + 4\partial^k\partial_k\psi + 2\partial_k\partial_i s^{ik} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

En la ecuación (A.8) se introdujo por primera vez en este texto la notación de los índices de un tensor encerrados entre paréntesis, lo cual se usa en los textos de relatividad general para la construcción de un tensor simétrico y se define de la siguiente manera.

$$A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$$

Sustituyendo los resultados obtenidos para el tensor y el escalar de Ricci en (1.2), pero usando la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ en lugar de $g_{\mu\nu}$ para mantener la expresión a orden lineal en el potencial gravitacional, e igualando con $8\pi T_{\mu\nu}$ se obtienen finalmente las ecuaciones de campo

$$G_{00} = 2\partial^k \partial_k \psi + \partial_k \partial_l s^{kl} = 8\pi T_{00} \quad (\text{A.10})$$

$$G_{0i} = -\frac{1}{2}\partial^k \partial_k \omega_i + \frac{1}{2}\partial_i(\partial_l \omega^l) + 2\partial_t \partial_i \psi + \partial_t \partial_j s_i^j = 8\pi T_{0i} \quad (\text{A.11})$$

$$G_{ij} = (\delta_{ij}\partial^k \partial_k - \partial_i \partial_j)(\phi - \psi) + \partial_t [\delta_{ij}(\partial_l \omega^l) - \partial_{(i}\omega_{j)}] + 2\delta_{ij}(\partial_t^2 \psi) + (\partial_t^2 - \partial^k \partial_k)s_{ij} + 2\partial_k \partial_{(i} s_{j)}^k - \delta_{ij}(\partial_k \partial_l s^{kl}) = 8\pi T_{ij} \quad (\text{A.12})$$

En las ecuaciones de campo obtenidas se puede notar que la ecuación correspondiente a la parte tiempo-tiempo, (A.10), depende únicamente de segundas derivadas espaciales de ψ y del tensor s_{ij} , los cuales son elementos que pertenecen a la parte espacial del tensor de Einstein, G_{ij} .

Otro punto a destacar del resultado obtenido es el hecho de que la ecuación (A.10) contiene únicamente derivadas espaciales, mientras que (A.11) sólo tiene primeras derivadas con respecto al tiempo. Es solamente en (A.12) en donde aparecen segundas derivadas temporales, siendo esta parte la que se encuentra asociada a la dinámica y por lo tanto a radiación al igual que se obtuvo anteriormente, después de imponer la norma de Lorentz, la cual no se ha impuesto aquí hasta el momento.

Recordando la forma que tiene el campo gravitacional clásico (3.31) y el campo gravitomagnético (2.84) se puede notar que, tras usar algunas identidades vectoria-

les, las ecuaciones (A.11) y (A.12) pueden ser escritas en términos de estos campos de la siguiente manera

$$\frac{1}{2}(\nabla \times \vec{H})_i + \frac{1}{2}\partial_i(\partial_l \omega^l) + 2\partial_t \partial_i \psi + \partial_t \partial_j s_i^j = 8\pi T_{0i} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \partial_{(i} \vec{G}_{j)} - \delta_{ij}(\nabla \cdot \vec{G}) + (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \partial^k \partial_k) \psi + \partial_t [\delta_{ij}(\partial_l \omega^l) - \partial_{(i} \omega_{j)}] + \\ + 2\delta_{ij}(\partial_t^2 \psi) + (\partial_t^2 - \partial^k \partial_k) s_{ij} + 2\partial_k \partial_{(i} s_{j)}^k - \delta_{ij}(\partial_k \partial_l s^{kl}) = 8\pi T_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Si ahora se impone la condición de transversalidad, la cual como ya se mostró en el capítulo uno siempre puede encontrarse un marco en el cual sea válida, se tiene que

$$\partial_j s^{ij} = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\partial_j \omega^j = 0 \quad (\text{A.16})$$

Una vez impuesta la condición las ecuaciones de campo se reducen considerablemente, quedando con la forma

$$\nabla^2 \psi = 4\pi T_{00} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{1}{2}(\nabla \times \vec{H})_i + 2\partial_t(\nabla \psi)_i = 8\pi T_{0i} \quad (\text{A.18})$$

$$\partial_{(i} \vec{G}_{j)} - \delta_{ij}(\nabla \cdot \vec{G}) + (\partial_i \partial_j - \delta_{ij} \nabla^2) \psi + 2\delta_{ij}(\partial_t^2 \psi) - \square^2 s_{ij} = 8\pi T_{ij} \quad (\text{A.19})$$

Se puede ver que la después de imponer la condición de transversalidad, (A.15) y (A.16), la ecuación correspondiente a la parte escalar (A.17) se redujo a una ecuación de Poisson al igual que la ecuación newtoniana de la gravedad, pero con la diferencia de que en el caso de la ecuación de Newton el potencial gravitatorio está asociado al campo escalar ϕ y no a ψ como en este caso.

La interpretación física del campo gravitoelectrónico \vec{G} corresponde a la del campo gravitatorio clásico de Newton, mientras que la del campo gravitomagnético \vec{H} se analizó anteriormente. Únicamente queda por entender cual es el significado físico del escalar ψ y del tensor s_{ij} , los cuales se encuentran acoplados con los campos \vec{G} y \vec{H} .

Bibliografía

- [1] URL <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2017>.
- [2] Benjamin P Abbott, Richard Abbott, TD Abbott, MR Abernathy, Fausto Acernese, Kendall Ackley, Carl Adams, Thomas Adams, Paolo Addesso, RX Adhikari, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, 116(6):061102, 2016.
- [3] Ravi P Agarwal y Donal O'Regan. *An introduction to ordinary differential equations*. Springer, 2008.
- [4] George B Arfken y Hans J Weber. *Mathematical methods for physicists*. 1999.
- [5] E Bertschinger. Gravitation in the weak-field limit. *Physics 8.962 (MIT's GR course) lecture notes*, 22, 1999.
- [6] Donato Bini y Fernando de Felice. Gyroscopes and gravitational waves. *Classical and Quantum Gravity*, 17(22):4627, 2000.
- [7] S Carroll. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity, always learning*. 2013.
- [8] C Chicone, Bahram Mashhoon, y Brian Punsly. Relativistic motion of spinning particles in a gravitational field. *Physics Letters A*, 343(1-3):1–7, 2005.
- [9] Ruel V Churchill, James Ward Brown, y Lorenzo Abellanas Rapun. *Variable compleja y aplicaciones*. McGraw-Hill, 1986.
- [10] Ignazio Ciufolini y Erricos C Pavlis. A confirmation of the general relativistic prediction of the lense–thirring effect. *Nature*, 431(7011):958–960, 2004.

-
- [11] Ignazio Ciufolini y John Archibald Wheeler. *Gravitation and inertia*, tomo 101. Princeton university press, 1995.
- [12] L Filipe O Costa y José Natário. Gravito-electromagnetic analogies. *General Relativity and Gravitation*, 46(10):1–57, 2014.
- [13] William G Dixon. Dynamics of extended bodies in general relativity. i. momentum and angular momentum. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 314(1519):499–527, 1970.
- [14] Manfredo P Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*. Courier Dover Publications, 2016.
- [15] Ray D'Inverno. *Introducing Einstein's Relativity*. Clarendon Press, 1992.
- [16] Albert Einstein. The field equations of gravitation. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1915:844–847, 1915.
- [17] CW Francis Everitt, DB DeBra, BW Parkinson, JP Turneure, JW Conklin, MI Heifetz, GM Keiser, AS Silbergleit, T Holmes, J Kolodziejczak, et al. Gravity probe b: final results of a space experiment to test general relativity. *Physical Review Letters*, 106(22):221101, 2011.
- [18] Eanna E Flanagan y Scott A Hughes. The basics of gravitational wave theory. *New Journal of Physics*, 7(1):204, 2005.
- [19] Gerald B Folland. *Fourier analysis and its applications*, tomo 4. American Mathematical Soc., 2009.
- [20] Jurgen Freund. *Special relativity for beginners: a textbook for undergraduates*. World Scientific Publishing Company, 2008.
- [21] James B Hartle. Gravity: an introduction to einstein's general relativity. 2003.
- [22] Mark A Heald y Jerry B Marion. *Classical electromagnetic radiation*. Courier Corporation, 2012.
- [23] Michael Paul Hobson, George P Efstathiou, y Anthony N Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.

-
- [24] Barry R Holstein. Gyroscope precession and general relativity. *American Journal of Physics*, 69(12):1248–1256, 2001.
- [25] Bala R Iyer y CV Vishveshwara. Frenet-serret description of gyroscopic precession. *Physical Review D*, 48(12):5706, 1993.
- [26] John David Jackson. Classical electrodynamics third edition. 1998.
- [27] Lev Davidovich Landau y Eugenií Mikhailovich Lifshitz. *Teoría clásica de campos*, tomo 2. Reverté, 1992.
- [28] Michele Maggiore. *Gravitational waves: Volume 1: Theory and experiments*, tomo 1. Oxford university press, 2008.
- [29] Bahram Mashhoon, Friedrich W Hehl, y Dietmar S Theiss. On the gravitational effects of rotating masses: the thirring-lense papers. *General relativity and gravitation*, 16(8):711–750, 1984.
- [30] Charles W Misner, Kip S Thorne, y John Archibald Wheeler. *Gravitation*. Macmillan, 1973.
- [31] Wolfgang KH Panofsky y Melba Phillips. *Classical electricity and magnetism*. Courier Corporation, 2005.
- [32] Achilleus Papapetrou. *Lectures on general relativity*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [33] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [34] Wenceslao Segura González. Gravitoelectromagnetismo y principio de mach, ewt ediciones, 2013. *Downloads: www.academia.edu/9826657/Gravitoelectromagnetismo_y_principio_de_Mach*, págs. 41–48, 2006.
- [35] Elias M Stein y Rami Shakarchi. *Complex analysis*, tomo 2. Princeton University Press, 2010.

-
- [36] Kip S Thorne. Multipole expansions of gravitational radiation. *Reviews of Modern Physics*, 52(2):299, 1980.
- [37] J Van Bladel. Lorenz or lorentz? *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 33(2):69–69, 1991.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00120

Matrícula: 2181801349

Medición de la curvatura y la torsión para detectar el campo gravitomagnético.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 11 del mes de noviembre del año 2022 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. YURI BONDER GRIMBERG
DR. JUAN CARLOS HIDALGO CUELLAR
DR. ABEL CAMACHO QUINTANA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: SAUL SUAREZ VALDEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



SAUL SUAREZ VALDEZ
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. YURI BONDER GRIMBERG

VOCAL

DR. JUAN CARLOS HIDALGO CUELLAR

SECRETARIO

DR. ABEL CAMACHO QUINTANA