

CUERDAS COSMICAS

EN LAS

TEORIAS ESCALARES-TENSORIALES

DE LA GRAVITACION

A. NOE MORALES DUARTE

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

"CUERDAS COSMICAS EN LAS TEORIAS ESCALARES-TENSORIALES
DE LA GRAVITACION"

TESIS QUE PRESENTA

ALEJANDRO NOE MORALES DUARTE

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

MAYO 1990.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

AGRADECIMIENTOS

AGRADEZCO AL DR. LUIS OCTAVIO PIMENTEL R. POR SU VALIOSA COLABORACION Y ORIENTACION EN ESTE TRABAJO Y POR EL APOYO BRINDADO EN EL TRANCURSO DE MIS ESTUDIOS EN LA MAESTRIA.

AGRADEZCO EL APOYO RECIBIDO POR EL CONACYT, A TRAVES DE SU PROGRAMA DE BECAS NACIONALES DE POSTGRADO, SIN LA CUAL ME HABRIA RESULTADO PRACTICAMENTE IMPOSIBLE REALIZAR ESTOS ESTUDIOS.

INDICE

	PAG.
CAPITULO 1 CUERDAS COSMICAS	
1. INTRODUCCION	1
2. FORMACION DE LAS CUERDAS	5
3. DINAMICA DE LAS CUERDAS	10
4. PROBLEMAS PENDIENTES	12
5. REFERENCIAS	14
CAPITULO 2 TEORIA DE BRANS-DICKE	
1. TEORIAS ESCALARES-TENSORIALES DE LA GRAVEDAD	15
2. TEORIA DE BRANS-DICKE	17
3. REFERENCIAS	24
CAPITULO 3 CUERDAS COSMICAS EN LA TEORIA DE BRANS-DICKE	
1. INTRODUCCION	25
2. ECUACIONES DE CAMPO	26
3. ECUACIONES DE CAMPO EN LA METRICA DE CUERDA	28
4. SOLUCIONES EXACTAS	29
5. PROPIEDADES DE LA SOLUCION	32
6. REFERENCIAS	35
APENDICE 1	36
APENDICE 2	37
APENDICE 3	39
APENDICE 4	42

CAPITULO 1

CUERDAS COSMICAS

§ 1. INTRODUCCION.

En el modelo estandard del big-bang suponemos que al nacer el universo en forma explosiva, la materia debió dispersarse en todas direcciones, distribuyendose de un modo más o menos homogéneo. Por lo que en estas condiciones del universo en dilatación constante, la materia tendría que irse separando, haciendose por lo tanto cada vez más ligera.

Sin embargo investigaciones recientes, nos muestran un universo muy diferente, en el cual las galaxias no solo se agrupan en cúmulos de galaxias, sino que estos a su vez tienden a agruparse para formar supercúmulos de galaxias del orden de cientos de millones de años luz de anchura y de miles de años luz de longitud. Brent Tully [1] ha descubierto uno de estos supercúmulos centrado en Piscis-Cetus. Tal estructura no ha sido anticipada por ninguna de las teorías actuales de formación de galaxias.

Hasta ahora no hemos podido explicar satisfactoriamente cuál es la causa de tales mega-aglomeraciones, pero una posibilidad de respuesta debe encontrarse relacionada con la gravitación y la densidad de materia en el espacio.

Debido a que la materia visible en las estrellas y las galaxias no parece ser en principio suficiente para crear estas estructuras, se

han propuesto varias teorías basadas en la densidad de materia oscura que debería existir para explicarlas. Por otra parte también se han propuesto teorías basadas en ciertas estructuras cosmológicas formadas durante los primeros instantes después del big-bang.

Algunas de estas teorías, han resultado a partir de un cuidadoso estudio de las condiciones que debieron existir en el origen del universo. Las transiciones de fase que debió sufrir el vacío original, podrían tener importantes consecuencias cosmológicas; en particular podrían dar lugar a una ruptura espontánea de la simetría que sería la responsable de la formación de ciertas estructuras topológicas como paredes de dominio, cuerdas y monopolos.

La simetría original podría ser rota en varios pasos, por lo que tendríamos una serie de transiciones de fase, cada una de las cuales podría producir su propia estructura cósmica.

La producción cosmológica de monopolos, ha sido discutida por varios autores [2], quienes han encontrado que el número estimado de monopolos es demasiado grande para ser compatible con el modelo estandard del big-bang.

Zeldovich *et al.* han considerado los efectos cosmológicos de las paredes de dominio, y han encontrado que el campo gravitacional de las paredes es inaceptablemente grande, además de que causaría una gran asimetría en la radiación de fondo. Por su parte Kibble [3] ha alcanzado conclusiones similares. Y también ha discutido la evolución de las cuerdas cósmicas y ha concluido que la existencia de una red de cuerdas cósmicas a gran escala no contradice las observaciones actuales.

Por esta y otras razones, las cuerdas cósmicas han venido incrementando últimamente su popularidad como candidatos responsables de la formación de la estructura del universo.

La producción de cuerdas cósmicas muy densas en el origen del universo es hasta el momento solo una posibilidad. Pero afortunadamente, la especulación en torno a su posible existencia no es del todo osciosa, pues si existen y son lo suficientemente masivas para actuar como semillas de formación de galaxias, y cúmulos de galaxias podrían ser detectadas astronómicamente.

En 1985 Albretch y Turok [4], desarrollaron una simulación por computadora de la evolución de las cuerdas cósmicas y una de sus conclusiones es que ha medida que el universo se expande la red de cuerdas evolucionaría de tal manera que las cuerdas inicialmente enredadas se enderezarían y sus tamaños variarían del microscópico al astronómico. Continuando con este trabajo Turok [5] calculó el número y distribución de cúmulos de galaxias predichos por la teoría de cuerdas, obteniendo resultados realmente sorprendentes, pues están de acuerdo con lo actualmente observado, es decir, los cúmulos no están distribuidos aleatoriamente, sino que tienden a formar cúmulos ellos mismos.

Estos agrupamientos están descritos matemáticamente por una función de correlación, y existe una extraordinaria similitud entre las funciones de correlación determinadas a partir de observaciones astronómicas y las calculadas a partir de la simulación por computadora de Turok.

Por otra parte A. Vilenkin [6], a propuesto que de existir las

cuerdas cósmicas, estas producirían efectos de lentes gravitacionales creando imágenes dobles de cúmulos de galaxias lo que permitiría su detección (figura 1).

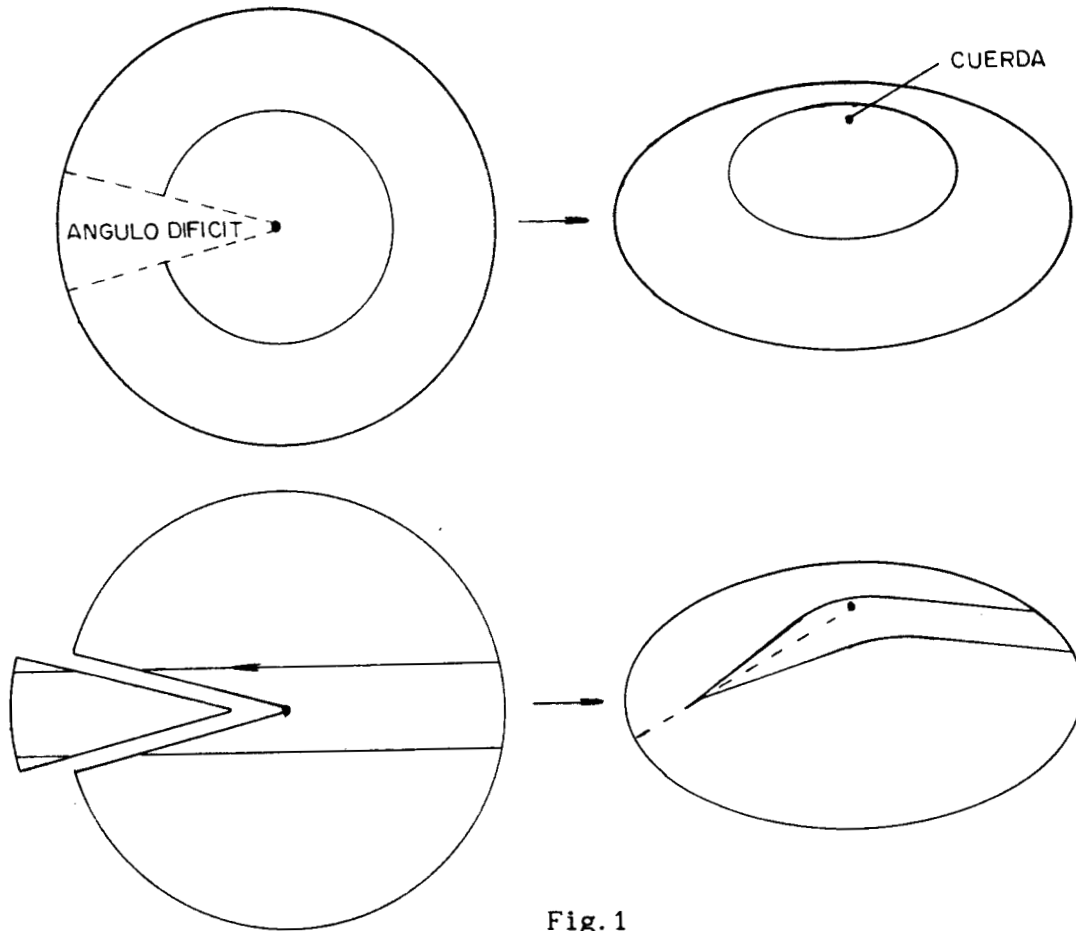


Fig.1

Hasta ahora se han estudiado diversos aspectos relacionados con las cuerdas, por una parte se han determinado la existencia de soluciones de cuerda en la teoría de la Relatividad General de [7], y también se han estudiado los procesos de producción de partículas durante el proceso de formación de una cuerda, y como el campo gravitacional asociado con las cuerdas puede producir una variedad de efectos de campos cuánticos, como la polarización del vacío y producción de partículas [8].

En todos estos casos ha sido necesaria la hipótesis de un campo escalar para describir a la cuerda, y de aquí surge parte de la motivación del trabajo, pues si es necesaria la adición de un campo escalar, ¿ por qué no hacer uso de la teoría de Brans-Dicke, que incluye ya como parte de sí misma un campo escalar ?

Por otra parte diversas teorías de "supercuerdas" (GTU's) en el límite de bajas energías se reducen a una teoría tipo Brans-Dicke y no a relatividad general. De estas algunas predicen la existencia de "defectos topológicos lineales" (cuerdas cósmicas).

§ 2. FORMACION DE LAS CUERDAS COSMICAS.

El vacío original debe haber tenido una enorme energía así como un alto grado de simetría; es decir, no existían diferencias entre las interacciones de las partículas elementales. Las fuerzas nucleares fuerte, débil y electromagnética se manifestaban como partes de una sola fuerza unificada.

Debido a la enorme expansión que precedió al big-bang el universo debe haberse enfriado muy rápidamente para mantener el equilibrio térmico, por lo que el vacío original debió sufrir una rápida sucesión de transiciones de fase.

Desde el surgimiento del modelo, se ha venido estableciendo la idea de que las cuerdas cósmicas serían filamentos delgados de energía altamente concentrada, algunos de ellos de longitud infinita y otros formando curvas cerradas.

El carácter físico de las cuerdas estaría determinado por la

energía del vacío original atrapado dentro de ellas. Así las cuerdas con el vacío más simétrico, es decir, aquel en el cual las fuerzas de interacción entre partículas fundamentales; la electromagnética y las fuerzas nucleares fuerte y débil estarían unificadas, son las más delgadas y las más masivas. Estas son las de interés cosmológico, pues serían las responsables de la formación de las galaxias y cúmulos de galaxias.

La razón por la cual se piensa que las cuerdas aún podrían persistir es porque estas estructuras que resultan de la ruptura de la simetría son topológicamente conservadas. La idea de la conservación topológica es una idea básica para la hipótesis de existencia de las cuerdas cósmicas, y trataré de explicarla en lo que sigue.

Las teorías modernas de campo representan a la materia por un conjunto de operadores cuánticos de campo. En la aproximación semiclásica, esos operadores pueden ser considerados como números ordinarios, representando la amplitud de onda o densidad de probabilidad de cada campo (cada partícula material) en cada punto del espacio-tiempo. Estas amplitudes evolucionan según las ecuaciones de la mecánica cuántica, así para los bosones (campos de espín entero) por la ecuación de Klein-Gordon, y fermiones (campos de espín semientero) por la ecuación de Dirac.

Una idea clave en la teoría de campo es la de potencial, en la ecuación dinámica de campo. Así la densidad lagrangiana a partir de la cual se obtiene la ecuación de Klein Gordon para una partícula libre de masa m es:

$$\mathcal{L} = 1/2 \left\{ (\nabla \Phi)^2 - (1/c^2) (\dot{\Phi})^2 + m^2 c^2 \Phi^2 \right\} \quad (1.1)$$

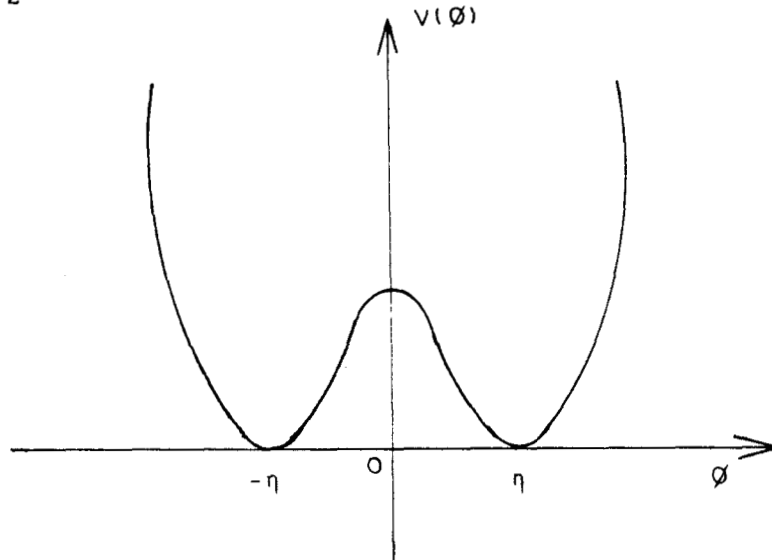
aquí el potencial $U(\Phi)$ es el término $(m c \Phi)^2$. El término correspondiente al gradiente espacial se introduce para proporcionar a puntos cercanos el mismo valor de Φ (lo cual también hace para ondas viajeras y paquetes de onda).

Los campos en las teorías de partículas reales, no representan partículas libres, por lo cual es necesario introducir términos que tomen en cuenta las interacciones. Es posible entender, al menos en sus líneas generales, el proceso de formación de las cuerdas, a partir de un modelo sencillo. Consideremos para esto un modelo fenomenológico simple, de la interacción de una partícula consigo misma y su interacción con un baño térmico de otras partículas. En este modelo la interacción puede ser descrita por un potencial de la forma:

$$U(\Phi) = \lambda (\Phi^2 - \eta^2)^2 \quad (1.2)$$

donde λ y η son constantes (ver figura 2). El resto de las partículas proveen un baño térmico que excita al campo Φ . Cuando el campo Φ está en un estado de excitación térmica a altas temperaturas, tiende a poblar los niveles de mayor energía en el potencial $U(\Phi)$, y Φ puede variar libremente entre valores positivos y negativos. Si nosotros enfriamos la región del campo (como suponemos sucedió en el big-bang), entonces el campo Φ queda atrapado en los niveles de bajas energías, en alguno de los mínimos. Debido a que el término espacial del gradiente nos asegura cierta continuidad sobre Φ , puntos cercanos en el espacio

se enfriarán y estarán en el mismo mínimo. Y así puntos que no estén causalmente conectados deberán terminar con valores no relacionados de Φ . Las paredes de dominio surgen dando al campo Φ y a su potencial efectivo una simetría discreta consistiendo de dos mínimos simétricos, denominados Z_2 .

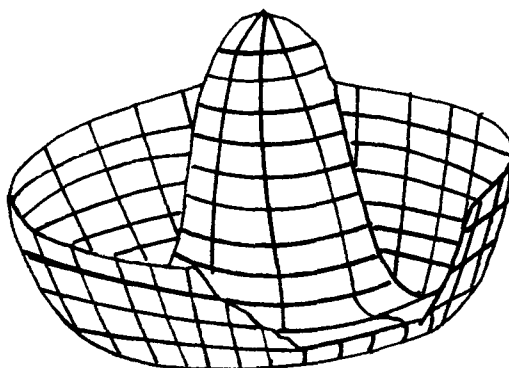


Potencial en 2 mínimos degenerados, representando 2 estados base del vacío diferentes.

Fig. 2

Las cuerdas cósmicas ocurren cuando existe una simetría ligeramente más complicada, llamada $U(1)$. Para ejemplificar esta simetría, hacemos el campo Φ complejo, de esta manera tiene una parte real e imaginaria, y si el potencial efectivo depende solo del valor absoluto de Φ , entonces tendrá simetría circular en el plano complejo (ver figura 3). Así a altas temperaturas, el valor de Φ puede variar

dentro de algún disco centrado en el cero complejo, pero a bajas temperaturas el valor debe estar en un mínimo circular de potencial.



Generalización del potencial de la figura 2 a un
campo escalar complejo ϕ

Fig.3

En las teorías de gran unificación las simetrías que pueden producir cuerdas son "normadas"; es decir:

Se derivan de un principio geométrico asociado a la invariancia ante transformaciones de norma locales (las transformaciones dependen del punto donde se aplican). Son transformaciones de norma porque no cambian la magnitud de las probabilidades de transición entre diferentes estados del sistema.

De esta manera el campo ϕ se acopla a un campo de norma como el campo electromagnético, y en estos casos la densidad de energía de las cuerdas resultantes está confinada al corazón de la cuerda.

En resumen, cuando en una teoría de campo la descripción de la materia contiene un potencial con simetría $U(1)$ (como la mostrada en la

figura 2) y un campo que permanece independiente a grandes escalas, no puede enfriarse en cualquier lugar hasta un mínimo circular. Por lo que debe existir un lugar geométrico unidimensional donde Φ sea igual a cero, y donde $U(\Phi)$ no es cero. Este es el estado dentro del corazón de la cuerda y es llamado el "falso vacío", y debe tener una enorme densidad de energía, del orden de $U(0) = \lambda \eta^4$. Así a pesar del pequeño diámetro de la cuerda (Longitud de Compton del campo Φ) la cuerda tiene una enorme masa por unidad de longitud (η^2). En unidades típicas GUTs, $\eta \approx 10^{16}$ Gev, implicando una densidad de masa del orden de 10^{22} g/cm. o 10^7 masas solares por Parsec.

De esta manera puede interpretarse a η como la escala de ruptura de la simetría.

§ 3. DINAMICA DE LAS CUERDAS

Nuevamente podemos establecer una analogía para investigar el comportamiento dinámico de las cuerdas. Consideraremos para esto la dinámica de una cuerda elástica ideal. La función $u(s,t)$ describe la posición de sus puntos en cualquier tiempo. La ecuación de movimiento de la cuerda puede determinarse a partir de la densidad lagrangiana que contiene las contribuciones usuales de el término de energía cinética y potencial:

$$\mathcal{L} = 1/2 \mu \dot{u}^2 - 1/2 T u'^2 \quad (1.3)$$

Aquí el punto denota la derivada con respecto al tiempo, y la prima derivada con respecto a s .

De esta manera la ecuación de movimiento de la cuerda esta determinada por¹ :

$$\ddot{u} = T/\mu u'' \quad (1.4)$$

La cual es una ecuación de onda que se separa en cada una de sus componentes cartesianas de u .

Así como para la cuerda elástica, la ecuación de movimiento para una cuerda cósmica es casi exactamente la generalización relativista de la ecuación (4), pero resulta de un principio de acción diferente: Para una cuerda normada, la densidad lagrangiana es el área propia de la "hoja de mundo" de la cuerda:

$$\mathcal{L} = |\mathbf{u}'| |\dot{\mathbf{u}}| \text{sen}\theta = \left[\dot{\mathbf{u}}^2 \mathbf{u}'^2 + (\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}')^2 \right]^{1/2} \quad (1.5)$$

Esta acción asociada con la hoja de mundo es llamada la acción de Nambu. Esta acción tiene una propiedad llamada la invariancia de Weyl, es decir; La acción es invariante bajo cualquier transformación conforme.

La variación de la ecuación (5) (En el espacio de Minkowski) da como resultado² la ecuación de onda relativista:

$$\ddot{u} = c^2 u'' \quad (1.6)$$

¹ VER APENDICE 1

² VER APENDICE 2

Aquí hemos elegido para trabajar en la norma conforme $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$ y $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}'|^2 = 1$. De esta manera una cuerda se comporta exactamente igual que una banda elástica, siendo el cociente $T/\mu = c^2$

La ecuación (6) es lo suficientemente simple que podemos escribir su solución general (Como Neil Turok y T.W.Kibble han notado) como una suma de ondas propagandose a la velocidad de la luz sobre la cuerda:

$$\mathbf{u} = 1/2 [\mathbf{a}(s + ct) + \mathbf{b}(s - ct)] \quad (1.7)$$

Donde \mathbf{a} y \mathbf{b} son funciones periódicas. A partir de estas ecuaciones Turok y Kibble determinaron la formación de "loops" de cuerdas y construyeron modelos para estudiar la evolución de los mismos [3 y 4].

§ 4. PROBLEMAS PENDIENTES.

Hasta ahora el escenario de las cuerdas cósmicas aparece como un candidato prometedor que nos permita entender la estructura actual del universo, el cual sigue siendo uno de los problemas fundamentales de la cosmología moderna.

Aunque actualmente disponemos de varios candidatos a ser cuerdas cósmicas, aún no ha podido confirmarse, sin lugar a dudas, su existencia, de manera que aún debemos tomar con reserva la hipótesis de las cuerdas cósmicas.

Por otra parte existen una serie de problemas teóricos que podrían resultar de interés en relación con las cuerdas que eventualmente sus soluciones reforzarían la posibilidad de su existencia. Algunos de estos problemas son:

1). Los "defectos topológicos" pueden también formarse a partir de campos fermiónicos. Debido a las interacciones de spin de los fermiones es de esperarse que existan muchas más variedades de defectos que podrían ser producidas en las transiciones de fase cosmológicas, cuyas consecuencias no han sido investigadas.

2). Todas las predicciones cuantitativas de las consecuencias observables de las cuerdas, incluyendo la formación de galaxias dependen de las simulaciones de la evolución de las cuerdas.

3). Estructuras como la descubierta por Brent Tully, tal vez pudiesen ser explicadas debido a la existencia de cuerdas en los núcleos de estas mega-aglomeraciones. Y predecir la formación de estructuras similares en otras regiones del universo.

REFERENCIAS

- [1] R.Brent Tully Astrophysical Journal 323, 1 (1987)
- [2] Ya.B.Zel'dovich and M. Yu.Khlopov, Phys. Lett. 79B, 239 (1978)
J.P. Preskill, Phys. Rev. Lett. 43, 1365 (1979)
A.H. Guth and H.S.-H.Tye, *ibid.* 44, 631 (1980)
- [3] T.W.Kibble, J.Phys.A 9, 1387 (1976)
- [4] A. Albretcht, Neil Turok, Phys. Rev. Lett. 54, 1868 (1985)
- [5] Neil Turok, Phys. Review. Lett.55, 1801 (1985)
- [6] A.Vilenkin, Phys. Review D,23, 852 (1981)
- [7] D. Garfinkle, Phys. Rev. D., 32, 1323 (1985)
- [8] P.C.W. Davies and V. Sahni Class. Quantum Grav. 5, 1 (1988)
- [9] E.M. Chudnovsky, G.B. Field and D.N.Spergel, A. Vilenkin, Phys.
Rev. D 34, 944 (1986)

CAPITULO 2

TEORIA DE BRANS-DICKE

§ 1. TEORIAS ESCALARES-TENSORIALES DE LA GRAVEDAD

La teoría escalar-tensorial de la gravedad fué propuesta en 1939 por Pascual Jordan en Alemania. En esta teoría la idea es tomar el espacio tiempo Riemmaniano de la relatividad general y junto con esto un campo escalar dinámico simple que varía de punto a punto.

De esta manera la gravedad retiene su carácter dinámico de curvatura del espacio-tiempo, pero ahora es modificada por la introducción de el campo escalar.

El campo escalar fué introducido inicialmente por el uso de lo que se conoce como una *transformación conforme*. Esta transformación se hace al multiplicar el intervalo de espacio-tiempo por el escalar. Así el espacio-tiempo es alargado o contraído por una cantidad que depende del valor del escalar. Esta clase de transformación se llama conforme porque los *ángulos no son alterados*, y la velocidad de la luz permanece inalterada. Si el escalar es dondequiera el mismo y constante en el tiempo, entonces el espacio-tiempo es uniformemente cambiado y entonces podemos considerar el proceso como únicamente un cambio de nuestras unidades convencionales.

Pero cuando el campo escalar varía de punto a punto en el espacio y en el tiempo, entonces controla el tamaño relativo y la

duración de las cosas, y así el nuevo espacio-tiempo obtenido es muy diferente del anterior. De esta manera la adición del campo escalar permite "construir" universos con propiedades físicas totalmente diferentes.

El propósito más importante que se persigue al introducir tal transformación por medio de un campo escalar es el de ampliar las posibilidades físicas de las nuevas teorías generadas de esta manera (La teoría escalar-tensorial es llamada así porque altera los intervalos del espacio-tiempo)

Claramente no todos los universos que se pueden generar por este tipo de transformaciones serán de interés, y deben existir cierto número de "controles" basados en nuestros conocimientos actuales del universo.

De esta manera las transformaciones que comúnmente hacemos, son aquellas que causan que las cosas varíen solo en el tiempo. Y de aquí que solo estemos interesados en solo tres controles marcados \dot{G} , \dot{c} , y \dot{m} y por su variación es posible determinar la clase de universo que emerge. De esta manera el control de \dot{G} , controla la forma en que la constante gravitacional varía en el tiempo; y al variar el control de \dot{c} , controlamos la proporción en que la materia es creada o destruida. Y finalmente el ajuste de la variación de \dot{m} controla la forma en que la masa de las partículas varía con el tiempo. De esta manera tenemos la posibilidad de construir aún una gran multitud de universos diferentes a partir de cualquier universo dado.

§ 2. TEORIA DE BRANS DICKE.

Robert Dicke junto con Carl Brans exigieron que el control C estuviese siempre en cero. Y usaron la teoría escalar-tensorial como una base para investigar el principio de Mach.

Ernest Mach creía que la masa inercial (m_{iner} masa inercial de la partícula determinada por su respuesta al movimiento acelerado) es el resultado de como una partícula "siente" la presencia de todas las otras partículas en el universo

En Las teorías Newtoniana y Relatividad General las masas inercial y gravitacional las hacemos iguales y escribimos únicamente m (m_{grav} masa gravitacional de una partícula determinada por su respuesta a la gravedad).

Así partículas distantes más allá de la longitud de Hubble, son inobservables y de esta manera no contribuyen a la determinación de la masa inercial local. Si M es la masa gravitacional del universo observable, y $G M m_{grav} / L$ la energía gravitacional de una sola partícula; se conjetura de acuerdo con el principio de Mach, que la energía gravitacional de una partícula es igual a su energía intrínseca $m_{iner} \times c^2$:

$$\frac{G M m_{grav}}{L} = m_{iner} c^2$$

Así suponemos que la interacción entre la partícula y su universo observable debe ser suficientemente fuerte para hacer m_{grav} igual a m_{iner} por lo que:

$$G M = L c^2$$

Alternativamente, podemos decir que con un valor de m_{iner} determinado por la interacción, la constante gravitacional G está determinada así que $m_{\text{iner}} = m_{\text{grav}}$.y ambas son expresadas por el mismo símbolo m . La ecuación $G M = L c^2$ se dice ahora que debe ser la ley Machiana o la relación que acompaña al principio de Mach. Esta es una ley (hasta el momento) producto de conjeturas . El problema es encontrar la forma en la cual el valor de G está determinado por el universo.

Debido a que el universo se está expandiendo, este cambio continuo debería actuar sobre el valor de G , por lo que debería cambiar su valor continuamente. De esta manera el principio de Mach, dentro del esquema de un universo en expansión, requiere que G *no sea constante en el tiempo*.

La teoría escalar-tensorial permite a G variar con la expansión, por lo cual Brans y Dicke argumentaban que estas teorías están en concordancia con el principio de Mach.

Observaciones de movimientos orbitales dentro del sistema solar muestran que la variación de G , si existe, debe ser muy pequeña. Por otra parte, estudios del helio producido en los orígenes del universo también indican que la variación de G debe ser extremadamente pequeña.

Debido a que la teoría escalar-tensorial permite la variación de G , podemos ajustar esta variación de manera que sea lo suficientemente pequeña como para no entrar en conflicto con las

observaciones, y así podemos decir que el universo en cuestión satisface el principio de Mach. Debido a esto el universo de Brans-Dicke ha resultado casi indistinguible de el universo en el cual G es constante.

De esta manera, la constante gravitacional G debería estar relacionada con el valor promedio de un campo escalar ϕ , el cual estaría acoplado a la densidad de masa del universo.

La ecuación de campo covariante más simple para tal campo escalar es:

$$\square \phi = 4 \pi \lambda T_{\mu}^{\mu} \quad (2.1)$$

donde $\square \phi = \phi^{;\rho}_{;\rho}$ es el d'Alambertiano invariante, y λ es una constante que juega un papel similar al de la constante cosmológica. T_{μ}^{μ} es el tensor de energía momentum de la materia del universo.

Es posible hacer una estimación aproximada de ϕ calculando el potencial central de una esfera de gas con una densidad cósmica de masa $\rho \cong 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$ y un radio igual al radio aparente del universo $R \cong 10^{28} \text{ cm}$. Esto nos da un valor promedio para ϕ de:

$$\langle \phi \rangle \cong \lambda \rho R^2 \cong \lambda 10^{27} \text{ g cm}^{-1} \quad (2.2)$$

y como este valor se acerca razonablemente al valor de la constante gravitacional $1/G = 1.35 \times 10^{28} \text{ g cm}^{-1}$, podemos proponer:

$$\langle \phi \rangle \cong \frac{1}{G} \quad (2.3)$$

y con esta normalización y de la ecuación (2.2), se tiene que λ debe ser una constante adimensional del orden de la unidad.

Estas consideraciones llevaron a Brans y Dicke a sugerir que las ecuaciones correctas de campo para la gravitación son obtenidas al reemplazar G por $1/\phi$ e incluyendo un tensor de energía momentum $T_{\phi}^{\mu\nu}$ para el campo ϕ en la fuente del campo gravitacional, de esta manera deberíamos escribir:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = - \frac{8\pi}{\phi} (T_M^{\mu\nu} + T_{\phi}^{\mu\nu}) \quad (2.4)$$

Por otra parte Brans y Dicke requieren que sea solo $g_{\mu\nu}$ y no ϕ , la que participe en las ecuaciones de movimiento de partículas y fotones. Así la ecuación que describe el intercambio de energía entre materia y gravitación es la misma que en la teoría de Einstein:

$$T_M^{\mu}{}_{\nu;\mu} = \frac{\partial T_M^{\mu}{}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\rho}^{\mu} T_M^{\rho}{}_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} T_M^{\mu}{}_{\rho} = 0$$

De esta manera al tomar la divergencia covariante de la ecuación (2.4) obtenemos:

$$(R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2} \delta^{\mu}{}_{\nu} R)\phi_{;\mu} = - 8\pi T_{\phi}^{\mu}{}_{\nu;\mu} \quad (2.5)$$

Este requerimiento muestra ser suficiente para determinar $T_{\phi}^{\mu}{}_{\nu}$. Pues el tensor simétrico más general que podemos construir a partir de términos que involucren una o dos derivadas del campo ϕ es:

$$T_{\phi \nu}^{\mu} = A(\phi) \phi^{;\mu} \phi_{;\nu} + B(\phi) \delta^{\mu}_{\nu} \phi_{;\rho} \phi^{;\rho} + C(\phi) \phi^{;\mu}_{;\nu} + D(\phi) \delta^{\mu}_{\nu} \square \phi$$

de esta manera al calcular $T_{\phi \nu; \mu}^{\mu}$ y usando la ecuación (2.5) podemos determinar una expresión para cada una de las funciones A, B, C, y D.

De estos cálculos resulta:

$$A(\phi) = -\frac{\omega}{8\pi\phi} \qquad B(\phi) = -\frac{\omega}{16\pi\phi}$$

$$C(\phi) = -\frac{1}{8\pi} \qquad D(\phi) = -\frac{1}{8\pi}$$

donde ω es una constante adimensional dada por:

$$\lambda = \frac{2}{3 + 2\omega}$$

Finalmente las ecuaciones de campo para la teoría de Brans-Dicke quedan en la forma:

$$\square \phi = -\frac{8\pi}{3 + 2\omega} T_{\mu \mu}^{\mu} \qquad (2.6)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} - \frac{\omega}{\phi^2} \left(\phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{;\sigma} \phi^{;\sigma} \right) +$$

$$- \frac{1}{\phi} \left(\phi_{;\mu; \nu} - g_{\mu\nu} \square \phi \right) \qquad (2.7)$$

De estas ecuaciones observamos que cuando $|\omega| \gg 1$ la ecuación (2.6) queda $\square \phi = O(1/\omega)$, y de aquí obtenemos:

$$\phi = \langle \phi \rangle + O(1/\omega) = \frac{1}{G} + O\left(\frac{1}{\omega}\right)$$

usando esto en la ecuación (2.7) obtenemos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu} + O(1/\omega)$$

Así la teoría de Brans-Dicke se reduce a relatividad general en el límite cuando $|\omega| \rightarrow \infty$.

Debe notarse que el papel de el campo escalar ϕ , no ejerce ninguna influencia directa sobre la materia. Su papel esencial es el de participar en las ecuaciones de campo que determinan la geometría del espacio tiempo.

Por otra parte la teoría de Brans-Dicke, es una teoría "viable", y resulta ser el límite de algunas teorías de supercuerdas, las cuales son hasta el momento, las candidatas mas fuertes para construir una teoría de gran unificación.

Por viable entendemos actualmente una teoría (en general) que satisface los criterios de:

- I. Completa
- II. Autoconsistente
- III. Relativista
- IV. Límite Newtoniano correcto

Por completez entendemos que la teoría debe ser capaz de proponer resultados (a partir de primeros principios) de los experimentos que sean de interés, así no es suficiente que la teoría postule que los cuerpos independientemente de su composición química

caigan con la misma aceleración, sino que además debe ser capaz de incorporar en forma consistente un conjunto de leyes para el electromagnetismo, mecánica cuántica, las cuales puedan ser usadas para calcular el comportamiento detallado de los cuerpos en los campos gravitacionales.

Debe ser autoconsistente, es decir cuando calculamos las predicciones para cada experimento posible por métodos diferentes (pero equivalentes), debemos obtener los mismos resultados.

Debe ser relativista, es decir en el límite cuando la fuerza gravitacional es despreciable comparada con otras interacciones físicas, las leyes no gravitacionales de la física deben reducirse a las leyes de la relatividad especial.

En el límite de campos gravitacionales débiles y movimientos lentos, debe reproducir las leyes de Newton.

De esta manera la viabilidad de una teoría requiere de la completez, autoconsistencia y compatibilidad con la teoría Newtoniana de la Gravitación y ser relativista.

La teoría de Brans-Dicke satisface estos criterios de viabilidad para valores del parámetro $|\omega| > 500$, y está en concordancia razonable con todos los experimentos previos a 1973.

Además el principio de equivalencia se satisface y las leyes de la relatividad especial son válidas sin cambio en los marcos de Lorentz locales de la métrica g .

Por otra parte las teorías escalares-tensoriales de la gravedad están teniendo un importante resurgimiento en la actualidad, debido a que algunas teorías de gran unificación (GUTs), tienen como límite

teorías tipo Brans-Dicke.

REFERENCIAS:

Steven Weinberg, Gravitation and Cosmology (John Wiley & Sons, 1971)

Charles W. Misner, Kip S. Thorne & John Archibald Wheeler, Gravitation
(W. H. Freeman and Company, 1973)

Clifford M. Will Theory and Experiments in Gravitational Physics.
(Cambridge University Press, 1981)

CAPITULO 3

CUERDAS COSMICAS

EN LA TEORIA DE BRANS-DICKE

§ 1. INTRODUCCION.

La existencia de las cuerdas cósmicas, es hasta el momento solo una hipótesis que se ha visto reforzada por algunos resultados teóricos [1] que aumentan la perspectiva de su existencia . En los cálculos que se han realizado en Relatividad General para mostrar la existencia de soluciones de cuerda, ha sido necesario en todos ellos admitir la existencia de un campo escalar que describa la cuerda.

Por otra parte, diversas teorías de "supercuerdas" (GTU's) en el límite de bajas energías se reducen a teorías tipo Brans-Dicke y no a relatividad general. Además algunas de estas teorías predicen la existencia de "defectos" topológicos lineales.

Debido a esto consideramos de interés investigar si las cuerdas cósmicas son posibles en la teoría escalar-tensorial de Brans-Dicke, la cual incluye ya como parte de si misma un campo escalar dinámico.

§ 2. ECUACIONES DE CAMPO

Las ecuaciones de movimiento para la teoría escalar-tensorial

más general de la gravitación (STT) en el vacío, pueden ser obtenidas a partir de la variación de la siguiente acción:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \phi^{-1} \omega(\phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + 2\phi \lambda(\phi) \right] \quad (3.1)$$

donde la signatura usada es $(-, +, +, +)$, y $\omega(\phi)$ y $\lambda(\phi)$ son funciones arbitrarias que distinguen a las diferentes teorías. λ es una función de potencial y juega un papel similar al de la constante cosmológica. Para la teoría de Brans-Dicke con constante cosmológica, ω y λ son constantes.

Las ecuaciones de campo, en la teoría de Brans-Dicke con constante cosmológica que resultan de variar la acción son:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi \phi^{-1} T_{\mu\nu} + \phi^{-2} \omega \left(\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} \right) + \phi^{-1} \left(\phi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square_g \phi \right) \quad (3.2)$$

y

$$\square_g \phi = 0 \quad (3.3)$$

Para nuestro caso supondremos que el tensor de energía momento de la materia es cero, por lo tanto tendremos que $T_{\mu\nu}^M = 0$ y que $\lambda = 0$.

Siguiendo a Garfinkle, para encontrar cuerdas en un espacio curvo consideramos un campo estático ϕ y supondremos que la métrica es estática y tiene simetría cilíndrica. De esta manera buscamos un espacio-tiempo con tres vectores de Killing independientes, cada uno de

ellos ortogonal a los otros dos e hipersuperficie-ortogonales³.

Dado que suponemos que la métrica es estática entonces uno de los vectores de Killing debe ser temporaloide. Pues si la métrica es estática se cumplen⁴:

- a) La métrica debe ser estacionaria e invariante ante inversiones temporales ($\partial/\partial t \rightarrow -\partial/\partial t$).
- b) La métrica es estacionaria y $\partial/\partial t$ es un vector hipersuperficie-ortogonal.

De esta manera como la métrica debe ser estacionaria en ambos casos entonces existe un campo vectorial ξ el cual es temporaloide.

Los otros dos campos de Killing son espacialoides y describen la invariancia ante rotaciones alrededor de un eje fijo y las translaciones a lo largo de este eje. De esta manera uno de los campos de Killing tiene órbitas cerradas, y podemos suponer la existencia de un eje, es decir un conjunto de puntos donde el campo de Killing con órbitas cerradas se anula. Como la normalización de los campos de Killing es arbitraria, la determinamos de la siguiente manera:

El campo de Killing con órbitas cerradas lo escogemos de tal manera que el parámetro a lo largo de una curva integral cerrada vaya de 0 a 2π . Y los otros dos campos de Killing los escogeremos de manera que tengan norma 1 y -1 sobre el eje.

Nosotros escogeremos las coordenadas t, z, ρ y Φ como sigue: ρ es la distancia geodésica a partir del eje en la dirección ortogonal a

3 ES DECIR, QUE CADA UNO DE LOS VECTORES DE KILLING ES ORTOGONAL A UNA FAMILIA DE HIPERSUPERFICIES.

4 VER APENDICE 3

todos los vectores de Killing. $(\partial/\partial t)^a$ representa el campo temporalloide de Killing. $(\partial/\partial \Phi)^a$ es el campo con órbitas cerradas. $(\partial/\partial z)^a$ es el campo espacialloide ortogonal a los otros dos. Nuestra elección de normalización implica que $0 \leq \Phi \leq 2\pi$ y los puntos 0 y 2π coinciden. Con esta elección de coordenadas la métrica toma la forma:

$$ds^2 = - e^A dt^2 + e^B dz^2 + e^C d\Phi^2 + d\rho^2 \quad (3.4)$$

Donde A, B y C son funciones de ρ únicamente.

§ 3. ECUACIONES DE CAMPO EN LA METRICA DE CUERDA.

Sustituyendo los resultados anteriores en las ecuaciones de campo⁵ dadas por (3.2) y (3.3) obtenemos:

$$2C'' + C'^2 + 2B'' + B'^2 + B'C' = -2\omega \left(-\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - 2(B' + C') \frac{\phi'}{\phi} - 4 \frac{\phi''}{\phi} \quad (3.5)$$

$$A'B' + A'C' + B'C' = 2\omega \left(-\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - 2(A' + B' + C') \frac{\phi'}{\phi} \quad (3.6)$$

$$2A'' + A'^2 + 2B'' + B'^2 + B'A' = -2\omega \left(-\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - 2(A' + B') \frac{\phi'}{\phi} - 4 \frac{\phi''}{\phi} \quad (3.7)$$

⁵

VER APENDICE 4

$$2C'' + C'^2 + 2A'' + A'^2 + A'C' = -2\omega \left(-\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - 2(A'+C') \frac{\phi'}{\phi} - 4 \frac{\phi''}{\phi} \quad (3.8)$$

$$2\phi'' + (A' + B' + C')\phi' = 0 \quad (3.9)$$

Donde las primas significan derivadas con respecto a ρ .

§ 5. SOLUCIONES EXACTAS

Nuestra elección de normalización de los campos de Killing implica que $A(0) = B(0) = 0$. Con esta elección podemos mostrar que A igual a B en cualquier punto. Si consideramos la diferencia de las ecuaciones (3.5) y la (3.8) resulta:

$$(A - B)'' + (A' - B') \left[\frac{(A + B + C)'}{2} + \frac{\phi'}{\phi} \right] = 0 \quad (3.10)$$

de lo cual obtenemos

$$(A - B)' = k \left[\frac{e^{-(A+B+C)/2}}{\phi} \right] \quad (3.11)$$

Si suponemos que la cantidad entre paréntesis no se anula en el origen, entonces la constante k debe anularse y tendremos entonces que $A - B = \text{cte}$. Sin pérdida de generalidad nosotros podemos tomar A igual

a B. Y de esta manera las ecuaciones (3.5) y (3.8) son iguales y podemos tomar como el sistema a las ecuaciones (3.6 - 3.9).

El orden del sistema de ecuaciones diferenciales puede reducirse tomando en cuenta las siguientes definiciones:

$$X := -\frac{\phi'}{\phi}, \quad Y := A', \quad Z := C' \quad (3.12)$$

De esta manera el sistema resultante es:

$$(3 + 2\omega)Y' = -\omega(\omega + 2)X^2 + (2\omega + 1)XY + \\ + \frac{(2\omega + 1)}{2} YZ + 2(\omega + 1)XZ \quad (3.13)$$

$$(3 + 2\omega)Z' = (\omega + 1)Y^2 - \frac{(2\omega + 3)}{2} Z^2 + \\ - 2\omega(\omega + 1)X^2 - 4(\omega + 1)XY - XY - XZ \quad (3.14)$$

y

$$(3 + 2\omega)X' = -\frac{1}{2}Y^2 - 3(\omega + 1)X^2 + \\ - (2\omega + 1)XY + YZ - \frac{(2\omega + 1)}{2} XZ \quad (3.15)$$

Una solución particular de este sistema es :

$$X = Y = Z = 0, \quad (3.16)$$

que corresponde a valores constantes de A, B, C, y ϕ . De esta manera obtenemos como solución trivial al espacio plano con una topología distinta de la estandar.

Otra solución particular es la siguiente:

$$X = \frac{1}{k_1 + \frac{\omega + 2}{2} \rho} \quad (3.17)$$

$$Y = 0 \quad (3.18)$$

$$Z = \frac{\omega}{k_1 + \frac{\omega + 2}{2} \rho} \quad (3.19)$$

donde k_1 es una constante de integración. Notamos aquí que debido a la hipótesis hecha anteriormente en la ecuación (3.11), debemos tener que $k_1 \neq 0$.

En términos de los coeficientes de la métrica y el campo escalar, y a partir de las ecuaciones(3.12), obtenemos:

$$A = B = \text{const.} = 0 \quad (3.20)$$

$$C = \frac{2\omega}{\omega + 2} \ln \left| k_1 + \frac{\omega + 2}{2} \rho \right| \quad (3.21)$$

$$\phi = \phi_0 \left| k_1 + \frac{\omega + 2}{2} \rho \right|^{\frac{-2}{\omega + 2}} \quad (3.22)$$

Finalmente, la métrica está dada explícitamente para esta solución por:

$$ds^2 = - dt^2 + dz^2 + \left| k + \frac{\omega + 2}{2} \rho \right|^{\frac{2\omega}{\omega+2}} d\Phi^2 + d\rho^2 \quad (3.23)$$

§ 6. PROPIEDADES DE LA SOLUCION

Aquí consideraremos algunas propiedades de la solución dada por las ecuaciones (3.21) y (3.22) para las cuales el valor de ω no está restringido. Primero calcularemos la masa propia por unidad de longitud μ de la cuerda, ésta está definida como la integral de la densidad de energía "efectiva" (debida al campo escalar) sobre la superficie $t=\text{cte.}, z=\text{cte.}$ A partir de la métrica dada por (3.23) obtenemos:

$$\mu = \int_0^{\infty} 2\pi \sqrt{-g} T^{00}(\phi) d\rho \quad (3.24)$$

y el resultado es:

$$\mu = \pi \omega k_1^{\frac{2}{\omega+2}} \quad (3.25)$$

Tomando en cuenta que μ positiva y finita implica que ω es

positiva. La constante k_1 en la expresión (3.25) puede ser negativa, y en este caso el coeficiente de la métrica $g_{\Phi\Phi}$ se anula en:

$$\rho = \rho_1 = - 2k_1 / (\omega + 2)$$

Para ver si este es un efecto real o sólo una consecuencia de las coordenadas que estamos usando, evaluamos el escalar de curvatura en ese punto y encontramos:

$$R = C'' + C'/2 = - \omega / (k_1 + \rho [\omega + 2]/2)^2 \quad \text{----> } -\infty \text{ cuando } \rho \text{ --> } \rho_1$$

De esta manera nosotros obtenemos una singularidad real en ρ_1 .

Por otra parte si consideramos que $\omega > 500$, la métrica la podemos escribir como:

$$ds^2 = - dt^2 + dz^2 + (k_1 + \frac{\omega}{2} \rho)^2 d\Phi^2 + d\rho^2 \quad (3.26)$$

Y haciendo las las transformaciones:

$$t' = t \quad z' = z \quad \rho' = \rho + 2k_1/\omega \quad \Phi' = (\omega / 2) \Phi$$

Tenemos la métrica de espacio plano:

$$ds^2 = - dt'^2 + dz'^2 + \rho'^2 d\Phi'^2 + d\rho'^2 \quad (3.27)$$

Aunque esta ecuación es justamente la del espacio plano Φ' tiene un rango diferente. De esta manera geodésicas nulas inicialmente paralelas que pasen por lados opuestos de la cuerda se cruzarán y el ángulo de deflexión será igual al déficit angular $\Delta\Phi$ de la métrica.

El déficit angular lo podemos expresar en términos de la densidad lineal de masa μ . Sea S la superficie $(t, z) = \text{cte.}$ y sea $g_{ij} = {}^{(2)}g_{ij}$ la métrica bidimensional en S . El escalar de curvatura de S es: ${}^{(2)}R = {}^{(4)}R = C'' + C'^2/2$. En S las únicas componentes no nulas del tensor de Riemman son:

$$R_{\Phi \rho \Phi \rho} = R_{\rho \Phi \rho \Phi} = -1/2 R \quad (3.28)$$

Usando una versión del teorema de Gauss-Bonnet [2] y expresando la curvatura de Gauss en términos de el escalar de curvatura R , tenemos:

$$\Delta\Phi = -1/2 \int R (-g)^{1/2} d^2x \quad (3.29)$$

usando que en nuestra solución $G^{00} = T^{00} = -1/2 R$ obtenemos la ecuación (3.24). Por lo que:

$$\Delta\Phi = \mu \quad (3.30)$$

La cual es equivalente a la obtenida anteriormente en relatividad general por Vilenkin, Gott y Garfinkle ($\Delta\Phi = 8\pi\mu$).

REFERENCIAS

- [1] T. W. Kibble, J. Phys. A 9, 1387 (1976)
- [2] Michael Spivak, A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Vol.III p. 390 Publish or Perish Inc. (1979).
- A. Albretcht, Neil Turok, Phys. Rev. Lett. 54, 1868 (1985)
- Neil Turok, Phys. Review. Lett.55, 1801 (1985)
- A.Vilenkin, Phys. Review D,23, 852 (1981)
- D. Garfinkle, Phys. Rev. D., 32, 1323 (1985)
- P.C.W. Davies and V. Sahni Class. Quantum Grav. 5, 1 (1988)

APENDICE 1

La ecuación de movimiento para una banda elástica, descrita por la lagrangiana:

$$\mathcal{L} = 1/2 \mu \dot{u}^2 - 1/2 T u'^2 \quad (1)$$

está dada por:

$$\partial_t \left(\partial \mathcal{L} / \partial \dot{u} \right) - \partial \mathcal{L} / \partial u = 0 \quad (2)$$

$$\partial_t (\mu \dot{u}) + \partial_x (-T u') = 0$$

$$\mu \ddot{u} - T u'' = 0$$

y finalmente la ecuación de movimiento es:

$$\ddot{u} = T/\mu u'' \quad (3)$$

REFERENCIAS:

A.O. Barut Electrodynamics and Classical Theory of Fields and particles (Dover Publications, Sept. 1979)

APENDICE 2

A partir de la Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \left(\dot{u}^2 u'^2 + (\dot{u} \circ u')^2 \right)^{1/2} \quad (1)$$

y usando las condiciones de norma:

$$\dot{u} \circ u' = 0 \quad (2)$$

$$\dot{u}^2 + u'^2 = 1 \quad (3)$$

donde la (') significa derivada con respecto a las coordenadas de la hoja de mundo de la cuerda $\sigma^\mu = (\tau, \sigma)$.

Las ecuaciones de campo las determinamos a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo u . Y puesto que la lagrangiana no depende explícitamente del campo u , sino sólo de sus derivadas, obtenemos:

$$\partial_\tau \left(\partial \mathcal{L} / \partial \dot{u} \right) + \partial_\sigma \left(\partial \mathcal{L} / \partial u' \right) = 0 \quad (4)$$

Usando la ecuación (3), la lagrangiana queda como:

$$\mathcal{L} = |\dot{u}| |u'| \quad (5)$$

Ahora, usando la condición de norma (3), la ecuación (4) queda:

$$\dot{u}^2 + u'^2 = (\dot{u} + u')^2 = 1 \quad (6)$$

$$\dot{u} + u' = 1 \quad (7)$$

Sustituyendo (7) en (4) y tomando en cuenta que el cálculo lo estamos realizando en espacio plano, obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\ddot{u} = c^2 x'' \quad (8)$$

REFERENCIAS:

Neil Turok, FERMILAB-CONF-88/ 116-A (Agosto 1988)

Robert H. Brandenberger, Preprint Lectures on inflationary universe models and cosmic strings. (Nov. 1989)

A.O. Barut Electrodynamics and Classical Theory of Fields and particles (Dover Publications, Sept. 1979)

APENDICE 3

METRICAS ESTATICAS

Las condiciones (a) y (b) establecidas en el capítulo 3 son equivalentes, la estacionaridad de la métrica implica la existencia de una coordenada temporal para la cual $g_{\alpha\beta,t} = 0$. Para esto escogamos la coordenada temporal de manera que $\xi = \partial/\partial t$, y con esta elección tenemos que $\mathcal{L}_\xi g = 0$, o que:

$$g_{\alpha\beta,\gamma} \xi^\gamma + g_{\alpha\beta} \xi^\gamma_{,\beta} + g_{\beta\gamma} \xi^\gamma_{,\alpha} = 0 \quad (1)$$

Como $\xi^\gamma = (1,0,0,0)$ esto muestra que $g_{\alpha\beta,t} = 0$.

La reversibilidad temporal significa que $g_{\alpha\beta}$ es independiente de t y por lo tanto $g_{ti} = 0$. Para mostrar la equivalencia de ambos enunciados es necesario mostrar que la condición $g_{ti} = 0$ es equivalente a la condición de ortogonalidad (hipersuperficie ortogonal) de $\xi = \partial/\partial t$.

Si $g_{ti} = 0$, entonces $\xi_\alpha = g_{\alpha\beta} \xi^\beta = g_{\alpha t} = 0$ a menos que $\alpha = t$. De aquí que ξ_α es proporcional a $t_{,\alpha}$ es decir ξ es ortogonal a las superficies $t = \text{cte}$. Como ξ es hipersuperficie-ortogonal se cumple:

$$\xi_{[\alpha;\beta} \xi_{\gamma]} = 0 \quad (2)$$

Esto junto con la ecuación de Killing $\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$, tenemos:

$$\xi_{\alpha;\beta} \xi_{\gamma} + \xi_{\gamma;\alpha} \xi_{\beta} + \xi_{\beta;\gamma} \xi_{\alpha} = 0 \quad (3)$$

Multiplicando por ξ^a y usando la ecuación de Killing sobre el primero y tercer términos obtenemos:

$$1/2 \left[\xi_{\alpha;\beta} - \xi_{\beta;\alpha} \right] \xi^2 + 1/2 \xi^2_{,\alpha} \xi_{\beta} - 1/2 \xi^2_{,\beta} \xi_{\alpha} = 0 \quad (4)$$

$$\xi^2 = \xi \circ \xi \quad (5)$$

de aquí que:

$$(\xi^{-2} \xi_{\beta})_{;\alpha} - (\xi^{-2} \xi_{\alpha})_{;\beta} = 0 \quad (6)$$

Así $\xi^{-2} \xi_a$ es un gradiente y por lo tanto podemos escribir:

$$\xi_a = \xi^2 h_{,\alpha} \quad (7)$$

Para alguna función h. Por otra parte $\xi^2 = g_{tt}$ y $\xi_a = g_{at}$, por lo que la ecuación (7) la podemos escribir:

$$g_{at} = g_{tt} h_{,\alpha} \quad (8)$$

Haiendo $\alpha = t$ tenemos que $h_{,t} = 1$ o que $h = t + f(x^1)$. Escogiendo una nueva coordenada temporal $t' = t + f(x^1)$, tenemos:

$$g_{it'} = g_{tt} h_{,i} = g_{tt} t'_{,i} = 0 \quad (9)$$

$$\xi^{\alpha'} = (\partial x^{\alpha'} / \partial x^{\beta}) \xi^{\beta} = (\partial x^{\alpha'} / \partial t) = (1,0,0,0) \quad (10)$$

Por lo que $g_{\alpha\beta}$ es independiente también de t' . De esta manera se tiene que ambos enunciados son equivalentes y existe un vector temporal de Killing.

REFERENCIAS:

- Steven Weinberg, Gravitation and Cosmology (John Wiley & Sons, 1971)
Charles W. Misner, Kip S. Thorne & John Archibald Wheeler, Gravitation
(W. H. Freeman and Company, 1973)
Moshe Carmeli, Classical Fields General Relativity and Gauge Theory
(John Wiley & Sons, 1982)

APENDICE 4

ECUACIONES DE CAMPO

§ COMPONENTES DEL TENSOR DE EINSTEIN

Determinaremos las componentes del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ en la métrica de Garfinkle usando formas diferenciales, la métrica esta dada por:

$$dS^2 = -e^A dt^2 + e^B dz^2 + e^C d\Phi^2 + d\rho^2 \quad (3.4)$$

donde A, B y C son funciones de ρ únicamente.

Una base ortonormal en este espacio tiempo para las 1-formas diferenciales es:

$$\omega^t = e^{A/2} dt$$

$$\omega^z = e^{B/2} dz$$

$$\omega^\Phi = e^{C/2} d\Phi$$

$$\omega^\rho = d\rho$$

Las ω^μ_ν son soluciones de las ecuaciones:

$$d\omega^\mu = -\omega^\mu_\nu \wedge \omega^\nu \quad (1)$$

Por la elección que hicimos para la base de las 1-formas, se tiene que: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ y por lo tanto de la ecuación (2) se tiene que:

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (3)$$

por lo que sólo existen 6, 1-formas que deben ser determinadas.

En particular se tiene que:

$$\omega_t^t = 0, \text{ pues } \omega_t^t = \eta^{tt} \omega_{tt} = -\omega_{tt} \stackrel{6}{=} \omega_{tt}$$

En forma análoga se muestra que $\omega_k^k = 0$.

CALCULO DE LAS ω_{ν}^{μ}

De la ecuación (1) se obtiene:

a) Para t

$$d\omega^t = d(e^{A/2} dt) = e^{A/2} d(dt) + A'/2 e^{A/2} d\rho \wedge dt$$

$$d\omega^t = A'/2 \omega^{\rho} \wedge \omega^t$$

sustituyendo en (1) obtenemos:

⁶ POR LA ECUACION (3)

$$\Lambda^{1/2} \omega^\rho \wedge \omega^t = -\omega_z^t \wedge \omega^z - \omega_\Phi^t \wedge \omega^\Phi - \omega_\rho^t \wedge \omega^\rho \quad (4)$$

En forma análoga obtenemos las expresiones para las diferenciales $d\omega^z$, $d\omega^\Phi$, $d\omega^\rho$, y de este cálculo resulta:

b) Para z

$$B^{1/2} \omega^\rho \wedge \omega^z = -\omega_t^z \wedge \omega^t - \omega_\Phi^z \wedge \omega^\Phi - \omega_\rho^z \wedge \omega^\rho \quad (5)$$

c) Para Φ

$$C^{1/2} \omega^\rho \wedge \omega^\Phi = -\omega_t^\Phi \wedge \omega^t - \omega_z^\Phi \wedge \omega^z - \omega_\rho^\Phi \wedge \omega^\rho \quad (6)$$

d) Para ρ

$$0 = -\omega_t^\rho \wedge \omega^t - \omega_z^\rho \wedge \omega^z - \omega_\Phi^\rho \wedge \omega^\Phi \quad (7)$$

Ahora, como las ω^α ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) forman una base, es posible expresar a cada una de las ω^μ_ν como combinación lineal de los elementos de la base, de manera que podemos escribir $\omega^\mu_\nu = h_\alpha^\mu \omega^\alpha$.

Las 6, 1-formas a determinar son:

$$\omega_z^t = \omega_t^z = a_\alpha \omega^\alpha$$

$$\omega_t^\Phi = \omega_\Phi^t = b_\alpha \omega^\alpha$$

$$\omega_t^\rho = \omega_\rho^t = c_\alpha \omega^\alpha$$

$$-\omega_z^\Phi = \omega_\Phi^z = d_\alpha \omega^\alpha$$

$$\omega^{\rho}_t = \omega^t_{\rho} = c_{\alpha} \omega^{\alpha}$$

$$- \omega^{\Phi}_z = \omega^z_{\Phi} = d_{\alpha} \omega^{\alpha}$$

$$- \omega^{\rho}_z = \omega^z_{\rho} = f_{\alpha} \omega^{\alpha}$$

$$- \omega^{\rho}_{\Phi} = \omega^{\Phi}_{\rho} = g_{\alpha} \omega^{\alpha}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en las ecuaciones 4 a 7 determinamos los valores de los coeficientes a_{α} , b_{α} , c_{α} , d_{α} , f_{α} , y g_{α} , y de esta manera las expresiones para las ω^{μ}_{ν} , de donde resulta:

$$\omega^t_z = 0 = \omega^z_t$$

$$\omega^z_{\Phi} = 0 = - \omega^{\Phi}_z$$

$$\omega^t_{\Phi} = 0 = \omega^{\Phi}_t$$

$$\omega^z_{\rho} = (B'/2) \omega^z = - \omega^{\rho}_z$$

$$\omega^t_{\rho} = (A'/2) \omega^t = \omega^{\rho}_t$$

$$\omega^{\Phi}_{\rho} = (C'/2) \omega^{\Phi} = - \omega^{\rho}_{\Phi}$$

A partir de estas ecuaciones podemos determinar las expresiones para los símbolos de Christoffel correspondientes a ésta métrica, así como la forma explícita para el D'Alambertiano de el campo ϕ . Para esto es necesario recordar la relación de estos con las 1-formas, a saber:

$$\omega^{\nu}_{\mu} = \Gamma^{\nu}_{\mu \alpha} \omega^{\alpha} \quad (8)$$

y haciendo uso de la ecuación 3, obtenemos las expresiones para los

$$\Gamma_{z z}^{\rho} = - \frac{B'}{2}$$

$$\Gamma_{\phi \phi}^{\rho} = - \frac{C'}{2}$$

Y el D'Alambertiano de ϕ en esta métrica resulta:

$$\square \phi = g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \phi = g^{\alpha\beta} e_{\alpha} (e_{\beta} \phi) - g^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta \alpha}^{\gamma} e_{\gamma} \phi$$

En nuestro caso $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ debido a la elección de las e_{α} , de esta manera el D'Alambertiano resulta:

$$\square \phi = - e^{-A} \partial_t^2 \phi + e^{-C} \partial_{\phi}^2 \phi + e^{-B} \partial_z^2 \phi + \partial_{\rho}^2 \phi + \frac{A'+B'+C'}{2} \partial_{\rho} \phi$$

§ CALCULO DE LAS R^{μ}_{ν} .

De la ecuación:

$$R^{\mu}_{\nu} = d\omega^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\alpha} \wedge \omega^{\alpha}_{\nu} \quad (9)$$

que relaciona las componentes del tensor de Ricci con las 1-formas diferenciales calculadas, obtenemos:

$$R^t_z = - \frac{A'B'}{4} \omega^t \wedge \omega_z$$

$$R^t_{\phi} = - \frac{A'C'}{4} \omega^t \wedge \omega_{\phi}$$

$$R^t_{\Phi} = - \frac{A'C'}{4} \omega^t \wedge \omega_{\Phi}$$

$$R^z_{\Phi} = - \frac{B'C'}{4} \omega_{\Phi} \wedge \omega^z$$

$$R^t_{\rho} = \left(\frac{A'}{2} + \frac{A'^2}{2} \right) \omega_{\rho} \wedge \omega^t$$

$$R^z_{\rho} = \left(\frac{B''}{2} + \frac{B'^2}{4} \right) \omega_{\rho} \wedge \omega^z$$

$$R^{\Phi}_{\rho} = \left(\frac{C''}{2} + \frac{C'^2}{4} \right) \omega_{\rho} \wedge \omega^{\Phi}$$

Los términos no nulos del tensor de Riemman las determinamos a partir de la expresión:

$$R^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu|\alpha\beta|} \omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \quad (10)$$

donde $|\alpha\beta|$, significa que los índices α y β deben ser considerados de manera que $\alpha < \beta$.

De esta manera los términos no nulos del tensor de Riemman son:

$$R^t_{ztz} = - \frac{A'B'}{4} \quad R^t_{\Phi t \Phi} = - \frac{A'C'}{4}$$

$$R^z_{\Phi z \Phi} = - \frac{B'C'}{4} \quad R^t_{\rho t \rho} = - \frac{A'^2}{4} - \frac{A''}{2}$$

$$R^z_{\rho z \rho} = - \frac{B'^2}{4} - \frac{B''}{2} \quad R^{\Phi}_{\rho \Phi \rho} = - \frac{C'^2}{4} - \frac{C''}{2}$$

A partir de estas expresiones podemos determinar el escalar de

curvatura, y de este cálculo obtenemos:

$$R = C'' + C'^2 / 2$$

Con las expresiones anteriores podemos determinar las componentes no nulas del tensor de Einstein, a partir de la relación:

$$G_{\beta}^{\delta} = - \delta_{\beta\mu\nu}^{\delta\sigma\rho} R \begin{vmatrix} \mu\nu \\ \rho\sigma \end{vmatrix}$$

donde:

$$\delta_{\beta\mu\nu}^{\delta\sigma\rho} = \begin{cases} + 1 & \text{si } \delta\sigma\rho \text{ es una permutación par de } \beta\mu\nu \\ - 1 & \text{si } \delta\sigma\rho \text{ es una permutación impar de } \beta\mu\nu \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

de este cálculo obtenemos:

$$G_{00} = - \frac{C'^2 + B'^2 + B'C'}{4} - \frac{C'' + B''}{2}$$

$$G_{11} = \frac{A'B' + A'C' + B'C'}{4}$$

$$G_{22} = \frac{A'^2 + B'^2 + A'B'}{4} + \frac{A'' + B''}{2}$$

$$G_{33} = \frac{A'^2 + C'^2 + A'C'}{4} + \frac{A'' + C''}{2}$$

§ ECUACIONES DE CAMPO

Sustituyendo los resultados anteriores en las ecuaciones de

campo dadas por (3.2) y (3.3) obtenemos:

$$2C'' + C'^2 + 2B'' + B'^2 + B'C' = -2\omega \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - 2(B' + C') \frac{\phi'}{\phi} - 4 \frac{\phi''}{\phi}$$

$$A'B' + A'C' + B'C' = 2\omega \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - 2(A' + B' + C') \frac{\phi'}{\phi}$$

$$2A'' + A'^2 + 2B'' + B'^2 + B'A' = -2\omega \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - 2(A' + B') \frac{\phi'}{\phi} - 4 \frac{\phi''}{\phi}$$

$$2C'' + C'^2 + 2A'' + A'^2 + A'C' = -2\omega \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - 2(A' + C') \frac{\phi'}{\phi} - 4 \frac{\phi''}{\phi}$$

$$2\phi'' + (A' + B' + C')\phi' = 0$$

Donde las primas significan derivadas con respecto a ρ .

REFERENCIAS:

Charles W. Misner, Kip S. Thorne & John Archibald Wheeler, Gravitation

(W. H. Freeman and Company, 1973)

Steven Weinberg, Gravitation and Cosmology (John Wiley & Sons, 1971)