

**SOLUCIONES PERIODICAS DE PRIMER ARMONICO DE SISTEMAS LINEALES CON
CONTROL SATURADO**

TESIS QUE PRESENTA EL
M.C. BALTAZAR AGUIRRE HERNÁNDEZ
PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS
DICIEMBRE 1998

DIRECTOR DE TESIS
DR. RODOLFO SUAREZ CORTES

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERIA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

**SOLUCIONES PERIODICAS DE PRIMER ARMONICO DE
SISTEMAS LINEALES CON CONTROL SATURADO**

POR

BALTAZAR AGUIRRE HERNÁNDEZ

TESIS DE DOCTORADO

A mis padres:

Esperanza y José Baltazar

A mis hermanas y hermanos:

Carolina, Guillermina, Eva e Hilda

Juan Carlos, Eusebio, Jacobo y Luis

Agradecimientos

Deseo agradecer a los sinodales, Dr. Vladimir Kharitonov Grigorieva, Dr. Jaime Alvarez Gallegos, Dr. Carlos Ibarra Valdez, Dr. Joaquín Delgado Fernández y al Dr. Rodolfo Suárez Cortes porque las revisiones tan cuidadosas que hicieron de esta tesis trajeron como resultado sugerencias y observaciones muy valiosas para mejorar este trabajo.

En particular, deseo expresar mi agradecimiento a mi asesor, el Dr. Rodolfo Suárez Cortes por el tiempo y la dedicación que tuvo para la realización de éste trabajo.

De manera especial, quiero agradecer al Dr. José Alvarez Ramírez, cuya contribución ha sido fundamental.

También agradezco por su colaboración y comentarios al Dr. Carlos Ibarra Valdez y al Dr. Guillermo Fernández.

Quisiera agradecer también a Beatriz Arce Vargas por su ayuda en la captura de datos de alguna parte del trabajo.

Finalmente, expreso sinceramente mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el financiamiento recibido durante el desarrollo de este trabajo por medio de su Programa de Becas de Posgrado, así como al Instituto Mexicano del Petróleo (IMP) por su apoyo en esta tesis mediante el Proyecto FIES95-93II bajo responsabilidad del Dr. José Alvarez Ramírez y que lleva por título "Control Robusto de Procesos Químicos".

INDICE

Introducción	5
Parte 1 Regiones de atracción y bifurcaciones de órbitas periódicas	14
1 Introducción	15
2 Predicción de órbitas periódicas	18
2.1 El Método de Balance Armónico.....	18
2.2 El Método de balance armónico en sistemas controlables con saturación.....	22
2.2.1 Una forma canónica y una expresión para la función de transferencia.....	22
2.2.2 El método de balance de primer armónico en sistemas con saturación.....	24
2.2.3 Información Geométrica del Método de Balance de Primer Armónico.....	27
3 Sistemas en el plano	29
3.1 Información del Método de Balance de Primer Armónico.....	29
3.2 Órbitas periódicas simétricas de primer armónico.....	30
3.3 Órbitas periódicas no simétricas de primer armónico.....	32
3.4 Conclusiones.....	35
4 Sistemas tri-dimensionales	38
4.1 Presentación del control al que estará sujeto el sistema.....	38
4.2 Información Geométrica del Método del Primer Armónico.....	40
4.3 No existencia de OPPA's no simétricas.....	41
4.4 El Caso en que A es Hurwitz.....	43
4.5 Caso en que A es antiestable.....	48
4.5.1 Órbitas periódicas no simétricas PA virtuales.....	53
4.6 Caso en que la matriz A tiene valores propios con parte real positiva y negativa.....	57
4.6.1 A con un valor propio negativo.....	57
4.6.2 A con un valor propio positivo.....	58

4.7 El 3-integrador	60
4.8 Conclusiones	62
Apéndice de la Parte 1	67
Cálculo de las funciones $F(a, \alpha_0)$ y $G(a, \alpha_0)$	62
Resultados técnicos	70
Propiedades asintóticas de r y ω^2	77
Parte 2 Sistemas sujetos a controles de alta ganancia	81
5 Introducción	82
6 Sistemas planos controlables	86
6.1 Diagrama de bifurcación de Primer Armónico	87
6.2 Simulaciones numéricas	92
6.3 Conclusiones	94
7 Sistemas n-dimensionales: primera parametrización	95
7.1 Introducción	95
7.2 Información del Método de la Función Descriptora	98
7.3 Resultados Principales	99
7.4 Conclusiones	106
8 Condiciones suficientes para que un polinomio sea Hurwitz y su aplicación a el diseño de un control estabilizante de alta ganancia (segunda parametrización)	107
8.1 Introducción: Sistemas bidimensionales y tridimensionales	107
8.2 Sistemas n-dimensionales: Diseño de un control de alta ganancia para conseguir no existencia de soluciones periódicas	110
8.3 Condiciones suficientes para que un polinomio sea Hurwitz	113
8.3.1 Introducción	113
8.3.2 Condiciones suficientes	114

8.4 El control diseñado es un control estabilizante	116
8.5 El problema de existencia de tales controles	118
8.6 Un ejemplo numérico	123
8.7 Conclusiones	123
Apéndice de la Parte 2	126
Las condiciones de Routh-Hurwitz	126
El Teorema de Hermite-Biehler	126
10 Conclusiones finales	128
Referencias	131

Lista de acrónimos

CAG	Control de Alta Ganancia
GAE	Globalmente Asintóticamente Estable
LAE	Localmente Asintóticamente Estable
MBA	Método de Balance Armónico
MBPA	Método de Balance de Primer Armónico
MFD	Método de la Función Descriptora
OPPA	Orbita Periódica de Primer Armónico
OPPAC	Orbita Periódica de Primer Armónico que se Colapsa
PA	Primer Armónico
PBA	Principio de Balance Armónico
RA	Región de Atracción
RAG	Retroalimentación de Alta Ganancia
C⁺	El conjunto de números complejos con parte real estrictamente positiva

Introducción

En ésta tesis consideramos sistemas del siguiente tipo

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (1)$$

donde A es una matriz cuadrada de $n \times n$, x y b son vectores en el espacio n -dimensional y u es una función real llamada control que introducimos con el fin de lograr un cierto objetivo. Por ejemplo, se puede buscar que el sistema sea globalmente asintóticamente estable, o bien, que la región de atracción del origen sea lo más grande posible. Si $u = u(x)$, entonces se dice que u es una retroalimentación de estado. En el diseño de leyes de retroalimentación de estado usualmente no se considera la restricción de que las entradas sean acotadas, es decir que u deba ser una función acotada. En general, las leyes de control se diseñan sin tomar en cuenta las cotas o límites en los dispositivos físicos. Sin embargo, en los sistemas físicos (en las aplicaciones) existen especificaciones de seguridad y desempeño, así como otras limitaciones (de espacio o de energía, por ejemplo) y debido a esto, es necesario imponer ciertas restricciones en las leyes de control, de manera que en la práctica las acciones de control alcanzan el valor máximo y mínimo físicamente posibles de las entradas (se saturan).

Un enfoque natural para diseñar controles acotados es considerar saturaciones de retroalimentaciones lineales. A continuación explicamos este enfoque. Cuando en el sistema (1) el par (A, b) es controlable, entonces existe una retroalimentación de estado $u = K^T x$, donde K es un vector en el espacio n -dimensional, de tal manera que los valores propios de la matriz $A + bK^T$ pueden ser escogidos arbitrariamente. En particular, puede conseguirse que el sistema $\dot{x} = (A + bK^T)x$ sea globalmente asintóticamente estable. Con la finalidad de construir la llamada saturación de u hacemos la siguiente definición.

Definición. Sea v una función de control del sistema (1) y u^-, u^+ números reales tales que $u^- < 0 < u^+$. Si $[u^-, u^+]$ es el conjunto de valores admisibles, entonces la saturación de v , a la cual denotamos como v_{sat} , es la siguiente función

$$S(v) = \begin{cases} u^- & \text{si } u^- > v \\ v & \text{si } u^- \leq v \leq u^+ \\ u^+ & \text{si } v > u^+ \end{cases} \quad (2)$$

De ésta manera, si u es de la forma $u(x) = K^T x$ la correspondiente función saturada queda definida como

$$u_{sat}(x) = \mathcal{S}(K^T x)$$

y el sistema a lazo cerrado como

$$\dot{x} = Ax + bu_{sat} \quad (3)$$

es decir

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + bu^- & \text{si } u^- > K^T x \\ Ax + (K^T x)b & \text{si } u^- \leq K^T x \leq u^+ \\ Ax + bu^+ & \text{si } K^T x > u^+ \end{cases} \quad (4)$$

En éste trabajo nosotros sólo consideraremos funciones de saturación simétricas, es decir $u^+ = -u^-$.

La restricción sobre la entrada $|u| \leq u^+$ induce severas restricciones sobre la estabilidad del sistema a lazo cerrado. Si la matriz a lazo abierto A tiene al menos un valor propio con parte real positiva, entonces no hay una función de retroalimentación acotada $u_{sat}(x)$ tal que el sistema a lazo cerrado $\dot{x} = Ax + bu_{sat}(x)$ sea globalmente asintóticamente estable (**GAE**). Es decir, bajo $u_{sat}(x)$, la región de atracción del origen es un subconjunto propio de \mathbb{R}^n . Este resultado es “comprensible” desde un punto de vista intuitivo. Para el caso en que el sistema a lazo abierto $\dot{x} = Ax$ es asintóticamente estable (es decir, la matriz a lazo abierto A es Hurwitz) y considerando el caso bidimensional no es difícil probar que para cualquier retroalimentación estabilizante $K^T x$ el sistema a lazo cerrado $\dot{x} = Ax + b\mathcal{S}(K^T x)$ permanecerá **GAE** alrededor del origen a pesar de la saturación de la entrada [Suarez *et al.*, 1995]. Sin embargo, si $n \geq 3$ el sistema presenta un comportamiento que no es el esperado. De hecho, existen funciones de control acotadas $\mathcal{S}(K^T x)$ para las cuales el sistema a lazo cerrado $\dot{x} = Ax + b\mathcal{S}(K^T x)$ no es **GAE**.

Finalmente nos queda la pregunta de qué pasa cuando la matriz A tiene valores característicos en el eje imaginario. En este caso es conocido [Fuller, 1969] que si el sistema (1) contiene al menos un integrador m -dimensional con $m \geq 3$, es decir, el cero es un valor característico de la matriz A de al

menos 3^{er} orden, entonces existen trayectorias del sistema a lazo cerrado que no pueden ser llevadas al origen con acciones de control lineales saturadas.

Como se ve, el fenómeno de saturación impide que la estabilización de un sistema mediante retroalimentación sea global.

Por otro lado, es muy importante observar que aunque el sistema resultante a lazo cerrado $\dot{x} = Ax + bu_s(x)$ es no lineal, presenta la característica de ser continuo y lineal por pedazos. Esta clase de sistemas es muy interesante ya que ellos combinan diferentes tipos de comportamiento dinámico en diferentes regiones del espacio de estado. En realidad el comportamiento dinámico observado en sistemas similares a (1) es muy diverso: desde estabilidad asintótica global hasta caos [ver Kahlert, C. & Rossler, 1985 y Chua *et al*, 1986]. En nuestro caso, la introducción de la función de saturación $sat(u)$ en el sistema (1) tiene consecuencias como la aparición de otros puntos de equilibrio u órbitas periódicas (ciclos límite) del sistema a lazo cerrado. Ahora bien, ya que $S(0) = 0$ y la linealización de $Ax + bu_s(x)$ alrededor del origen es $\dot{x} = (A + bK^T)x$, entonces el origen sigue siendo un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema a lazo cerrado a pesar de la saturación, por lo que podemos aprovechar los métodos para diseñar controles lineales si el conjunto de puntos de interés práctico está contenido en la región de atracción del origen. Por lo tanto, la caracterización y estimación del tamaño de la región de atracción proporciona una manera sencilla para el manejo de las restricciones de saturación.

Así pues, desde el punto de vista de Teoría de Control tendríamos tres problemas, de los cuales solo los dos primeros son estudiados en esta tesis:

1. Encontrar la **RA** para el sistema saturado.
2. Caracterizar el conjunto de vectores K para los cuales el sistema saturado a lazo cerrado es **GAE**.
3. Diseñar funciones de control no lineales, diferentes a las lineales saturadas, de forma tal que el sistema a lazo cerrado sea **GAE**.

Una forma de abordar el problema 3 se puede ver en [Suárez *et al*, 1997], ver también las referencias contenidas en ese trabajo.

Los efectos de la saturación presentan comportamientos típicamente no lineales, tales como: multiplicidad de puntos de equilibrio, flujos restringidos a esferas, cilindros, etc., de aquí el interés de hacer una descripción cualitativa de éstos sistemas, caracterizarizando sus puntos de equilibrio, sus órbitas periódicas, la forma de la región de atracción, etc. En un trabajo previo sobre sistemas bidimensionales [Alvarez *et al.*, 1993], fue estudiado el comportamiento cualitativo de la región de atracción del origen $\Omega(0)$ en términos de los parámetros del sistema no controlado y también fue establecida la clasificación de los puntos de equilibrio de (1). Sea $\sigma(A)$ el espectro de la matriz A . Se mostró que si $\sigma(A) \cap C^+ \neq \emptyset$, el origen no es globalmente asintóticamente estable. Además, si $\text{traza}(A) > 0$, entonces podría aparecer una órbita periódica alrededor del origen de manera que $\Omega(0)$ es un conjunto acotado. Además, fueron descritas bifurcaciones topológicas de $\Omega(0)$ tales como el paso de $\Omega(0)$ de un conjunto no acotado a un conjunto acotado a través de conexiones homo(hetero)-clínicas entre puntos de equilibrio de tipo silla [ver también Llibre y Sotomayor].

En otro trabajo [Suárez *et al.*, 1995] y continuando con métodos cualitativos se dió una caracterización topológica de la región de atracción del origen (**RA**) para sistemas lineales con control lineal saturado. Para este fin, fue esencial el estudio del comportamiento dinámico sobre la frontera de la **RA**. En particular, se probó que la frontera es igual a la unión de las variedades estables de los elementos críticos (puntos de equilibrio y ciclos límite) sobre la frontera. Esto significa que para estimar la **RA** se demostró que su frontera, $\partial\Omega(0)$, satisface $\partial\Omega(0) = \cup W^s(\gamma_j)$ donde los γ_j son los elementos críticos en $\partial\Omega(0)$ los cuales están conectados al origen y $W^s(\gamma_j)$ son sus correspondientes variedades estables. En ese trabajo se probó que la forma de la región de atracción del origen depende fuertemente del número n_u de valores característicos del sistema a lazo abierto con parte real positiva.

Específicamente, los resultados en [Suárez *et al.*, 1995] son los siguientes: Para un sistema cuyos valores propios a lazo abierto tienen parte real no positiva, la **RA** es no acotada. Para sistemas a lazo abierto estables, fue probado que todas las trayectorias eventualmente tienden hacia algún conjunto compacto de volumen cero. Para sistemas a lazo abierto antiestables ($\sigma(A) \subset C^+$), fue probado que la **RA** es acotada y homeomórfica a la bola unitaria n -dimensional. Para el caso de sistemas con algunos valo-

res propios con parte real positiva y otros con parte real negativa, se encuentra que una retroalimentación que sólo reubica los valores propios con parte real positiva, hace la **RA** homeomórfica a el producto de las **RA**s asociadas a las partes estable y estabilizada. En consecuencia, la **RA** del sistema a lazo cerrado es homeomórfica al cilindro $\mathbb{R}^{n-n_u} \times B^{n_u}$. Para $n_u = 1$ y manteniendo fijos los valores propios reubicados, la estructura cilíndrica de la **RA** se mantiene bajo pequeños cambios en la ubicación de los valores propios estables a lazo abierto.

Como se ve en [Suárez *et al*, 1995], una descripción analítica del tamaño de la **RA** no es una tarea fácil porque en general no es posible encontrar explícitamente las soluciones del sistema $\dot{x} = Ax + bS(K^T x)$ y el uso de las técnicas de sistemas dinámicos para el análisis de las trayectorias que definen la **RA** es un problema muy complicado. Sería deseable adaptar alguna técnica no lineal bien conocida, que usualmente es aproximada y no rigurosa, para estudiar problemas complicados. Tales técnicas podrían producir información adicional de naturaleza no numérica para el comportamiento cualitativo de la **RA**, conduciendo a resultados que tienen cierto impacto en ingeniería. La justificación de tales métodos aproximados es que pueden dar predicciones razonables y correctas, pero con una fracción del esfuerzo necesario en los métodos rigurosos.

En esta tesis, estudiaremos el problema de la existencia de ciclos límite, el cual no fue considerado en [Suárez *et al*, 1995]. Ya que el problema de la existencia de órbitas periódicas es en general, un problema complicado, buscaremos órbitas periódicas en forma aproximada usando el método de balance armónico (**MBA**) [Mees, 1981; Krenz and Miller, 1986; Moiola and Chen, 1993, 1996]. Aunque el **MBA** es aproximado y no riguroso, es usado con frecuencia para detectar órbitas periódicas de sistemas no lineales [Mees, 1981]. Recientemente, Llibre y Ponce [1996] utilizaron el método de balance armónico para describir la dinámica de sistemas de control en dos y tres dimensiones que están sujetos a retroalimentaciones de estado con saturación estabilizantes. En éstos trabajos se puede encontrar una descripción completa de bifurcaciones periódicas de primer armónico (**PA**) simétricas (con respecto al origen), encontrándose una gran variedad de comportamientos dinámicos. Aquí aplicaremos esta técnica también para estudiar las órbitas periódicas no simétricas y las bifurcaciones en el número de órbitas pe-

riódicas que se encuentran sobre la frontera de la **RA** cuando los parámetros del control cambian, pero se conserva la estabilidad del sistema a lazo cerrado (capítulo 4. Sistemas tridimensionales). En particular, cuando la matriz a lazo abierto es antiestable, la información que proporciona el método permite conjeturar una bifurcación que consiste en el rompimiento de una órbita simétrica, es decir, cuando la razón de convergencia al origen es aumentada, una órbita periódica simétrica aproximada se bifurca para producir al menos tres órbitas: una órbita periódica simétrica más dos órbitas periódicas no simétricas.

Además de permitir detectar la existencia de órbitas periódicas, el **MBA** también da un valor aproximado para la amplitud de las órbitas periódicas sobre la frontera. Esto y los resultados en [Suárez *et al*, 1995] permitirán estimar el tamaño de la **RA**.

Para el caso de las retroalimentaciones de estado $u = K^T x$, donde K es un vector en el espacio n -dimensional, existen formas específicas de escoger el vector K , las cuales por sus propiedades, tienen un interés particular; nos referimos a las conocidas parametrizaciones de alta ganancia. A continuación resumimos en qué consisten y cuales son sus propiedades.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{5}$$

donde $y \in \mathbb{R}^m$, C es una matriz de $m \times n$. La función $y(t)$ es conocida como la salida del sistema.

Sea $K(\delta) \in \mathbb{R}^n$ un vector que depende de un parámetro $\delta > 0$. Si cuando δ es suficientemente grande la retroalimentación de estado $u_\delta(x) = K^T(\delta)x$ satisface que todos los valores propios de la matriz $A + bK^T(\delta)$ están ubicados en el semiplano izquierdo del plano complejo y la parte real de al menos uno de ellos diverge a $-\infty$ cuando $\delta \rightarrow \infty$, entonces $u_\delta(x) = K^T(\delta)x$ es llamada una retroalimentación de estado de alta ganancia. El objetivo de tales diseños es reducir el efecto de perturbaciones sobre la salida y (ver capítulo 5).

Debido a que los controles de alta ganancia han sido una herramienta clásica para reducir los efectos de las perturbaciones, se han hecho diversos estudios con la finalidad de conocer mejor el fenómeno.

En [Young *et al*, 1977] se estudiaron sistemas de alta ganancia de la forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_0 &= A_0x_0 + B_0u \\ u &= \delta C_0x_0\end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\delta \in \mathbb{R}$.

En ese trabajo se ve que x_0 puede ser escrito como $x_0 = Nz + B_0(C_0B_0)^{-1}y$ donde N es una matriz que satisface $C_0N = 0$. De esta manera ellos pueden obtener un cambio de variable de la forma $z = M_1x_0$ donde M_1 es una matriz con la propiedad de que $M_1B_0 = 0$ y entonces demuestran que con dicho cambio de variable el sistema puede escribirse como el sistema lineal singularmente perturbado

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}z &= F_{11}z + F_{12}y \\ \mu \frac{d}{dt}y &= F_{21}z + F_{22}y\end{aligned}$$

donde μ es un parámetro pequeño ($\mu = \frac{1}{\delta}$). De ésta manera pueden hacer un estudio de la localización asintótica de los valores propios cuando $\delta \rightarrow \infty$. Existen otros estudios acerca del comportamiento asintótico de los valores propios en sistemas sujetos a controles de alta ganancia [Ver Davison & Wang, 1974; Kouvaritakis & McFarlane, 1976; Rosenbrock, 1970].

Aunque los controles de alta ganancia tienen buenas propiedades, como son el reducir el efecto de perturbaciones acotadas o acelerar la razón de convergencia al origen de las trayectorias, también pueden presentar inconvenientes, como puede ser el hecho de que la **RA** del origen se colapse, lo cual significa que este punto de equilibrio prácticamente se desestabilice. Kokotovic y Marino [1986] presentaron una serie de ejemplos de sistemas no lineales en el plano sujetos a controles de alta ganancia para los cuales la **RA** se anula.

Es de esperarse que en sistemas de dimensiones mayores ocurran comportamientos dinámicos análogos. Ya que en la práctica es muy común usar **RAG**, es importante una mejor comprensión de tal fenómeno. En ésta tesis nosotros estudiaremos dos parametrizaciones de alta ganancia diferentes, en la primera de ellas la parte real de todos los valores propios a lazo cerrado diverge a $-\infty$, cuando $\delta \rightarrow \infty$; en la segunda parametrización la parte real de exactamente un valor propio a lazo cerrado diverge a $-\infty$ y los restantes valores propios convergen a números complejos ubicados en el semiplano izquierdo del

plano complejo, cuando $\delta \rightarrow \infty$. Aplicaremos el método de balance de primer armónico para estudiar sistemas de control lineales con entradas acotadas sujetos a controles de alta ganancia del tipo de la primera parametrización.

Como veremos en el capítulo 7 (sobre sistemas n-dimensionales), el uso de técnicas de balance armónico proporcionará una explicación del hallazgo numérico de que la RA se anula cuando la parte real de los valores propios a lazo cerrado divergen a $-\infty$. La información obtenida de esta manera es digna de tomarse en cuenta ya que proporciona una descripción del mecanismo de desestabilización del origen y muestra mucho de la complejidad de la estructura periódica que podemos encontrar en tales sistemas de control no lineales. Buscaremos órbitas periódicas inestables y estudiaremos su comportamiento asintótico en el caso en que las partes reales de los valores propios de la matriz $A_c = A + bK^T$ divergen a $-\infty$, cuando $\delta \rightarrow \infty$. La idea es mostrar que cuando un control de alta ganancia (las ganancias divergen al infinito) es considerado, tales órbitas periódicas inestables se contraen al origen desestabilizándolo.

Debido a la condición de estabilidad en el origen, la cual se presenta como la estabilidad del polinomio a lazo cerrado, un tema que es de importancia para este trabajo es el de conocer criterios para asegurar cuándo un polinomio de coeficientes reales es Hurwitz. El criterio más conocido es el de las llamadas condiciones de Routh-Hurwitz. Existen varias pruebas del Teorema de Routh-Hurwitz y también existen otros criterios para asegurar la estabilidad de un polinomio [Gantmacher, 1959]. En particular, nosotros utilizamos un criterio que en la literatura es conocido como el Teorema de Hermite-Biehler [Bhattacharayya et al, 1995] para hacer un análisis de un sistema sujeto a un control de alta ganancia con saturación donde las partes reales de todos los valores propios a lazo cerrado divergen a $-\infty$ (primera parametrización). También hemos obtenido, en términos de desigualdades, condiciones suficientes para asegurar cuando un polinomio es Hurwitz y hemos aplicado éstas condiciones para diseñar un control estabilizante de alta ganancia de la segunda parametrización, con la propiedad que desde un punto de vista de una aproximación de primer armónico el sistema a lazo cerrado no tiene órbitas periódicas (ver capítulo 8).

El trabajo está organizado de la siguiente manera: La primera parte está dedicada al estudio de regiones de atracción y bifurcaciones. La segunda parte, que comprende de los capítulos 5 al 8, la dedicamos al estudio de sistemas sujetos a controles de alta ganancia.

La presentación del problema que estudiaremos la hacemos en el capítulo 1 y también mencionamos algunos resultados anteriores acerca de regiones de atracción.

En el capítulo 2 presentamos el Principio de Balance Armónico e indicamos las ideas en que está basado. También resaltamos los puntos principales cuando este método es aplicado a sistemas controlables con saturación.

Aunque un estudio de sistemas planos generales tiene interés desde el punto de vista de Ecuaciones Diferenciales más que de Teoría de Control, en el capítulo 3 hemos aplicado el Método de Balance de Primer Armónico para estudiar sistemas planos donde el sistema no necesariamente es controlable y el origen no necesariamente es estable y obtenemos un diagrama de bifurcación de las órbitas periódicas en términos de un análisis de primer armónico. Una descripción de las regiones de atracción y las bifurcaciones sobre las regiones de atracción de sistemas controlables tri-dimensionales la hemos desarrollado en el capítulo 4. En particular conjeturamos una bifurcación que consiste en el rompimiento de una órbita periódica simétrica.

En el capítulo 5 explicamos qué tipo de controles de alta ganancia serán estudiados. Para ejemplificar la aplicación del método en sistemas sujetos a lo que hemos llamado 1a. parametrización de alta ganancia, hemos dedicado el capítulo 6 solamente a sistemas de control bidimensionales.

La generalización de los resultados del capítulo anterior a sistemas n -dimensionales la llevamos a cabo en el capítulo 7 apoyandonos en el Teorema de Hermite-Biehler

En el capítulo 8 mostramos condiciones suficientes para asegurar que un polinomio es Hurwitz y las aplicamos en el diseño de un control estabilizante de alta ganancia que cae dentro de lo que hemos llamado segunda parametrización de alta ganancia. Desde el punto de vista de una aproximación de primer armónico el control diseñado satisface que el sistema controlado no presenta órbitas periódicas.

Finalmente, presentamos las conclusiones en el capítulo 9.

Parte 1. Regiones de atracción y bifurcaciones de órbitas periódicas

Capítulo 1

Introducción

En esta parte de la tesis nos restringiremos a sistemas bidimensionales y tridimensionales, aunque algunos de estos resultados pueden ser generalizados al caso n -dimensional (ver Parte 2). Consideremos los siguientes sistemas:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\xi(t) \quad (1.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, (A, b) es un par controlable y la retroalimentación de estado $\xi = S(u)$ esta definida por la función de saturación

$$S(u) = \text{sat}(u) = \begin{cases} -1 & u \leq -1 \\ u & -1 < u < 1 \\ 1 & 1 \leq u \end{cases} \quad (1.2)$$

con $u(t) = k^T x(t)$ escogida de tal manera que $A + bk^T$ sea una matriz estable. Ya que $\sigma(A + bk^T) \subset \mathbb{C}^-$, el origen es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable de (1.1). Nuestro principal problema es estudiar la región de atracción del origen, denotada por $\Omega(0)$ y también las bifurcaciones.

En el caso de 2 dimensiones, recientemente [Alvarez *et al.*, 1993] se usaron métodos cualitativos para estudiar las bifurcaciones de la región de atracción del origen con respecto a los parámetros del control. Allí se estudió el comportamiento cualitativo de la region de atracción del origen $\Omega(0)$ en términos de los parámetros del sistema no controlado y también fue establecida la clasificación de los puntos de equilibrio de (1.1). Se mostró que si $\sigma(A) \cap \mathbb{C}^+ \neq \emptyset$, donde $\sigma(A)$ es el espectro de la matriz A , entonces el origen no es globalmente asintóticamente estable. Además, si $\text{traza}(A) > 0$, entonces podría aparecer una órbita periódica alrededor del origen tal que $\Omega(0)$ es un conjunto acotado. Fueron descritas bifurcaciones topológicas de $\Omega(0)$ tales como el paso de $\Omega(0)$ de un conjunto no acotado a un conjunto acotado a través de conexiones homo(hetero)-clínicas entre puntos de equilibrio de tipo silla cuando la matriz a lazo abierto

tiene un valor propio con parte real positiva y otro valor propio con parte real negativa y los parámetros del control cambian con la intención de reubicar solamente el valor propio con parte real positiva.

En un trabajo sobre sistemas n -dimensionales [Suárez *et al*, 1995], se continuó con la misma metodología del trabajo anterior y se dió una caracterización topológica de la región de atracción del origen (**RA**) para sistemas lineales con control lineal saturado. Para este fin, fue esencial el estudio del comportamiento dinámico sobre la frontera de la **RA**. En particular, se probó que la frontera es igual a la unión de las variedades estables de los elementos críticos (puntos de equilibrio y ciclos límite) sobre la frontera. Esto significa que si denotamos la frontera de la **RA** por $\partial\Omega(0)$, se satisface $\partial\Omega(0) = \cup W^s(\gamma_j)$ donde los γ_j son los elementos críticos en $\partial\Omega(0)$ los cuales están conectados al origen y $W^s(\gamma_j)$ son sus correspondientes variedades estables. Los resultados en [Suárez *et al*] específicamente para $n = 3$ son los siguientes: El número de valores propios con parte real positiva del sistema a lazo abierto, n_u , determina la forma de la **RA** de el origen. Si A es invertible y n_u es impar, entonces (1.1) tiene tres puntos de equilibrio, un atractor y dos puntos silla del tipo- n_u cuando $n_u = 1$, o uno atractor y dos repulsores cuando $n_u = 3$. Si A es invertible y $n_u = 0, 2$ o si $\det(A) = 0$, entonces (1.1) tiene solamente un punto de equilibrio el cual es un atractor. Para plantas completamente inestables ($\sigma(A) \subset \mathbb{C}^+$), se probó que la **RA** es acotada y homeomórfica a la bola unitaria. Para sistemas a lazo abierto estables, se probó que todas las trayectorias eventualmente tienden hacia algún conjunto compacto de volumen cero. Para el caso de sistemas con algunos valores propios con parte real positiva y otros con parte real negativa, resulta que una retroalimentación que sólo reubica los valores propios con parte real positiva, hace la **RA** homeomórfica a el producto de las **RA**s asociadas a las partes estable y estabilizada. En consecuencia, la **RA** del sistema a lazo cerrado es homeomórfica al cilindro $\mathbb{R}^{3-n_u} \times B^{n_u}$. Manteniendo fijos los valores propios reubicados, la estructura cilíndrica de la **RA** se mantiene bajo pequeños cambios en la ubicación de los valores propios estables a lazo abierto.

Regresemos ahora al caso bidimensional. En éste caso, la presencia de una órbita periódica inestable determinará la **RA**. Más precisamente, la órbita periódica será la frontera de la **RA**. De aquí la importancia

del estudio de las órbitas periódicas. Nótese que debido a la simetría con respecto al origen de la función S , también se encontrará una simetría en el retrato fase.

Estamos interesados en las órbitas periódicas del sistema (1). Si $\gamma(t)$ es una órbita periódica del sistema, diremos que es simétrica (no simétrica) si es simétrica (no simétrica) con respecto del origen. Entonces, debido a la simetría de la función S se tienen las siguientes consecuencias

a) Si $\gamma(t)$ es una órbita periódica, entonces $-\gamma(t)$ también es una órbita periódica. Por lo tanto el número de órbitas periódicas no simétricas es par.

b) Como $n = 2$, se puede ver que todas las órbitas periódicas contienen al origen en su interior. Entonces la unicidad en las soluciones implica que sólo existan órbitas periódicas simétricas. Esto es porque si $\gamma(t)$ es una órbita periódica no simétrica de $\dot{x}(t) = Ax(t) + b\xi(t)$, entonces a) implicaría que $-\gamma(t)$ también es una órbita periódica no simétrica. Ya que $n = 2$ esto implica que $\gamma(t)$ intersecta a $-\gamma(t)$, lo cual es una contradicción a la unicidad.

Como veremos en el capítulo 3, si $n = 2$, pero no se satisfacen las hipótesis de la controlabilidad ni de que $\sigma(A + bk^T) \subset C^-$, es decir que el origen sea un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable, entonces pueden existir órbitas periódicas no simétricas. Allí aplicaremos el método de balance de primer armónico para detectar éstas órbitas.

Para el caso de dimensión 3, el comportamiento de (1.1) es más complejo y tenemos que sí existen órbitas periódicas no simétricas, aunque el par (A, b) sea controlable y el origen sea un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable. En el capítulo 5 haremos éste análisis usando una aproximación de primer armónico.

El problema es estudiar órbitas periódicas para obtener información de la RA. Por ejemplo se puede ver que el conjunto de volumen cero que es un atractor en el caso $\sigma(A + bk^T) \subset C^-$ es precisamente una órbita periódica y el origen.

Capítulo 2

Predicción de órbitas periódicas

La primera sección estará dedicada al método de balance armónico en general y en la segunda sección trataremos éste método para el caso particular de sistemas controlables y considerando que la función no lineal es la función de saturación.

2.1 El método de balance armónico

Dado un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales, encontrar analíticamente una solución periódica, es en general un problema complicado. De aquí que en la práctica es útil contar con un método que proporcione un análisis aproximado, es decir un método que detecta la posible existencia o no de soluciones periódicas. *El Método de balance armónico* [Mees,1981] es un método que permite hacer este análisis aproximado. Las primeras investigaciones del método de balance armónico para el análisis de sistemas de control fueron reportadas en la década de los 40's [Goldfarb, 1947; Tustin, 1947; Dutilh, 1950; Kochenburger, 1950; Oppelt, 1948]. En [Andronov, 1937; Cap. IX, p. 583] se propone un método para la investigación de órbitas periódicas de ciertos sistemas y la idea que hay detrás de este método es esencialmente la misma en la que está basado el Método de Balance Armónico. Una exposición del Método de Balance Armónico puede encontrarse en varios libros [Aizerman, M. A., 1963; Mees, 1981; Vidyasagar, 1993].

A continuación exponemos las ideas en que se basa este método.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + b\eta(u) \\ u &= c^T x\end{aligned}\tag{2.1}$$

Donde A es una matriz cuadrada de $n \times n$, x, b son vectores en el espacio n -dimensional, $u = u(t)$ es una función real llamada control y $\eta : R \rightarrow R$ es una función continua no lineal.

Denotemos por $p = \frac{d}{dt}$. Dado $u(t) = c^T x(t)$, y tomando en cuenta el sistema a lazo cerrado $(A - pI)x(t) = -b\eta(u(t))$, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \det(A - pI)u(t) &= c^T \det(A - pI)x(t) \\ &= c^T \text{adj}(A - pI)(A - pI)x(t) \\ &= -c^T \text{adj}(A - pI)b\eta(u(t)) \end{aligned}$$

La ecuación $\det(A - pI)u(t) = -c^T \text{adj}(A - pI)b\eta(u(t))$ es una ecuación diferencial que gobierna el comportamiento dinámico de la señal $u(t)$. Esta ecuación acostumbra escribirse como:

$$u(t) = -W(p)\eta(u(t)) \quad (2.2)$$

donde $W(p) = c^T(A - pI)^{-1}b$ es conocida como la función de transferencia de la señal $\eta(u)$ a la señal u . De donde se obtiene que si el sistema (2.1) tiene una solución periódica $x(t)$, el sistema (2.2) también tendrá una solución periódica $c^T x(t)$. Equivalentemente, si el sistema (2.2) no tiene soluciones periódicas entonces el sistema (2.1) tampoco tendrá soluciones periódicas. De aquí que de alguna manera se pueden estudiar las soluciones periódicas del sistema (2.1) estudiando las soluciones periódicas del sistema (2.2).

Supongamos que el sistema (2.2) tiene una solución periódica de la forma

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_m \exp(im\omega t), \text{ con } \alpha_m = \bar{\alpha}_{-m}$$

y por lo tanto la función no lineal $\eta(u)$ admite una serie de Fourier de la forma

$$\eta(u(t)) = \sum_{-\infty}^{\infty} \beta_m \exp(im\omega t), \text{ con } \beta_m = \bar{\beta}_{-m}$$

Sustituyendo estas series en la ecuación (2.2) podemos obtener que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_m \exp(im\omega t) = - \sum_{-\infty}^{\infty} W(im\omega)\beta_m \exp(im\omega t) \quad (2.3)$$

Igualando coeficientes se llega a un sistema infinito de ecuaciones

$$\alpha_m + W(im\omega)\beta_m = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.4)$$

Resolver este sistema implica encontrar una solución periódica del sistema (2.2). Ahora tratemos este problema en términos de operadores. Sean

$$\begin{aligned}\mathcal{N} : L_2 \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right] &\rightarrow \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right] \text{ tal que } \mathcal{N}(f)(t) = \eta(f(t)) \text{ y} \\ \mathcal{D} : L_2 \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right] &\rightarrow \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right] \\ \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_m \exp(im\omega t) &\mapsto - \sum_{-\infty}^{\infty} W(im\omega) \gamma_m \exp(im\omega t)\end{aligned}$$

Entonces encontrar una solución periódica del sistema (2.2) es equivalente a encontrar un punto fijo del operador $\mathcal{D} \circ \mathcal{N}$.

Por otra parte, es conocido que $1 + W(s) = \frac{\det(A + bc^T - sI)}{\det(A - sI)}$ [Barnet & Cameron, 1985; ver también 2.2.1 de esta tesis]. Esto implica que $W(s)$ es una función racional para la cual el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Por lo tanto $W(i\omega) \rightarrow 0$ cuando ω es muy grande (se dice que W es un filtro pasa bajos). De aquí que dada una función $g \in L_2$, el operador \mathcal{D} tiene el efecto de atenuar los armónicos mayores de g , de donde surge la idea de pensar que resolver (2.4) sólo para $m = 0$ y $m = \pm 1$ puede proporcionar en ciertos casos una buena aproximación. Esto proporciona una técnica que en teoría de control es conocida como Método de Balance de Primer Armónico.

Bajo estas ideas el método plantea suponer que la ecuación (2.2) tiene una solución periódica la cual puede ser aproximada como una solución de primer armónico de la forma:

$$u_0(t) = \alpha_0 + a \sin \omega t, \quad a, \omega > 0$$

y asumir que la función no lineal $\eta(u_0(t))$ admite una serie de Fourier $\eta(u_0(t)) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \sin l\omega t$ [Mees, 1981]. Tomando en cuenta solamente los primeros 2 términos (aproximación del primer armónico), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\alpha_0 + W(0)F_\eta(a, \alpha_0) = 0 \tag{2.5}$$

$$1 + W(i\omega)G_\eta(a, \alpha_0) = 0 \tag{2.6}$$

donde

$$F_{\eta}(a, \alpha_0) = \beta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\alpha_0 + a \sin \theta) d\theta \quad (2.7)$$

$$G_{\eta}(a, \alpha_0) = \frac{\beta_1}{a} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \eta(\alpha_0 + a \sin \theta) \sin \theta d\theta \quad (2.8)$$

Para estudiar las órbitas periódicas simétricas debemos poner $\alpha_0 = 0$. Observar que $\beta_0 = F_{\eta}(a, 0) = 0$. Entonces el método se traduce en resolver solamente la ecuación

$$1 + W(i\omega)N_{\eta}(a) = 0 \quad (2.9)$$

donde

$$N_{\eta}(a) = \frac{\beta_1}{a} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \eta(a \sin \theta) \sin \theta d\theta \quad (2.10)$$

El método de balance de primer armónico consiste en encontrar las soluciones α_0 y $a, \omega > 0$ a (2.5)-(2.6) ((2.9) si $\alpha_0 = 0$). Las soluciones obtenidas $u_0(t) = \alpha_0 + a \sin \omega t$ son llamadas *órbitas periódicas del primer armónico* de (2.2). Si $\alpha_0 = 0$ ($\alpha_0 \neq 0$) la órbita periódica correspondiente es *simétrica* (no *simétrica*). En tal caso es suficiente con estudiar la ecuación (2.9). Ya que $W(j\omega)$ es un número complejo, la expresión (2.9) consiste de 2 ecuaciones independientes y deben ser resueltas con respecto a a y ω para tener los parámetros que definen las soluciones periódicas aproximadas en la forma $u_0(t) = a \sin \omega t$. El coeficiente real $N_{\eta}(a)$ es llamado la *función descriptora* asociada a la función no lineal $\eta(\cdot)$ y en éste caso el método de balance armónico también es conocido como el *Método de la función descriptora* [Mees, 1981; Vidyasagar, 1993].

Existen algunos criterios para asegurar que la existencia (no existencia) de una órbita periódica desde el punto de vista del primer armónico implica la existencia (no existencia) de una auténtica órbita periódica del sistema (2.1)[Mees, 1975; Mees, 1981; Vidyasagar, 1993].

Desafortunadamente no existen criterios que garanticen que la existencia de una órbita periódica según la aproximación de primer armónico sea equivalente a la existencia de una auténtica órbita periódica.

Concluimos este capítulo con algunos comentarios. Como se ha dicho, cuando obtenemos una órbita periódica PA esta no necesariamente corresponde a una auténtica órbita periódica. De aquí que el Método de la Función Descriptora debe verse como una herramienta útil para obtener información acerca de las posibles soluciones periódicas de un sistema de ecuaciones diferenciales, que en términos generales es un problema no resuelto.

Cuando se estudia un sistema uno debe decidir si para este sistema particular es adecuado utilizar el Método de Balance de Primer Armónico. Una vez obtenida la información debe analizarse para seleccionar la que puede ser correcta o no de acuerdo a un conocimiento previo del problema. También puede compararse la información con resultados obtenidos de simulaciones numéricas o de otros análisis de tipo cualitativo.

2.2 El Método de Balance de Primer Armónico en Sistemas Controlables con Saturación

2.2.1 Una forma canónica y una expresión para la función de transferencia

Ya que en la mayor parte de la tesis trabajaremos con sistemas controlables, en seguida hacemos precisa la definición de controlabilidad.

Consideremos el sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Donde A es una matriz real de $n \times n$, B es una matriz real de $n \times m$ y C es una matriz real de $p \times n$. A u la llamamos función de control y a y la salida del sistema.

Dada $u(t)$ denotamos por $\varphi(t, 0, u)$ la correspondiente solución del sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ tal que $\varphi(0, 0, u) = 0$.

Definición 2.1. Decimos que \bar{x} es alcanzable desde el origen si existe un control u y un valor \bar{t} tal que $\varphi(\bar{t}, 0, \bar{u}) = \bar{x}$.

Denotemos por \mathfrak{R}_0 al conjunto de estados alcanzables desde el origen.

Si $\mathfrak{R}_0 = \mathbb{R}^n$, decimos que el par (A, B) es controlable.

Ahora denotemos $\mathfrak{R}_1 = \text{imagen de } B \text{ y } \langle A | \mathfrak{R}_1 \rangle = B + AB + \dots + A^{n-1}B$. Entonces se tiene la igualdad $\mathfrak{R}_0 = \langle A | \mathfrak{R}_1 \rangle$. De aquí que podemos decir que el par (A, B) es controlable si y solo si $\langle A | \mathfrak{R}_1 \rangle = \mathbb{R}^n$ [Wonham, 1985].

Para sistemas $\dot{x} = Ax + bu$ de una sola entrada que son controlables, existen formas canónicas que simplifican las operaciones que haremos en este trabajo. Cuando el par (A, b) es controlable, entonces (A, b) puede ser escrito en la siguiente forma canónica [Barnett and Cameron, 1985]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Es decir, si $y = x_1$, el par (A, b) en (3.1) induce la ecuación diferencial $y^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_i y^{(n-i)} = u$. Por lo tanto, el sistema a lazo abierto $\dot{x} = Ax$ depende solamente de los n parámetros $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Así el polinomio $P_0(s) = s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{n-i}$ es el polinomio característico del sistema a lazo abierto $\dot{x} = Ax$. El vector de ganancias $K^T \in \mathbb{R}^n$ está dado por como $K_i = a_{n-i} - d_{n-i}$, $1 \leq i \leq n$, donde los d_i 's son escogidos de tal manera que el polinomio $P_c(s) = s^n + \sum_{i=1}^n d_i s^{n-i}$ sea Hurwitz. De esta manera, la matriz a lazo cerrado $A_c = A + bK^T$ es Hurwitz y su polinomio característico es $P_c(s)$.

La función de transferencia definida en la sección anterior, puede ser expresada en términos del polinomio a lazo cerrado y del polinomio a lazo abierto. Más precisamente, tenemos el siguiente lema:

Lema 2.1. [Barnett & Cameron, 1985]. Si s no es un eigenvalor de A y h es un número real entonces $1 + hW(s) = \frac{\det(A + hbc^T - sI)}{\det(A - sI)}$.

Antes de hacer la demostración del Lema 2.1, hacemos 2 observaciones.

Observación 2.1. Si h es un número real, G es una matrix real de $n \times n$ y $b, c \in R^n$ entonces

$$\text{traza}(Ghbc^T) = hc^T Gb.$$

Demostración.

$$\text{traza}(Ghbc^T) = \text{traza}(Gh(bc_1, bc_2, \dots, bc_n)) = G_1 hbc_1 + G_2 hbc_2 + \dots + G_n hbc_n$$

$$h(c_1 G_1 b + \dots + c_n G_n b) = h(c_1, c_2, \dots, c_n) \begin{pmatrix} G_1 b \\ \dots \\ G_n b \end{pmatrix} = hc^T Gb \blacksquare$$

Observación 2.2. $1 + \text{traza}(dc^T) = \det(I + dc^T)$ para todo $d, c \in R^n$.

Demostración. La observación se sigue de inmediato. Supongamos que $d \neq 0$, entonces existe B invertible tal que $Bd = e = (1, 0, \dots, 0)^T$. Denotemos $a^T = c^T B^{-1}$ y $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, entonces $c^T B^{-1} = a^T$ y $c^T = a^T B$. Por lo tanto se siguen las siguientes desigualdades

$$1 + \text{traza}(dc^T) = 1 + \text{traza}(B^{-1}ec^T) = 1 + \text{traza}(B^{-1}ea^T B) = 1 + \text{traza}(ea^T) = 1 + a_1$$

Por otra parte

$$\det(I + dc^T) = \det(I + B^{-1}ea^T B) \det(B^{-1}[I + ea^T]B) = \det(I + ea^T) = 1 + a_1$$

De donde se concluye que $1 + \text{traza}(dc^T) = \det(I + dc^T)$. \blacksquare

Demostración del Lema 2.1. Tomando $G = (A - sI)^{-1}$, por observación 1 se tiene que

$$1 + hc^T(A - sI)^{-1}b = 1 + \text{traza}[(A - sI)^{-1}hbc^T]. \text{ Por observación 2 tenemos que}$$

$$1 + \text{traza}[(A - sI)^{-1}hbc^T] = \det[I + (A - sI)^{-1}hbc^T]. \text{ De donde se siguen las siguientes igualdades}$$

$$\begin{aligned} 1 + hW(s) &= 1 + hc^T(A - sI)^{-1}b = \det[I + (A - sI)^{-1}hbc^T] = \det[(A - sI)^{-1}(A - sI + hbc^T)] = \\ &= \det(A - sI)^{-1} \det(A - sI + hbc^T) = \frac{\det(A + hbc^T - sI)}{\det(A - sI)}. \blacksquare \end{aligned}$$

2.2.2 El metodo de balance armónico en sistemas con saturación

En un trabajo reciente, Llibre y Ponce [1996] utilizaron el principio de balance armónico (**PBA**) para describir la dinámica de sistemas de control en dos y tres dimensiones que están sujetos a retroalimentaciones de estado con saturación estabilizantes. En éstos trabajos se puede encontrar una descripción

completa de bifurcaciones de puntos de equilibrio y órbitas periódicas de primer armónico simétricas (con respecto al origen), encontrándose una gran variedad de comportamientos dinámicos. Aunque el método del **PBA** es aproximado y no muy riguroso, es usado con frecuencia para detectar órbitas periódicas de sistemas no lineales [Mees, 1981]. En el capítulo 8 [ver también Aguirre *et al.*, 1997] mostramos que el método del **PBA** puede hacer predicciones razonablemente ciertas, en este caso predicciones acerca de comportamientos asintóticos en sistemas de control lineales sujetos a retroalimentación de estado con saturación de alta ganancia. Sin embargo, nuestros resultados deben ser vistos como resultados previos al estudio mediante métodos rigurosos de las bifurcaciones desplegadas por los sistemas de control. También algunos casos especiales de sistemas lineales por pedazos, como el modelo del circuito de Chua han sido estudiados usando métodos rigurosos [Chua *et al.*, 1986; Chua & Tichonicky, 1991]. Estos resultados sobre la dinámica de tales sistemas fueron obtenidos calculando mapeos de Poincaré, los cuales usualmente son muy difíciles de obtener en casos generales.

Para el caso particular en que la función no lineal es la función de saturación \mathcal{S} las funciones $F_\eta(a, \alpha_0)$ y $G_\eta(a, \alpha_0)$ las denotamos simplemente como $F(a, \alpha_0)$ y $G(a, \alpha_0)$ respectivamente. Estas funciones están definidas en términos de ciertas integrales, las cuales pueden ser obtenidas usando métodos elementales de integración y éstos cálculos pueden ser consultados en el apéndice. Se deben estudiar separadamente 6 casos:

$$c_1) \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a} \leq -1,$$

$$F(a, \alpha_0) = 1, \quad G(a, \alpha_0) = 0.$$

$$c_2) \frac{-1-\alpha_0}{a} \leq -1 < \frac{1-\alpha_0}{a} < 1,$$

$$F(a, \alpha_0) = \frac{1}{2}(1 + \alpha_0) - \frac{(1-\alpha_0)}{\pi} \sin^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a} - \frac{a}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2},$$

$$G(a, \alpha_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\sin^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a} + \frac{(1-\alpha_0)}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2} \right).$$

$$c_3) -1 < \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a} < 1,$$

$$F(a, \alpha_0) = \frac{1+\alpha_0}{\pi} \sin^{-1} \frac{1+\alpha_0}{a} - \frac{1-\alpha_0}{\pi} \sin^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a} + \frac{a}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} - \frac{a}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2},$$

$$G(a, \alpha_0) = \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{1+\alpha_0}{a} + \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a} + \frac{1+\alpha_0}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} + \frac{1-\alpha_0}{a\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2}.$$

$$c_4) \frac{-1-\alpha_0}{a} \leq -1 < 1 \leq \frac{1-\alpha_0}{a},$$

$$F(a, \alpha_0) = \alpha_0, \quad G(a, \alpha_0) = 1.$$

$$c_5) -1 < \frac{-1-\alpha_0}{a} < 1 \leq \frac{1-\alpha_0}{a}$$

$$F(a, \alpha_0) = -\frac{1}{2}(1 - \alpha_0) + \frac{(1+\alpha_0)}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right) + \frac{a}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2},$$

$$G(a, \alpha_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\sin^{-1} \frac{1+\alpha_0}{a} + \frac{1+\alpha_0}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} \right).$$

$$c_6) 1 \leq \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a}.$$

$$F(a, \alpha_0) = 1, \quad G(a, \alpha_0) = 0.$$

En caso de que nuestro estudio sea acerca de órbitas periódicas simétricas y al igual que anteriormente la función no lineal η sea la función de saturación entonces a la función $N_\eta(a)$ la denotaremos simplemente por $N(a)$ y su valor está dado por

$$N(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq a \leq 1 \\ \frac{2}{\pi} \left(\arcsin(1/a) + \frac{1}{a} \sqrt{1 - 1/a^2} \right) & \text{si } a > 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

Notar que $N(a)$ está definida sólo para $a > 0$, decreciendo para $a > 1$ y además satisface $0 < N(a) \leq 1$. Una órbita periódica del primer armónico correspondiente a $(\tilde{a}, \tilde{\omega})$ es estable (inestable) si [Mees, 1981; Llibre y Ponce, 1995]

$$\frac{d}{d\omega} \text{Im}(W(j\omega)) \Big|_{\omega=\tilde{\omega}} > 0 (< 0) \quad (2.13)$$

De aquí que, checando el signo de la parte imaginaria de la función de transferencia $W(p)$ en los puntos de intersección dados por (2.9), puede ser establecida la estabilidad de la órbita periódica del primer armónico.

2.2.3 Información Geométrica del método de balance del primer armónico

Para tener una presentación completa del método de balance armónico, a continuación estudiamos la geometría de las órbitas periódicas **PA**. Si la tripleta $(a, \omega, \alpha_0) \in \mathbb{R}_+^n$ satisface las ecuaciones de balance armónico de primer orden, entonces considerando la aproximación $\sigma(u(t)) \cong \beta_0 + \beta_1 \sin(\omega t)$, la órbita periódica **PA** correspondiente al sistema original (2.1) puede ser obtenida buscando la solución particular del sistema lineal $\dot{x} = Ax + b[\beta_0 + \beta_1 \sin \omega t]$, lo cual es equivalente a resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} x_1}{dt^{n-2}} + \dots + a_n x_1 = \beta_0 + \beta_1 \sin \omega t.$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, vemos que

$$x_1(t) = \frac{\beta_0}{a_n} + A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

donde para $n = 2m$, A y B quedan definidas como:

$$A = \frac{\beta_1 [a_{2m} - a_{2m-2}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1} a_2 \omega^{2(m-1)} + (-1)^m \omega^{2m}]}{C(\omega^2)}$$

$$B = \frac{-\beta_1 \omega [a_{2m-1} - a_{2m-3}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1} a_1 \omega^{2(m-1)}]}{C(\omega^2)}$$

y $C(\omega^2)$ es el siguiente polinomio

$$[a_{2m} - a_{2m-2}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1} a_2 \omega^{2(m-1)} + (-1)^m \omega^{2m}]^2 + \omega^2 [a_{2m-1} - a_{2m-3}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1} a_1 \omega^{2(m-1)}]^2$$

Y para $n = 2m + 1$, A y B quedan definidas como:

$$A = \frac{\beta_1 [a_{2m+1} - a_{2m-1}\omega^2 + \dots + (-1)^m a_1 \omega^{2m}]}{C(\omega^2)}$$

$$B = \frac{-\beta_1 \omega [a_{2m} - a_{2m-2}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1} a_2 \omega^{2(m-1)} + (-1)^m \omega^{2m}]}{C(\omega^2)}$$

y $C(\omega^2)$ es el siguiente polinomio

$$[a_{2m+1} - a_{2m-1}\omega^2 + \dots + (-1)^m a_1 \omega^{2m}]^2 + \omega^2 [a_{2m} - a_{2m-2}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1} a_2 \omega^{2(m-1)} + (-1)^m \omega^{2m}]^2$$

De aquí que si a_n no es cero, se ve que las coordenadas del vector (x_1, x_2, \dots, x_n) satisfacen las relaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x_1 - \frac{\beta_0}{\omega^n})^2}{A^2 + B^2} + \frac{x_2^2}{\omega^2(A^2 + B^2)} = 1 \\ \frac{x_2^2}{\omega^2(A^2 + B^2)} + \frac{x_3^2}{\omega^4(A^2 + B^2)} = 1 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{x_{n-1}^2}{\omega^{2(n-2)}(A^2 + B^2)} + \frac{x_n^2}{\omega^{2(n-1)}(A^2 + B^2)} = 1 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Estas relaciones nos serán de gran utilidad más adelante, pues veremos que para ciertos sistemas de control con un parámetro de alta ganancia δ los números $A^2 + B^2, \omega^2(A^2 + B^2), \dots, \omega^{2(n-1)}(A^2 + B^2)$ aparecerán como funciones de δ y cumplirán la siguiente propiedad asintótica:

$A^2(\delta) + B^2(\delta), \omega^2(\delta)[A^2(\delta) + B^2(\delta)], \dots, \omega^{2(n-1)}(\delta)[A^2(\delta) + B^2(\delta)]$ convergen a cero cuando $\delta \rightarrow \infty$. Lo cual indica que las órbitas de primer armónico se contraen al origen cuando el parámetro δ es incrementado.

Capítulo 3

Sistemas en el plano

Considérense los siguientes sistemas:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\xi(t) \quad (3.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$, $b \in \mathbb{R}^2$, y la retroalimentación de estado $\xi = S(u)$ esta definida por la función de saturación

$$S(u) = \begin{cases} -1 & u \leq -1 \\ u & -1 < u < 1 \\ 1 & 1 \leq u \end{cases}$$

con $u(t) = k^T x(t)$ de tal manera que $A + bk^T$ es la matriz a lazo cerrado.

Debido a que para sistemas en el plano es factible analizar todos los casos (aún cuando algunos sólo tienen interés en sistemas dinámicos y no en sistemas de control) en este capítulo no supondremos la controlabilidad del sistema ni la estabilidad en el origen del mismo y lo único que pediremos es que la traza del sistema a lazo abierto sea diferente de cero, lo cual implica que el sistema a lazo abierto no tiene valores propios imaginarios puros. Daremos una descripción completa de todos los casos posibles desde el punto de vista de una aproximación del primer armónico. Mostraremos que nuestros resultados (que son aproximados) coinciden con los obtenidos por Teruel [1997].

3.1 Información del Método de balance del primer armónico

Denotemos por D y T al determinante y la traza, respectivamente de la matriz $A + bk^T$ y denotemos por d y τ al determinante y la traza, respectivamente de la matriz A . Solamente pediremos que τ sea diferente de cero.

De la exposición del método de balance del primer armónico (capítulo 3) sabemos que

$$1 + W(i\omega) = 1 - \frac{1}{G(a, \alpha_0)}$$

y de la proposición A.4 sabemos que $1 - \frac{1}{G(a, \alpha_0)} \in (-\infty, 0]$. Así que podemos escribir

$$1 + W(i\omega) = r, \text{ con } r \in \mathbb{R}, r \leq 0.$$

Por otra parte, si s no es un valor propio de A se satisface la identidad [Barnett & Cameron, 1985]

$$1 + W(s) = \frac{\det(A + bc^T - sI)}{\det(A - sI)} \quad (3.2)$$

Entonces $1 + W(i\omega) = \frac{D - \omega^2 - T\omega i}{d - \omega^2 - \tau\omega i} = r$. Lo cual implica que

$$\begin{aligned} D - \omega^2 &= (d - \omega^2)r \\ T &= \tau r \end{aligned} \quad (3.3)$$

Resolviendo para r y ω se tiene

$$\omega^2 = \frac{D\tau - dT}{\tau - T} \quad (3.4)$$

$$r = \frac{T}{\tau} \quad (3.5)$$

así que las soluciones (r, ω^2) de las últimas dos ecuaciones están asociadas a las soluciones (a, ω, α_0) de (2.5) y (2.6) (o (2.9) cuando $\alpha_0 = 0$).

3.2 Órbitas periódicas simétricas del primer armónico

Como un corolario directo de las ecuaciones (2.9) y (3.4)-(3.5) obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.1. Considerar el sistema (4.1). Entonces existe una única órbita periódica simétrica del primer armónico si y sólo si $\frac{D\tau - dT}{\tau - T} > 0$ y $\frac{T}{\tau} < 0$. En tal caso $\omega^2 = \frac{D\tau - dT}{\tau - T}$ y $a = N^{-1}\left(\frac{t}{\tau - T}\right)$.

Demostración. Por las ecuaciones (3.4) y (3.5) es necesario que $\frac{D\tau - dT}{\tau - T} > 0$ y $\frac{T}{\tau} < 0$. Por otra parte, si $\frac{D\tau - dT}{\tau - T} > 0$ y $\frac{T}{\tau} < 0$ entonces $\frac{\tau}{\tau - T} = \frac{1}{1 - \frac{T}{\tau}} > 0$ y por lo tanto la pareja formada por $\omega = \sqrt{\frac{D\tau - dT}{\tau - T}}$ y $a = N^{-1}\left(\frac{\tau}{\tau - T}\right)$ es la única solución de la ecuación (2.9). ■

En caso de existir una órbita periódica, es de interés conocer su estabilidad. La siguiente proposición presenta un criterio para la estabilidad.

Proposición 3.2. Considerar el sistema (4.1). Sean D y T el determinante y la traza del sistema a lazo cerrado y sean d y τ el determinante y la traza del sistema a lazo abierto. Si existe una órbita periódica del primer armónico con $a = \tilde{a}$ y $\omega = \tilde{\omega}$, entonces se cumple lo siguiente:

a) la órbita es radialmente inestable si y sólo si $D\tau - dT > 0$.

b) la órbita es radialmente estable si y sólo si $D\tau - dT < 0$.

Demostración. De la proposición 3.1 se sigue que $\tilde{\omega}^2 = \frac{D\tau - dT}{\tau - T}$ y $\tilde{a} = N^{-1}(\frac{\tau}{\tau - T})$. También podemos ver que

$$ImW(i\omega) = \frac{\omega[(D\tau - dT) - (\tau - T)\omega^2]}{(d - \omega^2)^2 + \tau^2\omega^2}$$

Entonces

$$\frac{d}{d\omega} ImW(i\omega) \Big|_{\tilde{\omega}} = \frac{-4(D\tau - dT)}{[(d - \tilde{\omega})^2 + \tau^2\tilde{\omega}^2]^2}$$

de aquí obtenemos

$$\text{sign} \left[\frac{d}{d\omega} ImW(i\omega) \Big|_{\omega=\omega_-} \right] = -\text{sign}[D\tau - dT].$$

Esta última igualdad implica que la estabilidad radial de la órbita interna esta determinada por $D\tau - dT$.

Por lo tanto la órbita es radialmente inestable si $D\tau - dT > 0$ y es radialmente estable cuando $D\tau - dT < 0$, lo que demuestra la proposición. ■

Podemos construir el diagrama de bifurcación del primer armónico usando el siguiente teorema (ver Tabla 3.1).

Teorema 3.1. Considerar el sistema (4.1). Sean D y T el determinante y la traza del sistema a lazo cerrado y sean d y τ el determinante y la traza del sistema a lazo abierto. Se cumplen los siguientes incisos:

a) cuando $T < 0$ y $D > 0$ (origen estable) se tiene que:

(existe una única órbita periódica simétrica del primer armónico y esta es inestable) si y sólo si

$$(\tau > 0 \text{ y } d > \frac{\tau}{T}D).$$

b) cuando $T > 0$ y $D > 0$ (origen inestable) se tiene que:

(existe una única órbita periódica simétrica del primer armónico y esta es estable) si y sólo si
 $(\tau < 0 \text{ y } d > \frac{\tau}{T}D)$.

c) cuando $T < 0$ y $D < 0$ (el origen es un punto silla) se tiene que:

(existe una única órbita periódica simétrica del primer armónico y esta es inestable) si y sólo si
 $(\tau > 0 \text{ y } d > \frac{\tau}{T}D)$.

d) cuando $T > 0$ y $D < 0$ (el origen es un punto silla) se tiene que:

(existe una única órbita periódica simétrica del primer armónico y esta es estable) si y sólo si
 $(\tau < 0 \text{ y } d > \frac{\tau}{T}D)$.

Demostración. Los cuatro incisos son muy similares, así que sólo probaremos el primero. Supongamos que $T < 0$ y $D > 0$, por la Proposición 3.1 existe una única órbita periódica del primer armónico si y sólo si $\frac{D\tau - dT}{\tau - T} > 0$ y $\frac{T}{\tau} < 0$. Como $T < 0$ entonces $\tau > 0$ y $\tau - T > 0$. De aquí que $D\tau - dT > 0$, de donde se obtiene $D > 0$ por lo que $d > \frac{\tau}{T}D$. De la proposición 3.2 se sigue que tal órbita es inestable. ■

3.3 Órbitas periódicas no simétricas del primer armónico

Para hacer el análisis de existencia de órbitas periódicas **PA** no simétricas es necesario considerar por separado los 6 diferentes casos en que están divididas las funciones $F(a, \alpha_0)$ y $G(a, \alpha_0)$ (ver Apéndice). Primero descartamos algunos casos.

Proposición 3.3. Para los Casos c_1 , c_4 y c_6 no existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico.

Demostración. Para el Caso c_1 las ecuaciones (2.5)-(2.6) corresponden a $\alpha_0 + W(0) = 0$ y $1 = 0$. Para el caso c_6 corresponden a $\alpha_0 - W(0) = 0$ y $1 = 0$. En el Caso c_4 las ecuaciones son $\alpha_0 + W(0)\alpha_0 = 0$ y $1 + W(i\omega) = 0$. Ya que $\alpha_0 \neq 0$, entonces $1 + W(0) = 0$ pero por otra parte, $1 + W(0) = \frac{(0)^2 - T(0) + D}{(0)^2 - \tau(0) + d} = \frac{D}{d}$, entonces $D = 0$. De la ecuación (3.2) obtenemos que $1 + W(i\omega) = \frac{D - \omega^2 - T\omega i}{d - \omega^2 - \tau\omega i} = 0$, de aquí que $D - \omega^2 = 0$ y $T = 0$, pero como $D = 0$ entonces $\omega = 0$,

esto es una contradicción pues nosotros buscamos $\omega > 0$, de aquí que no existan órbitas periódicas no simétricas del primer armónico para estos casos. ■

Observación 3.1. Ya que la proposición anterior descarta que existan órbitas no simétricas con (a, α_0) satisfaciendo los casos \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_4 y \mathbf{c}_6 , en adelante sólo nos dedicaremos a estudiar los casos \mathbf{c}_2 , \mathbf{c}_3 y \mathbf{c}_5 . Obsérvese que en el caso 3 se satisface que $F(a, -\alpha_0) = -F(a, \alpha_0)$ y $G(a, \alpha_0) = G(a, -\alpha_0)$. Y para \mathbf{c}_2 y \mathbf{c}_5 se cumple la siguiente relación: para $\alpha_0 > 0$, $F_{\mathbf{c}_5}(a, -\alpha_0) = -F_{\mathbf{c}_2}(a, \alpha_0)$ y $G_{\mathbf{c}_5}(a, -\alpha_0) = G_{\mathbf{c}_2}(a, \alpha_0)$. En otras palabras, la simetría del retrato fase reduce el problema a encontrar una solución satisfaciendo $\alpha_0, a > 0$. De tal manera que tanto $u(t) = \alpha_0 + a \sin \omega t$ como $u(t) = -\alpha_0 + a \sin \omega t$ determinan órbitas periódicas del primer armónico. De aquí que es suficiente estudiar el caso 2 de las integrales y el caso 3 con $\alpha_0 > 0$.

Lema 3.1. Consideremos el sistema (3.1) y sea $(a^*, \alpha_0^*, \omega^*)$ tal que (a^*, α_0^*) satisface \mathbf{c}_2 o \mathbf{c}_3 está en el caso 2 de integrales o está en el caso 3 de integrales y $\alpha_0^* > 0$. Si $(a^*, \alpha_0^*, \omega^*)$ satisfacen las ecuaciones (2.5) y (2.6) entonces $\frac{D}{d} < 0$ y $\frac{T}{\tau} < 0$.

Demostración: Ya que $W(0) = \frac{D-d}{d}$, de (2.5) tenemos $\alpha_0^* + \frac{D-d}{d} F(a^*, \alpha_0^*) = 0$.

De aquí que $-\frac{D}{d} = \left(\frac{\alpha_0^*}{F(a^*, \alpha_0^*)} - 1 \right)$. Como $\frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)} - 1 > 0$ (ver Proposición A3), se sigue que $\frac{D}{d} < 0$.

Por otra parte, para los casos \mathbf{c}_2 y \mathbf{c}_3 se cumple que $1 - \frac{1}{G(a, \alpha_0)} \in (-\infty, 0)$, de aquí que tiene que satisfacerse que $r = \frac{T}{\tau} < 0$. ■

Definición 3.1. Consideremos la función $F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0)$. Definamos los conjuntos

$$J_2^+ = \{(a, \alpha_0) : F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0) > 0 \text{ y } (a, \alpha_0) \text{ satisface } \mathbf{c}_2\}$$

$$J_3^+ = \{(a, \alpha_0) : F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0) > 0 \text{ y } (a, \alpha_0) \text{ satisface } \mathbf{c}_3 \text{ y } \alpha_0 > 0\}$$

$$J_2^- = \{(a, \alpha_0) : F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0) < 0 \text{ y } (a, \alpha_0) \text{ satisface } \mathbf{c}_2\}$$

$$J_3^- = \{(a, \alpha_0) : F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0) < 0 \text{ y } (a, \alpha_0) \text{ satisface } \mathbf{c}_3 \text{ y } \alpha_0 > 0\}$$

$$J^+ = J_2^+ \cup J_3^+$$

$$J^- = J_2^- \cup J_3^-.$$

Notese que por lema A.7 $J^+ \neq \emptyset$ y $J^- \neq \emptyset$.

Lema 3.2. Consideremos el sistema (3.1) y sean (a, α_0, ω) tal que (a, α_0) satisfacen \mathbf{c}_2 o \mathbf{c}_3 y $\alpha_0 > 0$. Si (a, α_0, ω) satisfacen las ecuaciones (2.5) y (2.6) entonces

a) si $d < 0 \Rightarrow (a, \alpha_0) \in J^-$

b) si $d > 0 \Rightarrow (a, \alpha_0) \in J^+$

Demostración. Como $\omega^2 = \frac{D\tau - dT}{r - T}$ entonces $\omega^2 = \frac{d(\frac{D}{d} - \frac{T}{r})}{1 - \frac{T}{r}}$, pero ya que $\frac{D}{d} = 1 - \frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)}$ y $\frac{T}{r} = r = 1 - \frac{1}{G(a, \alpha_0)}$, resulta entonces que $\omega^2 = \frac{d(F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0))}{F(a, \alpha_0)}$. Como $F(a, \alpha_0) > 0$ (ver proposición A.2) de aquí concluimos que d y $F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0)$ tienen el mismo signo. ■

Observación 3.2. Tomemos $d < 0$ y $D > 0$. Puede verse que cuando $Dd < 0$ entonces existen 3 puntos de equilibrio. En caso de existir una órbita periódica no simétrica esta no encierra al origen ya que por la simetría del retrato fase existiría otra órbita periódica no simétrica y cada una sería simétrica a la otra, entonces se cortarían, contradiciendo la unicidad de las soluciones. Por lo tanto una órbita no simétrica encierra solamente a un punto de equilibrio diferente del origen. Tomando en cuenta esta información hagamos una discusión desde el punto de vista del primer armónico en el caso en que $d < 0$. Por el Lema 3.2, las posibles soluciones (a, α_0, ω) de las ecuaciones (2.5) y (2.6) las podemos dividir como (a, α_0, ω) tal que $(a, \alpha_0) \in J^-$ y como (a, α_0, ω) tal que $(a, \alpha_0) \in J^+$. Por la proposición A.7 obsérvese que si $(a, \alpha_0) \in J^-$ entonces α_0 puede ser tomada arbitrariamente pequeña (ver figura 3.1). Sea $(a^*, \alpha_0^*) \in J^-$ y α_0^* pequeña y sean T^*, t^*, D^*, d^* tales que $\frac{D^*}{d^*} = \left(1 - \frac{\alpha_0^*}{F(a^*, \alpha_0^*)}\right)$ y $\frac{T^*}{t^*} = \left(1 - \frac{1}{G(a^*, \alpha_0^*)}\right)$; entonces definiendo ω^* como $\omega^* = \sqrt{\frac{D^* t^* - d^* T^*}{t^* - T^*}}$ se ve que $(a^*, \alpha_0^*, \omega^*)$ es solución de las ecuaciones (2.5) y (2.6). Esto significa que existen parametros T^*, t^*, D^*, d^* para los cuales existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico dadas por $u(t) = \alpha_0^* + a^* \text{sen} \omega^* t$ con α_0^* arbitrariamente pequeño. Esto puede ser interpretado como que estas órbitas casi son simétricas o que se originan de una órbita simétrica por medio de una bifurcación. Este fenómeno no puede ocurrir en el plano. Así que no creemos que se estén prediciendo verdaderas órbitas periódicas cuando se toma $(a, \alpha_0) \in J^-$, así que cuando $(a, \alpha_0) \in J^-$ el método de balance armónico posiblemente esté prediciendo los puntos de equilibrio.

Definición 3.2. Sean R_2 y R_3 los siguientes conjuntos $R_2 = \{(a, \alpha_0) : (a, \alpha_0) \text{ satisfacen } \mathbf{c}_2\}$
 $R_3 = \{(a, \alpha_0) : (a, \alpha_0) \text{ satisfacen } \mathbf{c}_3 \text{ y } \alpha_0 > 0\}$ y $R = R_2 \cup R_3$. Definimos la función $H : R \rightarrow \mathbb{R}^2$
 como $H(a, \alpha_0) = \left(\frac{T}{1 - \frac{1}{\sigma(a, \alpha_0)}}, \frac{D}{1 - \frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)}} \right)$.

Teorema 3.2. Consideremos el sistema (3.1). Dados D y T , el método de Balance Armónico predice 2 órbitas periódicas no simétricas si y sólo si se cumple alguno de los siguientes incisos:

- a) $D < 0, d > 0, T < 0, \tau > 0$ y $(\tau, d) \in \text{imagen de } H$.
- b) $D < 0, d > 0, T > 0, \tau < 0$ y $(\tau, d) \in \text{imagen de } H$.

Demostración. \Rightarrow Sean T, τ, D, d parámetros dados y sea $(a^*, \alpha_0^*, \omega^*)$ solución de las ecuaciones (2.5) y (2.6). Entonces de la prueba del Lema 3.1 es inmediato que $(\tau, d) \in \text{imagen de } H$ y que $\frac{D}{d} < 0$. Por la observación 3.2, descartamos la posibilidad de que $d < 0$, por lo tanto $D < 0$ y $d > 0$. También del Lema 3.1, se ve que $\frac{T}{\tau} < 0$, de donde quedan dos posibilidades: $(T < 0 \text{ y } \tau > 0)$ o $(T > 0 \text{ y } \tau < 0)$.

\Leftarrow Si $(\tau, d) \in \text{imagen de } H$, entonces $(\tau, d) = H(a^*, \alpha_0^*)$ para algunos a^* y α_0^* , escogiendo $\omega^* = \sqrt{\frac{D\tau - dT}{\tau - T}}$ es inmediato checar que $(a^*, \alpha_0^*, \omega^*)$ es solución de las ecuaciones (2.5) y (2.6). ■

3.4 Conclusiones

La información obtenida acerca de órbitas no simétricas coincide con la obtenida por Teruel [1997]. Para la existencia de órbitas no simétricas en nuestro trabajo obtenemos una restricción sobre los parámetros T, t, D, d que se presenta como $(t, d) \in \text{imagen de } H$, mientras que en Teruel [1997], esta restricción se presenta como $(t, d) \in M_1$ para un conjunto M_1 que allí es definido.

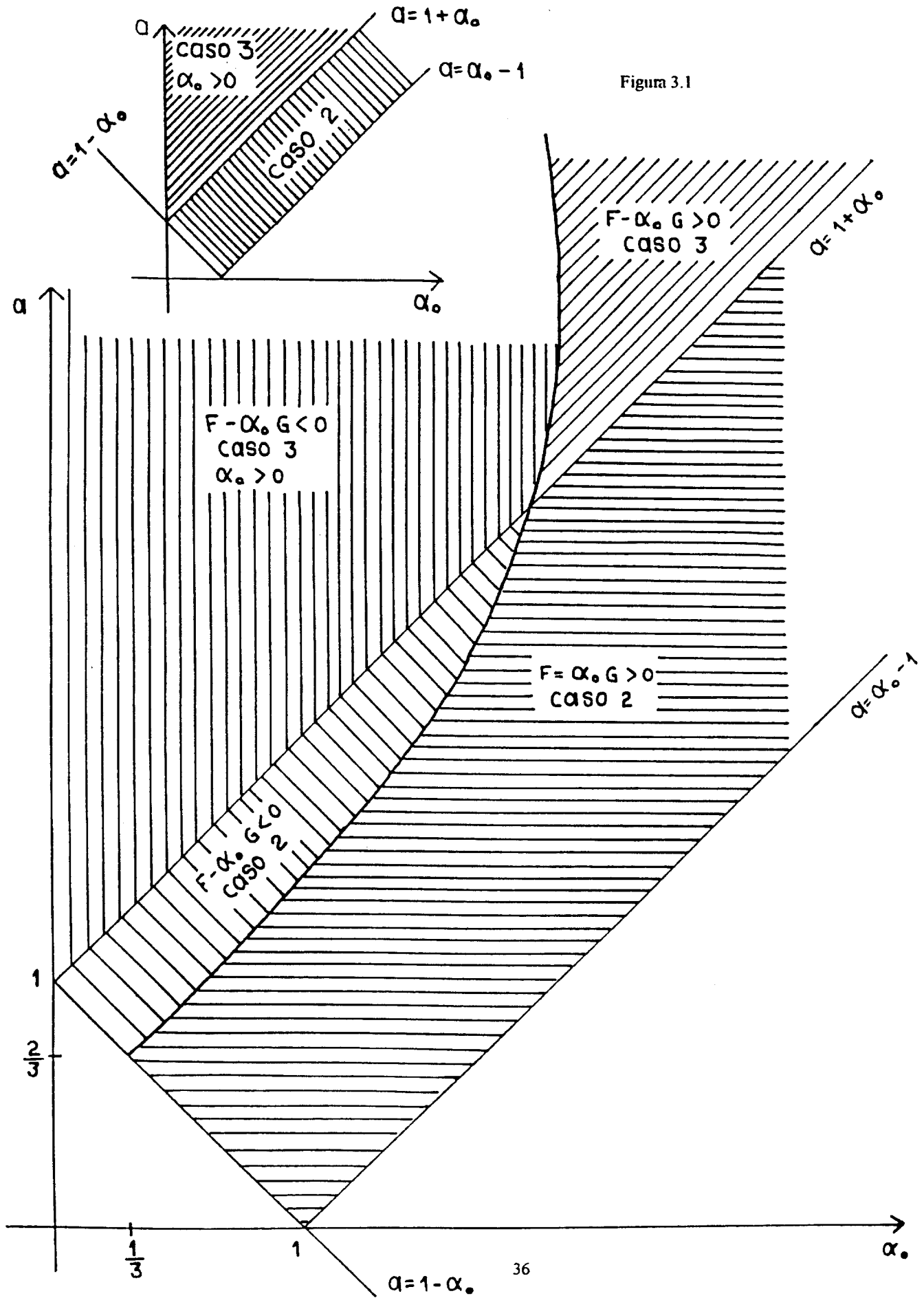


Tabla 3.1. Diagrama del 1er. Armónico. Orbitas simétricas

B estable $T < 0, D > 0$	A estable $\tau < 0, d > 0$		No hay órbitas periódicas PA
	A inestable $\tau > 0, d > 0$	$d > (\tau / T) D$	$\exists !$ órbita periódica PA y es inestable
		$d \leq (\tau / T) D$	No hay órbitas periódicas PA
	A silla $\tau > 0, d < 0$	$d > (\tau / T) D$	$\exists !$ órbita periódica PA y es inestable
		$d \leq (\tau / T) D$	No hay órbitas periódicas PA
A silla $\tau < 0, d < 0$		No hay órbitas periódicas PA	
B inestable $T > 0, D > 0$	A estable $\tau < 0, d > 0$	$d > (\tau / T) D$	$\exists !$ órbita periódica PA y es estable
		$d \leq (\tau / T) D$	No hay órbitas periódicas PA
	A inestable $\tau > 0, d > 0$		No hay órbitas periódicas PA
	A silla $\tau > 0, d < 0$		No hay órbitas periódicas PA
	A silla $\tau < 0, d < 0$	$d > (\tau / T) D$	$\exists !$ órbita periódica PA y es estable
$d \leq (\tau / T) D$		No hay órbitas periódicas PA	
B silla $T > 0, D < 0$	A estable $\tau < 0, d > 0$	$d > (\tau / T) D$	$\exists !$ órbita periódica PA y es estable *
		$d \leq (\tau / T) D$	No hay órbitas periódicas PA
	A inestable $\tau > 0, d > 0$		No hay órbitas periódicas PA
	A silla $\tau > 0, d < 0$		No hay órbitas periódicas PA
	A silla $\tau < 0, d < 0$	$d > (\tau / T) D$	$\exists !$ órbita periódica PA y es estable
$d \leq (\tau / T) D$		No hay órbitas periódicas PA	
B silla $T < 0, D < 0$	A estable $\tau < 0, d > 0$		No hay órbitas periódicas PA
	A inestable $\tau > 0, d > 0$	$d > (\tau / T) D$	$\exists !$ órbita periódica PA y es inestable *
		$d \leq (\tau / T) D$	No hay órbitas periódicas PA
	A silla $\tau > 0, d < 0$	$d > (\tau / T) D$	$\exists !$ órbita periódica PA y es inestable
		$d \leq (\tau / T) D$	No hay órbitas periódicas PA
A silla $\tau < 0, d < 0$		No hay órbitas periódicas PA	

* Si además (t, d) pertenece a la imagen de H , entonces existen 2 órbitas periódicas PA no simétricas.

Capítulo 4

Sistemas tri-dimensionales

4.1 Presentación del control al que estará sujeto el sistema

En este capítulo consideramos los siguientes sistemas:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\xi(t) \quad (4.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^3$, $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$, $b \in \mathbb{R}^3$, (A, b) es un par controlable y la retroalimentación de estado $\xi = S(u)$ esta definida por la función de saturación

$$S(u) = \text{sat}(u) = \begin{cases} -1 & u \leq -1 \\ u & -1 < u < 1 \\ 1 & 1 \leq u \end{cases}$$

con $u(t) = k^T x(t)$ escogida de tal manera que $A + bk^T$ sea una matriz estable. Ya que $\sigma(A + bk^T) \subset \mathbb{C}^-$, el origen es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable de (5.1). Nuestro principal problema es estudiar la región de atracción del origen, denotada por $\Omega(0)$.

En un trabajo previo [Suárez *et al*, 1995], se dió una caracterización topológica de la región de atracción del origen (**RA**) para sistemas lineales con control lineal saturado. Para este fin, fue esencial el estudio del comportamiento dinámico sobre la frontera de la **RA**. En este trabajo, abordaremos el problema de la existencia de ciclos límite, el cual no fue considerado en [Suárez *et al*]. Adicionalmente, estudiaremos las bifurcaciones en el número de ciclos límite cuando los parámetros (ganancias) del control cambian, pero se conserva la estabilidad del sistema a lazo cerrado. Debido a la complejidad en el problema de la existencia de órbitas periódicas, buscaremos órbitas periódicas aproximadas usando el método de balance armónico. Este método da un valor aproximado para la amplitud de las órbitas periódicas sobre la frontera. Esto, junto con los resultados en [Suárez *et al*] permiten estimar el tamaño de la **RA**.

Como un ejemplo de la aplicación de este método, se muestra que al considerar el control de alta ganancia (cuando las ganancias divergen al infinito), la **RA** decrece y se colapsa al origen. Este resultado es válido aún para sistemas estables a lazo abierto. En sistemas bidimensionales el resultado no es válido para este caso, como se verá en el capítulo 6 [también ver Suárez *et al*, 1996]. Sin embargo, los sistemas bidimensionales con al menos un valor propio con parte real positiva a lazo abierto tienen una única órbita periódica y cuando se considera el control de alta ganancia la **RA** decrece y se colapsa al origen.

Debido a la dificultad en las operaciones, en este trabajo nos restringimos a sistemas tridimensionales, aunque algunos de estos resultados pueden ser generalizados al caso n-dimensional como veremos en el capítulo 7 [también ver Aguirre *et al*, 1997].

Tomando en cuenta la observación sobre formas canónicas en el capítulo 3 y con la intención de simplificar las operaciones, consideraremos sistemas de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bS(k^T x)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Dado el vector de ganancias del controlador $k^T = (a_3 - d_3, a_2 - d_2, a_1 - d_1)$, la condición para la estabilidad asintótica en el origen del sistema (5.1) es la siguiente

$$d_1, d_3, d_1 d_2 - d_3 > 0.$$

Para estudiar la existencia de órbitas periódicas y bifurcaciones en el número de órbitas periódicas, proponemos la siguiente parametrización: Sea δ un número positivo, y definamos

$$d_1 = \delta k_1, \quad d_2 = \delta^2 k_2, \quad d_3 = \delta^3 k_3 \quad (4.3)$$

Obsérvese que el sistema a lazo cerrado permanece estable para cualquier $\delta > 0$. La idea de la δ -parametrización es la siguiente: si $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ son las raíces del polinomio estable $t^3 + k_1 t^2 + k_2 t + k_3$ entonces los valores propios del sistema a lazo cerrado serán $\{\delta \lambda_1, \delta \lambda_2, \delta \lambda_3\}$ de esta manera sólo consi-

deramos a δ como único parámetro de bifurcación y los valores propios a lazo cerrado se localizan en el semiplano izquierdo del plano complejo y tienen valor absoluto muy grande.

4.2 Información Geométrica del Método del Primer Armónico para el Caso particular de Sistemas tri-dimensionales

En [Llibre and Ponce, 1996] se estudio el sistema (4.1) para el caso de tres dimensiones, en éste trabajo se aplicó el método de la función descriptora y se obtuvo el diagrama de bifurcación para la ecuación (2.2). Como estamos interesados en estimar la RA del origen, en lugar de (2.2), deberíamos estudiar el diagrama de bifurcación de la ecuación (4.1). Además, debemos incluir las órbitas periódicas no simétricas, las cuales no fueron consideradas en [Llibre and Ponce, 1996].

Cuando las funciones $u(t) = \alpha_0 + a \sin \omega t$ y $\sigma(u(t)) = \beta_0 + \beta_1 \sin \omega t$ se reemplazan en (4.1), se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a_1 \frac{d^2x}{dt^2} + a_2 \frac{dx}{dt} + a_3x = \beta_0 + \beta_1 \sin \omega t.$$

Si a_3 no es cero, las coordenadas x, y, z de la solución satisfacen las relaciones (2.14) que fueron obtenidas en el capítulo 2, tales relaciones podemos escribirlas para éste caso específico como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\left(x - \frac{\beta_0}{a_3}\right)^2}{\frac{\beta_1^2}{(a_3 - a_1 \omega^2)^2 + \omega^2(\omega^2 - a_2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{\omega^2 \beta_1^2}{(a_3 - a_1 \omega^2)^2 + \omega^2(\omega^2 - a_2)^2}} = 1 \\ \frac{y^2}{\frac{\omega^2 \beta_1^2}{(a_3 - a_1 \omega^2)^2 + \omega^2(\omega^2 - a_2)^2}} + \frac{z^2}{\frac{\omega^4 \beta_1^2}{(a_3 - a_1 \omega^2)^2 + \omega^2(\omega^2 - a_2)^2}} = 1 \\ z = -\omega^2 \left(x - \frac{\beta_0}{a_3}\right) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

De manera que las órbitas periódicas del primer armónico son elipses en el espacio 3-dimensional.

De la ecuación (2.6) y la Proposición A.4 obtenemos que

$$1 + W(i\omega) = 1 - \frac{1}{G(a, \alpha_0)} \in (-\infty, 0]$$

Si s no es un valor propio de A entonces se satisface la identidad (3.2)

$$1 + W(s) = \frac{\det(A+bc^T-sI)}{\det(A-sI)}$$

Entonces podemos escribir $1 + W(i\omega) = r$, $r \leq 0$, lo cual implica

$$\begin{aligned} d_3 - d_1\omega^2 &= (a_3 - a_1\omega^2) r \\ d_2 - \omega^2 &= (a_2 - \omega^2) r \end{aligned} \quad (4.5)$$

Resolviendo, r y ω deben ser las raíces de los siguientes polinomios

$$(a_1 - d_1)\omega^4 + (d_3 - a_3 + d_1a_2 - a_1d_2)\omega^2 + a_3d_2 - a_2d_3 = 0 \quad (4.6)$$

$$(a_1a_2 - a_3)r^2 + (a_3 + d_3 - a_2d_1 - a_1d_2)r + d_1d_2 - d_3 = 0 \quad (4.7)$$

De esta manera, en caso de existir órbitas periódicas **PA**, entonces éstas estarán asociadas a las soluciones de (4.7). De modo que las siguientes parejas (r, ω^2) , están asociadas a las soluciones (a, ω, α_0) de (2.5) y (2.6) (o (2.9) cuando $\alpha_0 = 0$).

$$\left\{ \begin{aligned} r_+ &= \frac{-a_3 - d_3 + a_2d_1 + a_1d_2 + \sqrt{(-a_3 - d_3 + a_2d_1 + a_1d_2)^2 - 4(a_1a_2 - a_3)(d_1d_2 - d_3)}}{2(a_1a_2 - a_3)} \\ \omega_-^2 &= \frac{a_3 - d_3 - d_1a_2 + d_2a_1 - \sqrt{(a_3 - d_3 - d_1a_2 + d_2a_1)^2 - 4(a_1 - d_1)(a_3d_2 - a_2d_3)}}{2(a_1 - d_1)} \end{aligned} \right. \quad (4.8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} r_- &= \frac{-a_3 - d_3 + a_2d_1 + a_1d_2 - \sqrt{(-a_3 - d_3 + a_2d_1 + a_1d_2)^2 - 4(a_1a_2 - a_3)(d_1d_2 - d_3)}}{2(a_1a_2 - a_3)} \\ \omega_+^2 &= \frac{a_3 - d_3 - d_1a_2 + d_2a_1 + \sqrt{(a_3 - d_3 - d_1a_2 + d_2a_1)^2 - 4(a_1 - d_1)(a_3d_2 - a_2d_3)}}{2(a_1 - d_1)} \end{aligned} \right. \quad (4.9)$$

Observación 4.1. La primera consecuencia es que el sistema (4.1) tiene a lo más dos órbitas periódicas simétricas **PA**.

4.3 No existencia de órbitas periódicas **PA** no simétricas

En el capítulo 2, dividimos a las funciones $F(a, \alpha_0)$ y $G(a, \alpha_0)$ en 6 casos (ver también el apéndice).

En los siguientes resultados, descartamos algunos casos donde no pueden existir órbitas periódicas **PA** no simétricas.

Proposición 4.1. Para las condiciones c_1, c_4 y c_6 no existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico.

Demostración. Para c_1 las ecuaciones (2.5)-(2.6) corresponden a $\alpha_0 + W(0) = 0$ y $1 = 0$. Para c_6 corresponden a $\alpha_0 - W(0) = 0$ y $1 = 0$. En c_4 las ecuaciones son $\alpha_0 + W(0)\alpha_0 = 0$ y $1 + W(i\omega) = 0$. Ya que $\alpha_0 \neq 0$, entonces $1 + W(0) = 0$ pero por otra parte, $1 + W(0) = \frac{(0)^3 + d_1(0)^2 + d_2(0) + d_3}{(0)^3 + a_1(0)^2 + a_2(0) + a_3} = \frac{d_3}{a_3} \neq 0$. De aquí que para estos tres casos, no existan órbitas periódicas no simétricas del primer armónico. ■

Proposición 4.2. Sea A la matriz a lazo abierto definida como en (4.2). Si $a_3 > 0$, entonces no existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico.

Demostración. Ya que $W(0) = \frac{d_3 - a_3}{a_3}$, de (2.5) tenemos $\alpha_0 + \frac{d_3 - a_3}{a_3} F(a, \alpha_0) = 0$.

De aquí que $d_3 = -a_3 \left(\frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)} - 1 \right)$. Como $a_3 > 0$ y $\frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)} - 1 > 0$ (ver Proposición A3), se sigue que $d_3 < 0$. Esto es una contradicción a la condición de estabilización $d_3 > 0$. ■

El resultado en la Proposición 4.2 es muy útil ya que proporciona un criterio para la no existencia de órbitas periódicas **PA** no simétricas en términos de la matriz A . Más específicamente, en términos del $\det(A) = -a_3$. El resultado es que una condición necesaria para la existencia de órbitas periódicas **PA** no simétricas es que $\det(A) > 0$. Tal condición puede reescribirse como que la matriz A debe tener un número par de valores propios con parte real negativa.

Corolario 4.1. Considerar el sistema de control tri-dimensional (4.1) escrito en la forma canónica (4.2) con $\det(A) \neq 0$. Sea $n_s(A)$ el número de eigenvalores de la matriz A con parte real negativa. Entonces no pueden existir órbitas periódicas **PA** no simétricas si $n_s(A) = 3$ (el sistema no controlado es asintóticamente estable) o $n_s(A) = 1$ (el sistema no controlado tiene dos eigenvalores inestables).

Como una consecuencia del resultado anterior, las órbitas periódicas **PA** no simétricas pueden existir solamente si $n_s = 0$ o si $n_s = 2$.

4.4 El Caso en que A es Hurwitz

En [Suárez *et al.*, 1995] se probó que en sistemas a lazo abierto estables todas las trayectorias eventualmente tienden hacia algún conjunto compacto de volumen cero. Aquí mostraremos que ese conjunto compacto es la unión de una órbita periódica y el origen.

Teorema 4.1. Sea A la matriz a lazo abierto definida como en (4.2). Si A es estable, entonces el sistema (4.1) no tiene órbitas periódicas no simétricas del primer armónico.

Demostración. Es inmediato de la proposición 4.2. ■

Ahora considerese las soluciones $(r(\delta), \omega(\delta))$ de (4.8) y (4.9) como funciones de δ y definir las funciones

$$\begin{aligned} q(\delta) &= (a_3 - a_1\omega^2(\delta))^2 + \omega^2(\delta)(\omega^2(\delta) - a_2)^2, \\ p(\delta) &= \left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta)-1} \right) \right]^2, \\ f(\delta) &= \frac{p(\delta)}{q(\delta)(r(\delta)-1)^2}, \\ g(\delta) &= \frac{p(\delta)\omega^2(\delta)}{q(\delta)(r(\delta)-1)^2}, \\ h(\delta) &= \frac{p(\delta)\omega^4(\delta)}{q(\delta)(r(\delta)-1)^2} \end{aligned}$$

No es difícil ver que se satisfacen las siguientes relaciones

$$\frac{x^2}{f(\delta)} + \frac{y^2}{g(\delta)}, \quad \frac{y^2}{g(\delta)} + \frac{z^2}{h(\delta)} = 1, \quad z = -\omega^2(\delta)x$$

Tomando en cuenta estas relaciones hacemos la siguiente definición:

Definición 4.1. Las órbitas periódicas simétricas definidas por (4.8) están anidadas con respecto al parámetro δ si $f(\delta)$, $g(\delta)$, $h(\delta)$ son funciones monótonas decrecientes.

Ahora obsérvese que las ecuaciones (4.6) y (4.7) tienen el mismo discriminante

$$(a_3 + d_3 - a_2d_1 - a_1d_2)^2 - 4(a_1a_2 - a_3)(d_1d_2 - d_3)$$

Este discriminante no es positivo para cualesquiera valores de d_1, d_2, d_3 . Sin embargo para la parametrización (4.3) y cuando el parámetro δ es suficientemente grande, éste discriminante siempre es

positivo y ésto da como resultado la existencia de 2 órbitas periódicas **PA**, una asociada a la pareja (4.8) y la otra asociada a la pareja (4.9). De aquí que obtengamos el siguiente teorema.

Teorema 4.2. Consideremos el sistema a lazo cerrado (4.1) escrito en la forma canónica (4.2), con A estable. Para δ suficientemente grande existen 2 órbitas periódicas simétricas del primer armónico. La primera está contenida sobre la frontera de la región de atracción del origen (a esta le llamaremos órbita interna). La segunda está en el complemento de la cerradura de la **RA** del origen (a esta le llamaremos órbita externa)(ver figura 4.1). Estas órbitas tienen las siguientes propiedades:

- a) Cuando $\delta \rightarrow \infty$, la órbita interna se colapsa al origen y la órbita externa converge a una elipse constante.
- b) La órbita interna es inestable y la externa es estable,
- c) Las órbitas internas son anidadas cuando $\delta \rightarrow \infty$.

Demostración del Teorema 4.2.a)

La órbita periódica interna se colapsa al origen si $f(\delta), g(\delta), h(\delta) \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow \infty$. Sean a, ω_- las soluciones a (2.9) correspondientes al par (4.8), entonces $a = N^{-1} \left(\frac{-1}{r_+(\delta)-1} \right)$ o equivalentemente $N(a) = \frac{-1}{r_+(\delta)-1}$. Calculando el siguiente limite: $\lim_{\delta \rightarrow \infty} r_+(\delta) \rightarrow -\frac{(k_1 k_2 - k_3)}{k_3}$ (proposición A11) tenemos que $\lim_{\delta \rightarrow \infty} N(a) \rightarrow \frac{k_3}{k_1 k_2}$. Así que $\lim_{\delta \rightarrow \infty} a^2 N^2(a) \rightarrow \left[N^{-1} \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right) \right]^2 \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right)^2$. Por otra parte se tiene que $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\omega_-^2(\delta)}{\delta^2} = \frac{k_3}{k_1}$ (proposición A12) implica que $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \omega_-^2(\delta) = \infty$. Finalmente, observando que $q(\delta)$ es un polinomio de grado 3 en la variable $\omega_-^2(\delta)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow \infty} f(\delta) &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{a^2 N^2(a)}{q(\delta)} = 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow \infty} g(\delta) &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{a^2 N^2(a) \omega_-^2(\delta)}{q(\delta)} = 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow \infty} h(\delta) &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{a^2 N^2(a) \omega_-^4(\delta)}{q(\delta)} = 0. \end{aligned}$$

Cuando $\delta \rightarrow \infty$, la solución de (4.9) tiende a la siguiente elipse

$$\frac{x^2}{\left[\frac{4}{\pi(a_1 a_2 - a_3)}\right]^2} + \frac{y^2}{a_2 \left[\frac{4}{\pi(a_1 a_2 - a_3)}\right]^2} = 1, \quad \frac{y^2}{a_2 \left[\frac{4}{\pi(a_1 a_2 - a_3)}\right]^2} + \frac{z^2}{a_2^2 \left[\frac{4}{\pi(a_1 a_2 - a_3)}\right]^2} = 1, \quad z = -a_2 x.$$

Los siguientes límites pueden ser calculados $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \omega_+^2(\delta) = a_2$, $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{r_-(\delta)}{\delta^3} = -\frac{k_3}{a_1 a_2 - a_3}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} N^{-1}(x)x = \frac{4}{\pi}$ (Proposición A11), entonces se sigue que $\lim_{\delta \rightarrow \infty} q(\delta) = (a_3 - a_1 a_2)^2$, $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{-1}{r_-(\delta)-1} = 0$ y $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r_-(\delta)-1} \right) \right]^2 \frac{1}{(r_-(\delta)-1)^2} = \left(\frac{4}{\pi} \right)^2$. Finalmente, tenemos $\lim_{\delta \rightarrow \infty} f(\delta) = \left[\frac{4}{\pi(a_1 a_2 - a_3)} \right]^2$, $\lim_{\delta \rightarrow \infty} g(\delta) = a_2 \left[\frac{4}{\pi(a_1 a_2 - a_3)} \right]^2$ y $\lim_{\delta \rightarrow \infty} h(\delta) = a_2^2 \left[\frac{4}{\pi(a_1 a_2 - a_3)} \right]^2$

De aquí que la órbita periódica PA determinada por (4.9) es la elipse definida anteriormente. ■

Demostración del Teorema 4.2.b). Consideremos las siguientes funciones:

$$t(\omega) = (a_3 - a_1 \omega^2)^2 + \omega^2 (a_2 - \omega^2)^2 \text{ y } s(\omega) = a_3 d_2 - a_2 d_3 + (d_3 - a_3 + a_2 d_1 - a_1 d_2) \omega^2 + (a_1 - d_1) \omega^4$$

De (2.9) y (4.2) tenemos

$$ImW(i\omega) = \frac{\omega s(\omega)}{t(\omega)}$$

Obsérvese que si a, ω es una solución de (4.9) entonces $ImW(i\omega) = 0$, es decir, $s(\omega) = 0$.

Denotemos por $\omega_-^2 = \omega_-^2$ a la raíz de (4.6) correspondiente al par (4.8) y por $\omega_+^2 = \omega_+^2$ a la raíz correspondiente a (4.9). Entonces, $s(\omega) = (a_1 - d_1)(\omega^2 - \omega_-^2)(\omega^2 - \omega_+^2)$. Así que

$$s'(\omega_0) = (a_1 - d_1)2\omega_- (\omega_-^2 - \omega_+^2) \text{ y } s'(\omega_+) = (a_1 - d_1)2\omega_+ (\omega_+^2 - \omega_-^2).$$

Aquí probaremos que la órbita interna es inestable (la prueba de que la órbita externa es estable es similar).

$$\text{Primero considérese que } \frac{d}{d\omega} ImW(i\omega) = \frac{[\omega s'(\omega) + s(\omega)]t(\omega) - \omega s(\omega)t'(\omega)}{t^2(\omega)}$$

evaluando en ω_0 resulta

$$\left. \frac{d}{d\omega} ImW(i\omega) \right|_{\omega_-} = \frac{\omega_- s'(\omega_-)t(\omega_-)}{t^2(\omega_-)} = \frac{\omega_- s'(\omega_-)}{t(\omega_-)}$$

Ya que $t(\omega_-) > 0$, obtenemos

$$\text{sign} \left[\left. \frac{d}{d\omega} ImW(i\omega) \right|_{\omega=\omega_-} \right] = \text{sign}[s'(\omega_-)].$$

Obsérvese que la última igualdad implica que la estabilidad de la órbita interna esta determinada por

$s'(\omega_-)$. Por otra parte, de (4.8) y (4.9) obtenemos

$$\omega_-^2 - \omega_+^2 = -\frac{\sqrt{(a_3 - d_3 - d_1 a_2 + d_2 a_1)^2 - 4(a_1 - d_1)(a_3 d_2 - a_2 d_3)}}{a_1 - d_1}$$

De aquí que

$$s'(\omega_-) = -2\omega_- \sqrt{(a_3 - d_3 - d_1 a_2 + d_2 a_1)^2 - 4(a_1 - d_1)(a_3 d_2 - a_2 d_3)} < 0$$

lo cual implica que la órbita interna es inestable. ■

Demostración del Teorema 4.2.c). Primero, consideremos

$$\begin{aligned} f'(\delta) &= \frac{\frac{d}{d\delta} \left[\left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta)-1} \right) \right]^2 \frac{1}{(r(\delta)-1)^2} \right] q(\delta) - \left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta)-1} \right) \right]^2 \frac{1}{(r(\delta)-1)^2} q'(\delta)}{q^2(\delta)} \\ &= \frac{\delta^5}{q^2(\delta)} \left[\delta \frac{d}{d\delta} \left\{ \left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta)-1} \right) \right]^2 \frac{1}{(r(\delta)-1)^2} \right\} \frac{q(\delta)}{\delta^6} - \left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta)-1} \right) \right]^2 \frac{1}{(r(\delta)-1)^2} \frac{q'(\delta)}{\delta^6} \right] \end{aligned}$$

El signo de $\frac{q^2(\delta)}{\delta^6} f'(\delta)$ está determinado por la proposición A12,

$$\frac{q^2(\delta)}{\delta^5} f'(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} - \left[N^{-1} \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right) \right]^2 \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right)^2 6 \left(\frac{k_3}{k_1} \right)^3$$

Yá que $\frac{\delta^5}{q^2(\delta)} > 0$ podemos concluir que $f'(\delta) < 0$ cuando δ es suficientemente grande.

Similarmenete

$$g'(\delta) = \frac{\delta^7}{q^2(\delta)} \left[\frac{\frac{d}{d\delta} \left\{ \left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta)-1} \right) \right]^2 \frac{1}{(r(\delta)-1)^2} \omega^2(\delta) \right\}}{\delta} \frac{q(\delta)}{\delta^6} - \left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta)-1} \right) \right]^2 \frac{1}{(r(\delta)-1)^2} \frac{\omega^2(\delta)}{\delta^2} \cdot \frac{q'(\delta)}{\delta^6} \right]$$

El signo de $\frac{q^2(\delta)}{\delta^7} g'(\delta)$ está determinado por la proposición A12,

$$\frac{q^2(\delta)}{\delta^7} g'(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} \left[N^{-1} \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right) \right]^2 \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right)^2 \frac{2k_3}{k_1} \left(\frac{k_3}{k_1} \right)^3 - \left[N^{-1} \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right) \right]^2 \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right)^2 \left(\frac{k_3}{k_1} \right) \cdot 6 \left(\frac{k_3}{k_1} \right)^3$$

es decir

$$\frac{q^2(\delta)}{\delta^7} g'(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} -4 \left[N^{-1} \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right) \right]^2 \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right)^2 \left(\frac{k_3}{k_1} \right)^4$$

de aquí que $g'(\delta) < 0$ para δ suficientemente grande.

Finalmente

$$h'(\delta) = \frac{\delta^9}{q^2(\delta)} \left[\frac{\frac{d}{d\delta} \left\{ \left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta)-1} \right) \right]^2 \frac{1}{(r(\delta)-1)^2} \omega^4(\delta) \right\}}{\delta^3} \frac{q(\delta)}{\delta^6} - \left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta)-1} \right) \right]^2 \frac{1}{(r(\delta)-1)^2} \frac{\omega^4(\delta)}{\delta^4} \cdot \frac{q'(\delta)}{\delta^6} \right]$$

$$\frac{q^2(\delta)}{\delta^9} h'(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} -2 \left[N^{-1} \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right) \right]^2 \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right)^2 \left(\frac{k_3}{k_1} \right)^5$$

de aquí que $h'(\delta) < 0$ para δ suficientemente grande. Entonces las órbitas internas están anidadas. ■

Los resultados de esta sección implican las siguientes observaciones.

Observación 4.2. La retroalimentación de estado de alta ganancia se usa principalmente para rechazar perturbaciones (δ más grande rechaza perturbaciones más grandes). El teorema 4.2 prueba que el conjunto de puntos que pueden ser llevados al origen decrece cuando el sistema está sujeto a una retroalimentación de alta ganancia, y tiende a ser sólo el origen cuando δ es incrementado. Por lo tanto, para

sistemas con entradas acotadas, el rechazo de perturbaciones grandes implica la reducción de la RA del origen.

Observación 4.3. Consideremos una raíz δ^* del polinomio

$$(a_3 + k_3\delta^3 - a_2k_1\delta - a_1k_2\delta^2)^2 - 4(a_1a_2 - a_3)(k_1k_2 - k_3)\delta^3 \quad (4.10)$$

Si además δ^* satisface que $r(\delta^*) < 0$, entonces δ^* determina una bifurcación en el número de órbitas periódicas PA. De aquí que el número máximo de puntos de bifurcación es 6 en sistemas tri-dimensionales. Cuando δ es pequeño, la existencia de órbitas periódicas simétricas PA se sigue de los siguientes límites ($a_3 > 0$, ya que A es estable):

$$\text{a) } \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{r_+(\delta)}{\delta^3} = -\frac{(k_1k_2 - k_3)}{a_3}$$

$$\text{b) } \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega^2(\delta)}{\delta^2} = k_2$$

$$\text{c) } \lim_{\delta \rightarrow 0} r_-(\delta) = -\frac{a_3}{a_1a_2 - a_3}$$

$$\text{d) } \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_+^2(\delta) = \frac{a_3}{a_1}$$

Por otra parte, del Teorema 4.2 sabemos que existen dos órbitas periódicas simétricas PA para δ suficientemente grande. De aquí que exista un número par de puntos de bifurcación. ■

El siguiente ejemplo ilustra las ideas de la observación anterior

Ejemplo 4.1. Considerar el sistema tri-dimensional

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sat } \left(\left(9 - \frac{27}{11}\delta^3, 5 - \frac{63}{44}\delta^2, 2 - \frac{189}{110}\delta \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)$$

Observe que el sistema a lazo cerrado y el sistema a lazo abierto son estables ya que se satisfacen las condiciones de Hurwitz. Analicemos el polinomio

$\left[\frac{11}{27}(\delta - 1)(\delta - 2)\left(\delta + \frac{11}{6}\right) \right]^2 - 4\frac{27}{(110)(44)}\delta^3$. De acuerdo con el Método de Balance del Primer Armónico el número de puntos de bifurcación está acotado por las raíces positivas de este polinomio. Tales raíces son $\delta_1 = .89665$, $\delta_2 = 1.1976$, $\delta_3 = 1.6598$, $\delta_4 = 2.2431$. Tomando en cuenta esta información, se hicieron simulaciones numéricas en la proximidad de tales puntos y se encontraron sólo 2 puntos

de bifurcación, estos puntos son los correspondientes a $\delta_1 = .89665$ and $\delta_4 = 2.2431$ y sus valores en las simulaciones son $\delta_1^* = 0.98212$ y $\delta_4^* = 2.03947$. En estos puntos existe solamente una órbita cerrada no-hiperbólica. Por otra parte, para $\delta \in (0, 0.98212)$ existen dos órbitas periódicas, para $\delta \in (0.98212, 2.03947)$ no existen órbitas periódicas y para $\delta \in (2.03947, \infty)$ existen dos órbitas periódicas. Aunque los puntos $\delta_2 = 1.1976$, $\delta_3 = 1.6598$ son raíces positivas del mencionado polinomio, ellos no corresponden a puntos de bifurcación en vista de que $r(\delta_2) = 0.58978718$, $r(\delta_3) = 0.962283117$, lo cual es una contradicción ya que la negatividad de $r(\delta)$ es una condición para la existencia de órbitas periódicas simétricas del primer armónico.

Observación 4.4. La parametrización de las ganancias del control dada por $d_1 = \delta a_1$, $d_2 = \delta^2 a_2$, $d_3 = \delta^3 a_3$, para $\delta \in [1, \infty)$ (aquí $k_1 = a_1$, $k_2 = a_2$, $k_3 = a_3$) nos permite analizar las bifurcaciones cuando los eigenvalores a lazo abierto permanecen en el semiplano izquierdo de los números complejos y su valor absoluto alcanza valores muy grandes cuando se incrementa el valor del parámetro δ . La idea es la siguiente: si $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ son los eigenvalores de A , entonces $\{\delta\lambda_1, \delta\lambda_2, \delta\lambda_3\}$ son los eigenvalores del sistema a lazo cerrado, de tal manera que cuando evaluamos en $\delta = 1$, se obtienen los eigenvalores del sistema a lazo abierto $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. Entonces para $\delta = 1$ no existen órbitas periódicas y del Teorema 4.2 hay dos órbitas cuando $\delta \gg 1$. Así que existe al menos un punto de bifurcación δ^* . Obsérvese que cuando $\delta = \delta^*$ solamente existe una órbita periódica **PA**, la cual no es hiperbólica.

4.5 Caso en el que la matriz A es antiestable

En [Suárez *et al*, 1995] se mostró que si el sistema a lazo abierto tiene todos sus eigenvalores con parte real estrictamente positiva (matriz estrictamente inestable), entonces la región de atracción es acotada y homeomórfica a la bola n -dimensional (a la bola 3-dimensional en este caso). Sobre la frontera de la **RA** hay 2 puntos de equilibrio, los cuales son repulsores. En esta sección predecimos la existencia de ciclos límite sobre la frontera de la **RA** del origen. Este es un resultado intuitivo ya que la frontera es homeomórfica a la esfera y los puntos de equilibrio sobre la frontera son repulsores.

Como una diferencia a los sistemas estables a lazo abierto, para los sistemas estrictamente inestables a lazo abierto pueden existir al menos dos órbitas periódicas no simétricas PA cuando se satisface que $-1 < \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a} < 1$ (c_3). En ésta sección, además, se muestran evidencias de una bifurcación de rompimiento de órbitas simétricas, es decir, bifurcaciones donde una órbita periódica simétrica (con respecto al origen) se rompe en 2 o más órbitas periódicas no simétricas. Para la condición c_3 obsérvese que es suficiente considerar $\alpha_0 > 0$, $a > 1 + \alpha_0$ ya que $F(a, -\alpha_0) = -F(a, \alpha_0)$ y $G(a, \alpha_0) = G(a, -\alpha_0)$. En otras palabras, la simetría del retrato fase reduce el problema a encontrar una solución satisfaciendo $\alpha_0, a > 0$. De tal manera que tanto $u(t) = \alpha_0 + a \sin \omega t$ como $u(t) = -\alpha_0 + a \sin \omega t$ determinan órbitas periódicas del primer armónico. Para estudiar las órbitas periódicas no simétricas del primer armónico necesitamos encontrar las soluciones (a, ω, α_0) de (2.6), es decir

$$1 + W(i\omega) = 1 - \frac{1}{G(a, \alpha_0)} \in (-\infty, 0)$$

De aquí que sea necesario resolver $1 + W(i\omega) = r$, $r < 0$.

Proposición 4.3. Sea A la matriz a lazo abierto definida como en (4.2). Si $a_1, a_3, a_1 a_2 - a_3 < 0$ entonces existe solamente una órbita periódica simétrica del primer armónico determinada por la pareja (r, ω^2) definida en (4.8).

Demostración. De $a_1, a_3, a_1 a_2 - a_3 < 0$ tenemos $-4(a_1 a_2 - a_3)(d_1 d_2 - d_3) > 0$ lo cual implica $|a_3 + d_3 - a_2 d_1 - a_1 d_2| < \sqrt{(a_3 + d_3 - a_2 d_1 - a_1 d_2)^2 - 4(a_1 a_2 - a_3)(d_1 d_2 - d_3)}$

De aquí que las raíces de (4.7) tengan diferente signo y la raíz r que satisface $r < 0$ esta definida por (4.8). Observar que el signo positivo del discriminante de (4.7) implica la existencia de una órbita periódica simétrica del primer armónico. ■

Ahora considérese la parametrización de alta ganancia. Como vimos en la Proposición 4.3, existe una y solo una $r < 0$ (de aquí que una y sólo una ω^2) determinada por (4.8). También para esta parametrización especial r y ω^2 están dadas por

$$r_+ = \frac{-a_3 - k_3 \delta^3 + a_2 k_1 \delta + a_1 k_2 \delta^2 + \sqrt{(-a_3 - k_3 \delta^3 + a_2 k_1 \delta + a_1 k_2 \delta^2)^2 - 4(a_1 a_2 - a_3)(k_1 k_2 - k_3) \delta^3}}{2(a_1 a_2 - a_3)} \quad (4.11)$$

$$\omega_-^2 = \frac{a_3 - k_3 \delta^3 - a_2 k_1 \delta + a_1 k_2 \delta^2 - \sqrt{(a_3 - k_3 \delta^3 - a_2 k_1 \delta + a_1 k_2 \delta^2)^2 - 4(a_1 - k_1 \delta)(a_3 k_2 \delta^2 - a_2 k_3 \delta^3)}}{2(a_1 - k_1 \delta)}$$

De (4.11) es directo calcular que $\lim_{\delta \rightarrow \infty} r_+(\delta) = 1 - \frac{k_1 k_2}{k_3}$ (o $\lim_{\delta \rightarrow \infty} W(i\omega_-(\delta)) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} r_+(\delta) - 1 \rightarrow -\frac{k_1 k_2}{k_3}$).

Las siguientes definiciones y lemas nos serán útiles para demostrar la existencia de órbitas periódicas no simétricas PA. Para $\alpha_0 > 0$, $a > 1 + \alpha_0$ definimos las funciones

$$\rho(a, \alpha_0) = - \left(\frac{a_3}{k_3} \right)^{1/3} \left(\frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)} - 1 \right)^{1/3} \quad (4.12)$$

$$H(a, \alpha_0) = 1 + [r_+(\rho(a, \alpha_0)) - 1]G(a, \alpha_0)$$

Notar que $\rho(a, \alpha_0) > 0$ ya que $a_3 < 0$, $d_3 > 0$ y $\frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)} - 1 > 0$ (ver Proposición A.3). La prueba del siguiente lema se sigue de inmediato.

Lema 4.1. El par $(\bar{a}, \bar{\alpha}_0)$ es una solución a (2.5) si y sólo si $\delta = \rho(\bar{a}, \bar{\alpha}_0)$.

Lema 4.2. Sea A la matriz a lazo abierto definida como en (4.2). Si A es estrictamente inestable (todos sus eigenvalores tienen parte real positiva) y α_0 es suficientemente pequeña, entonces existe a satisfaciendo $a > 1 + \alpha_0$ y $H(a, \alpha_0) = 0$.

Demostración. Dado $\alpha_0 > 0$ la proposición A8 implica que $\lim_{a \rightarrow \infty} F(a, \alpha_0) = 0$ y $\lim_{a \rightarrow \infty} G(a, \alpha_0) = 0$. Entonces $\frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)} \rightarrow \infty$ y $\rho(a, \alpha_0) \rightarrow \infty$ cuando $a \rightarrow \infty$, y por lo tanto $r_+(\rho(a, \alpha_0)) \rightarrow 1 - \frac{k_1 k_2}{k_3}$ cuando $a \rightarrow \infty$. De aquí que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} H(a, \alpha_0) = 1 + \left[-\frac{k_1 k_2}{k_3} \right](0) = 1 \quad (*)$$

Ahora analicemos $H(\alpha_0 + 1, \alpha_0) = 1 + [r_+(\rho(\alpha_0 + 1, \alpha_0)) - 1]G(\alpha_0 + 1, \alpha_0)$.

Debido a la proposición A8 $G(\alpha_0 + 1, \alpha_0) \rightarrow 1$ y $\frac{\alpha_0}{F(\alpha_0 + 1, \alpha_0)} \rightarrow 1$ cuando $\alpha_0 \rightarrow 0$.

Entonces $\rho(a, \alpha_0) \rightarrow 0$ cuando $\alpha_0 \rightarrow 0$.

Además $r_+(\delta) \rightarrow -\frac{a_3}{a_1 a_2 - a_3}$ cuando $\delta \rightarrow 0$.

De aquí que $\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} H(\alpha_0 + 1, \alpha_0) = 1 + \left[-\frac{a_3}{a_1 a_2 - a_3} - 1 \right](1) = -\frac{a_3}{a_1 a_2 - a_3} < 0 \quad (**)$

Como consecuencia de (*) y (**) y la continuidad de H se tiene que existe $a > 1 + \alpha_0$ tal que $H(a, \alpha_0) = 0$

■

Definición. Sea $\varepsilon_1 > 0$ tal que para toda $\alpha_0 \in (0, \varepsilon_1)$, existe $a > 1 + \alpha_0$ satisfaciendo $H(a, \alpha_0) = 0$. Definimos el conjunto R_{ε_1} como sigue:

$$R_{\varepsilon_1} = \{(a, \alpha_0) : \alpha_0 \in (0, \varepsilon_1), \text{ y } a \text{ satisface que } a > 1 + \alpha_0 \text{ y } H(a, \alpha_0) = 0\}.$$

Notar que por el lema anterior, $R_{\varepsilon_1} \neq \emptyset$.

En el siguiente teorema mostraremos que si $n_s = 0$ el sistema de control (4.1) exhibe órbitas periódicas **PA** no simétricas para ciertos valores de $\delta > 0$. Esta información puede verse como una evidencia de una bifurcación de rompimiento de órbitas simétricas.

Teorema 4.3. Sea A la matriz a lazo abierto definida como en (4.2). Si A es estrictamente inestable (todos sus eigenvalores tienen parte real positiva), entonces, para todo δ , existe solamente una órbita periódica simétrica **PA** determinada por el par (r_+, ω_-) definido por (4.8). Además, considerando el sistema a lazo cerrado (4.1), se satisfacen las siguientes propiedades:

a) La órbita periódica simétrica **PA** es inestable y se contrae al origen cuando $\delta \rightarrow \infty$,

b) Como una función de δ , las órbitas periódicas **PA** son anidadas para δ suficientemente grande.

Si además los números a, α_0 satisfacen $-1 < \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a} < 1$ (**c₃**), entonces:

c) Para todo $\delta \in R = \{\rho(a, \alpha_0) : (a, \alpha_0) \in R_{\varepsilon_1}\}$ existen al menos dos órbitas periódicas no simétricas **PA** (ver Figura 4.2).

d) Para δ suficientemente pequeño o suficientemente grande no existen órbitas periódicas no simétricas **PA**.

Demostración de a) y b). Esta prueba es similar a la del Teorema 4.2, por lo tanto será omitida. ■

Demostración de c).

Tomemos $\delta^* \in R$. Entonces $\delta^* = \rho(a^*, \alpha_0^*)$ y $\alpha_0^* \in (0, \varepsilon_1)$. Además a^* satisface $a^* > 1 + \alpha_0^*$ y $H(a^*, \alpha_0^*) = 0$. De aquí que $1 + [r_+(\rho(a^*, \alpha_0^*)) - 1]G(a^*, \alpha_0^*) = 0$. Como $\delta^* = \rho(a^*, \alpha_0^*)$ entonces $1 + [r_+(\delta^*) - 1]G(a^*, \alpha_0^*) = 0$. Si escogemos $\omega^* = \omega_-(\delta^*)$ obtenemos que $(a^*, \alpha_0^*, \omega^*)$ satisface la ecuación (3.4). Por otra parte, la ecuación (3.3) se satisface ya que $\delta^* = \rho(a^*, \alpha_0^*)$. ■

Demostración de d).

Primero, probaremos que si δ es suficientemente pequeño entonces no existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico. Si la ecuación (2.5) se satisface entonces $\delta = \rho(a, \alpha_0)$ para alguna pareja (a, α_0) .

Considerar $H(a, \alpha_0)$ como fue definida anteriormente. Veremos que $H(a, \alpha_0) \neq 0$ cuando $\delta \rightarrow 0$.

Usando la proposición A9 obtenemos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} H(a, \alpha_0) = \lim_{\alpha_0 \rightarrow 0, a \rightarrow 1} 1 + [r_+(\rho(a, \alpha_0)) - 1]G(a, \alpha_0) = -\frac{a_3}{a_1 a_2 - a_3} < 0.$$

De aquí que la ecuación (2.6) no se satisface cuando δ es suficientemente pequeño y por lo tanto no hay órbitas periódicas no simétricas del primer armónico.

Ahora, probaremos que si δ es suficientemente grande no existirán órbitas periódicas no simétricas del primer armónico.

Usando la proposición A10, $G(a, \alpha_0)$ es decreciente con respecto a α_0 , así que

$G(a, \alpha_0) < G(a, 0) = N(a)$, donde $N(a)$ es la función descriptora.

Sabemos que $N(a) \rightarrow 0$ cuando $a \rightarrow \infty$ y $G(a, \alpha_0) \in (0, 1)$ (ver Proposición A4).

Recordar que $\lim_{\delta \rightarrow \infty} W(i\omega_-(\delta)) = -\frac{k_1 k_2}{k_3}$

Si $\epsilon > 0$, entonces existen δ_ϵ y a_ϵ tal que $\begin{cases} \text{si } \delta > \delta_\epsilon \text{ entonces } \left| W(i\omega_-(\delta)) + \frac{k_1 k_2}{k_3} \right| < \epsilon \\ \text{si } a > a_\epsilon \text{ entonces } 0 < G(a, \alpha_0) < G(a, 0) < \epsilon \end{cases}$

Escogemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño para garantizar que $1 + W(i\omega_-)G(a, \alpha_0) \approx 1$, es decir

$1 + W(i\omega_-)G(a, \alpha_0) \neq 0$ para todo $\delta > \delta_\epsilon$, $a > a_\epsilon$ y para todo $\alpha_0 (\alpha_0 + 1 < a)$

Definir $\bar{\delta} = -\left(\frac{a_3}{k_3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\pi}{2 \sin^{-1} \frac{1}{a_\epsilon}} - 1\right)^{\frac{1}{3}}$ y $\delta_0 = \max(\delta_\epsilon, \bar{\delta})$

Mostraremos que si $\delta > \delta_0$ entonces no existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico.

Sean $\delta > \delta_0$ y a, α_0 tales que satisfacen (2.5), entonces

$$\delta = -\left(\frac{a_3}{k_3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)} - 1\right)^{\frac{1}{3}} \text{ es decir } \frac{-k_3}{a_3} \delta^3 + 1 = \frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)}$$

Usando la proposición A10, el mínimo valor de a es

$$a_{\min} = \frac{1}{\sin \left[\frac{\pi}{2 \left(\frac{-k_3}{a_3} \delta^3 + 1 \right)} \right]}$$

Ya que $\delta > \delta_0 = \max(\delta_\epsilon, \bar{\delta})$ entonces $\delta > \bar{\delta}$ y usando que la función $f(x) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2x}}$ ($x > \frac{1}{2}$) es creciente cuando x es suficientemente grande tenemos

$$\frac{1}{\sin \left[\frac{\pi}{2 \left(\frac{-k_3}{\alpha_3} \delta^3 + 1 \right)} \right]} > \frac{1}{\sin \left[\frac{\pi}{2 \left(\frac{-k_3}{\alpha_3} \bar{\delta}^3 + 1 \right)} \right]} = a_\epsilon$$

Entonces $a \geq a_{\min} > a_\epsilon$

De aquí que si $\delta > \delta_0$ y a, α_0 son soluciones de (2.5) se sigue que $a > a_\epsilon$.

Como $\delta > \delta_0 = \max(\delta_\epsilon, \bar{\delta})$ entonces $\delta > \delta_\epsilon$. En consecuencia $1 + W(i\omega_-)G(a, \alpha_0) \neq 0$ y la ecuación (2.6) no se satisface y por lo tanto no existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico. ■

Observación 4.5. Desde el punto de vista de una aproximación del primer armónico, las órbitas que se predijeron en el Teorema 4.3.a) se localizan sobre la frontera de la región de atracción del origen, $\Omega(0)$. Cuando $\delta \rightarrow \infty$, la órbita periódica simétrica **PA** se contraen al origen, y ya que tal órbita periódica es radialmente inestable, este fenómeno conduce al colapso de la región de atracción [ver Aguirre et al, 1997]. Por otra parte, podemos encontrar órbitas periódicas no simétricas **PA** para valores arbitrariamente pequeños de α_0 (Teorema 4.3.c)). De aquí que conjeturemos que tales órbitas periódicas no simétricas aparecen debido a una bifurcación que consiste en el rompimiento de una órbita simétrica. Esto está basado en el hecho de que para valores pequeños y para valores grandes del parámetro $\delta > 0$, el sistema de control tiene una órbita periódica (ésta órbita es la predicha en el Teorema 4.3.a)), y cuando la razón de convergencia al origen es aumentada (por el incremento del valor del parámetro δ), la órbita periódica simétrica **PA** se bifurca para producir al menos tres órbitas: una órbita periódica simétrica **PA** más dos órbitas periódicas no simétricas **PA**. Todas éstas órbitas están localizadas sobre la frontera de la región de atracción del origen.

4.5.1 Órbitas periódicas no simétricas PA virtuales

Aquí probaremos que para las condiciones c_2 y c_5 existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico, pero no creemos que éstas correspondan a auténticas órbitas periódicas (órbitas virtuales). Ellas posiblemente corresponden a los puntos de equilibrio (ver Figura 4.3).

Proposición 4.4. Sea A la matriz a lazo abierto definida como en (4.2). Si A es estrictamente inestable (todos sus eigenvalores tienen parte real positiva). Y si además d_1, d_2, d_3 satisfacen $W(i\omega_-) \neq -2$ entonces existen 2 órbitas periódicas no simétricas PA, una correspondiendo a \mathbf{c}_2 y la otra correspondiendo a \mathbf{c}_5 .

Demostración. Sólo haremos la prueba para \mathbf{c}_2 , el resultado para \mathbf{c}_5 es consecuencia de que para $\alpha_0 > 0$, $F_{\mathbf{c}_5}(a, -\alpha_0) = -F_{\mathbf{c}_2}(a, \alpha_0)$ y $G_{\mathbf{c}_5}(a, -\alpha_0) = G_{\mathbf{c}_2}(a, \alpha_0)$. De aquí que si $\alpha_0 > 0$ y $a > 0$ son soluciones de las ecuaciones (2.5) y (2.6) y satisfacen \mathbf{c}_2 , entonces $-\alpha_0 < 0$ y $a > 0$ son soluciones de las ecuaciones (2.5) y (2.6) y además satisfacen \mathbf{c}_5 .

• Si $-2 < W(i\omega_-) < -1$

Aquí $\frac{1}{2} < \frac{-1}{W(i\omega_-)} < 1$. Primero mostremos la unicidad:

De la ecuación (2.6) obtenemos $G(a, \alpha_0) = \frac{-1}{W(i\omega_-)} \in (\frac{1}{2}, 1)$. De la proposición A4, α_0 debe satisfacer $0 < \alpha_0 < 1$, de donde $G(a, \alpha_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}N \left(\frac{a}{1-\alpha_0} \right)$. Entonces $1 + W(i\omega_-)G(a, \alpha_0) = 0$ si y sólo si

$$a = (1 - \alpha_0)N^{-1} \left(\frac{-2}{W(i\omega_-)} - 1 \right) \quad (4.13)$$

Reemplazando (4.13) en (2.5) obtenemos

$$\alpha_0 = \frac{W(0) \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{1}{x_0} + \frac{1}{\pi} x_0 \sqrt{1 - \frac{1}{x_0^2}} \right]}{1 + W(0) \left[1/2 + \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{1}{x_0} + \frac{1}{\pi} x_0 \sqrt{1 - \frac{1}{x_0^2}} \right]} \quad (4.14)$$

donde $x_0 = N^{-1} \left(\frac{-2}{W(i\omega_-)} - 1 \right)$. Con esto queda demostrada la unicidad ya que a y α_0 están obligadas a quedar definidas como en (4.13) y (4.14).

Ahora demosremos la existencia: Con a y α_0 definidas como en (4.13) y (4.14) se ve que (a, α_0, ω_-) son solución de las ecuaciones (2.5) y (2.6). Sólo debemos verificar que $\alpha_0 > 0$ y $a > 0$, es decir $0 < \alpha_0 < 1$.

Como $\frac{1}{2} < \frac{-1}{W(i\omega_-)} < 1 \Rightarrow 1 < x_0 = N^{-1} \left(\frac{-2}{W(i\omega_-)} - 1 \right) < \infty$.

Haciendo uso del hecho de que la función $b(x) = \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi} x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$, $x^2 > 1$ es una función impar y $b(x) > \frac{1}{2}$ si $x > 1$, se obtiene que

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{1}{x_0} + \frac{1}{\pi} x_0 \sqrt{1 - \frac{1}{x_0^2}} > 0,$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{1}{x_0} + \frac{1}{\pi} x_0 \sqrt{1 - \frac{1}{x_0^2}} > 1,$$

pero $W(0) = \frac{d_3 - a_3}{a_3} < -1$ ya que $a_3 < 0$.

De aquí que tanto el numerador como el denominador de α_0 son negativos, entonces $\alpha_0 > 0$. Por otra parte

$$\alpha_0 < 1 \text{ si y sólo si } 0 > 1 + W(0) = \frac{d_3}{a_3}.$$

Pero $\frac{d_3}{a_3} < 0$ de aquí que $0 < \alpha_0 < 1$ y a esta bien definida como $a = (1 - \alpha_0)N^{-1} \left(\frac{-2}{W(i\omega_-)} - 1 \right)$

••) Cuando $W(i\omega_-) < -2$ la prueba es similar a la prueba de •). ■

Proposición 4.5. Sea A estrictamente inestable. Si d_1, d_2, d_3 satisfacen que $W(i\omega_-) = -2$ entonces existen 2 órbitas periódicas no simétricas del primer armónico, una correspondiente a \mathbf{c}_2 y con los siguientes valores $\alpha_0 = 1$, $a = \pi \frac{d_3}{d_3 - a_3}$, $\omega = \omega_- = \sqrt{\frac{1}{2}(d_2 + a_2)}$ y la otra correspondiente a \mathbf{c}_5 y con los siguientes valores $\alpha_0 = -1$, $a = \pi \frac{d_3}{d_3 - a_3}$, $\omega = \omega_- = \sqrt{\frac{1}{2}(d_2 + a_2)}$.

Demostración. Sólo haremos la prueba para \mathbf{c}_2 , para \mathbf{c}_5 es similar

Si $W(i\omega_-) = -2$ y $1 + W(i\omega_-)G(a, \alpha_0) = 0$ entonces $G(a, \alpha_0) = \frac{1}{2}$

Se sigue que $\alpha_0 = 1$ (ver proposición A4).

Además como la ecuación $\alpha_0 + W(0)F(a, \alpha_0) = 0$ debe satisfacerse para $\alpha_0 = 1$ entonces $a = \pi \frac{d_3}{d_3 - a_3}$.

Por otra parte, es inmediato que $W(i\omega_-) = -2$ implica $\omega_- = \sqrt{\frac{1}{2}(d_2 + a_2)}$ y $2(d_3 + a_3) = (d_1 + a_1)(d_2 + a_2)$. ■

Teorema 4.4. Sea A estrictamente inestable. Si consideramos la parametrización (4.3) siempre existen 2 órbitas periódicas no simétricas del primer armónico para todo valor positivo de δ , una correspondiente a \mathbf{c}_2 y otra correspondiente a \mathbf{c}_5 . Además existe $\tilde{\alpha}_0$ tal que α_0 , como función de δ , satisface $\alpha_0 > \tilde{\alpha}_0 > 0$.

Demostración. Primero, considerar el caso cuando δ_0 es una raíz del polinomio

$$2(k_3\delta^3 + a_3) - (k_1\delta + a_1)(k_2\delta^2 + a_2) \quad (4.15)$$

En este caso escogemos $\omega = \omega_- = \sqrt{\frac{1}{2}(k_2\delta_0^2 + a_2)}$ para garantizar que $W(i\omega_-) = -2$ y escogemos α_0 y a como fue indicado en la Proposición 4.5. Es claro que α_0 no está próximo al cero ($\alpha_0 = 1$).

Ahora, considerar el caso cuando δ_0 no es una raíz del polinomio (4.5), notar al final de la prueba de la proposición 4.5 que si δ_0 no es una raíz de tal polinomio entonces necesariamente $W(i\omega_-) \neq -2$, entonces como $W(i\omega_-)$ es un número real y $W(i\omega_-) < -1$ el resto de la prueba de la existencia de 2 órbitas periódicas no simétricas del primer armónico se sigue como en la Proposición 4.4.

Finalmente probaremos la existencia de $\tilde{\alpha}_0$. Como en la prueba de la proposición 4.4 sólo consideraremos la condición c_2 . Tenemos que α_0 está definida por (4.14). Primero observar que la no existencia de $\tilde{\alpha}_0$ implica que exista una sucesión $(\delta_m)_m$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_0(\delta_m) = 0$. Por otra parte, tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_0(\delta_m) = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} x_0(\delta_m) = 1 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} W(i\omega_-(\delta_m)) + 1 = 0 \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} r_+(\delta_m) = 0$$

donde $r_+(\delta)$ está definida como en (4.11) y es la única raíz negativa del polinomio

$$(a_1 a_2 - a_3)r^2 + (a_3 + k_3\delta^3 - a_2 k_1 \delta - a_1 k_2 \delta^2)r + (k_1 k_2 - k_3)\delta^3 = 0$$

De aquí que $\lim_{m \rightarrow \infty} r_+(\delta_m) = 0$ implica que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (a_3 + k_3\delta_m^3 - a_1 k_2 \delta_m^2 - a_2 k_1 \delta_m)r_+(\delta_m) + (k_1 k_2 - k_3)\delta_m^3 = 0$$

Pueden distinguirse 2 casos:

Primero supóngase que $(a_3 + k_3\delta_m^3 - a_1 k_2 \delta_m^2 - a_2 k_1 \delta_m)r_+(\delta_m) \rightarrow 0$, cuando $m \rightarrow \infty$. Entonces

$\lim_{m \rightarrow \infty} (k_1 k_2 - k_3)\delta_m^3 = 0$, o equivalentemente $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m = 0$. Sin embargo $\lim_{m \rightarrow \infty} \delta_m = 0$ implica que

$\lim_{m \rightarrow \infty} r_+(\delta_m) = \frac{-a_3}{a_1 a_2 - a_3}$, lo cual es una contradicción porque $\frac{-a_3}{a_1 a_2 - a_3}$ es una constante diferente de cero.

Por el contrario, supóngase que $(a_3 + k_3\delta_m^3 - a_1 k_2 \delta_m^2 - a_2 k_1 \delta_m)r_+(\delta_m) \not\rightarrow 0$, cuando $m \rightarrow \infty$. Ya que

$\lim_{m \rightarrow \infty} r_+(\delta_m) = 0$ entonces existe una subsucesión $(\delta_{m_n})_n$ tal que $(a_3 + k_3\delta_{m_n}^3 - a_1 k_2 \delta_{m_n}^2 - a_2 k_1 \delta_{m_n})$

diverge a infinito cuando $n \rightarrow \infty$, pero esto implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{m_n} = \infty$ y por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} r_+(\delta_{m_n}) =$

$-\frac{k_1 k_2 - k_3}{k_3}$. Esto es una contradicción porque $\frac{k_1 k_2 - k_3}{k_3}$ es diferente de cero. ■

Observación 4.6. El Teorema anterior nos hace pensar que el par de órbitas periódicas no simétricas predichas en esta sección en realidad corresponden a los puntos de equilibrio. La razón es que una órbita periódica no simétrica se escribe como $u(t) = \alpha_0 + a \sin \omega t$. Si se originara de una bifurcación entonces deberíamos tener α_0 's incrementándose continuamente desde el origen, pero α_0 nunca está próxima al cero cuando el sistema esta sujeto a la retroalimentación de alta ganancia. Entonces tales órbitas están presentes para todo $\delta \in (0, \infty)$ con α_0 que nunca está próxima al cero. De aquí que ellas deberían corresponder a los puntos de equilibrio.

4.6 Caso en el que la matriz A tiene valores propios con parte real negativa y positiva

En [Suárez et al, 1995] se probó para sistemas cuyos valores propios tienen partes reales positivas y negativas, que para una retroalimentación que solamente reubica los valores propios con parte real positiva, la region de atracción es homeomórfica al producto de regiones de atracción asociadas a las partes estable y estabilizada. Para $n = 3$ esto implica que *i*) si A tiene un valor propio negativo y 2 valores propios con parte real positiva, la región de atracción del sistema a lazo cerrado es homeomórfica al cilindro $R \times B^2$, *ii*) si A tiene un valor propio positivo y 2 valores propios con parte real negativa, la región de atracción del sistema a lazo cerrado es homeomórfica al cilindro $R^2 \times B^1$, donde B^1 es un intervalo.

Sea A definida como en (4.2) y sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ los eigenvalores de A . Los parametros a_i 's, $1 \leq i \leq 3$ pueden ser escritos como $a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$, $a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$, y $a_3 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$. Así que $a_1a_2 - a_3 = -(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)$

4.6.1 A con un valor propio negativo

Teorema 4.1. Considerar el sistema (4.1) con 1 valor propio negativo y 2 valores propios con parte real positiva. Entonces,

a) Si $(\lambda_2, \lambda_3 \in C^+/R)$ o $(\lambda_2, \lambda_3 \in R^+ \text{ y } [\lambda_1 > \max(-\lambda_2, -\lambda_3) \text{ o } \lambda_1 < \min(-\lambda_2, -\lambda_3)])$ o $(\lambda_2, \lambda_3 \in R^+ \text{ y } \lambda_2 = \lambda_3 \text{ y } \lambda_1 \neq -\lambda_2)$ entonces el sistema (4.1) tiene una órbita periódica simétrica del primer armónico y no tiene órbitas periódicas no simétricas del primer armónico. La órbita se contrae al origen cuando δ diverge al infinito.

b) Si $\lambda_2, \lambda_3 \in R^+$ y $-\lambda_1$ esta entre λ_2 y λ_3 , la existencia de órbitas periódicas simétricas del primer armónico depende del parametro a_2 . Específicamente, cuando $a_2 > 0$ el sistema (4.1) tiene 2 órbitas periódicas simétricas del primer armónico cuando δ es suficientemente grande. Una de las órbitas periódicas simétricas es inestable y se contrae al origen, y la otra es radialmente estable y tiende a ser una elipse constante. Cuando $a_2 \leq 0$ el sistema (4.1) tiene una órbita periódica simétrica del primer armónico que es inestable y se contrae al origen. Además, no existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico (ver Figura 4.4).

Demostración de a). Aquí $a_3 > 0$ y $a_1 a_2 - a_3 < 0$. Entonces la prueba es similar a la prueba de los teoremas 4.1 y 4.2.

Demostración de b). Aquí $a_3 > 0$ y $a_1 a_2 - a_3 > 0$

Entonces la prueba se sigue usando la Proposición A11 y siguiendo los mismos pasos que las pruebas de los teoremas 4.1 y 4.2.

4.6.2 A con un valor propio positivo

Sean $\lambda_1 \in R^+$, $\lambda_2, \lambda_3 \in C^-$ los eigenvalores de A .

Teorema 4.6. Considerar el sistema (4.1) con un eigenvalor positivo y dos eigenvalores con parte real negativa. Se cumple lo siguiente

a) Si $(\lambda_2, \lambda_3 \in C^-/R)$ o $(\lambda_2, \lambda_3 \in R^- \text{ y } [\lambda_1 > \max(-\lambda_2, -\lambda_3) \text{ o } \lambda_1 < \min(-\lambda_2, -\lambda_3)])$ o $(\lambda_2, \lambda_3 \in R^- \text{ y } \lambda_2 = \lambda_3 \text{ y } \lambda_1 \neq -\lambda_2)$ entonces la existencia de órbitas periódicas simétricas del primer armónico depende del parámetro a_2 . Específicamente, cuando $a_2 > 0$ el sistema (4.1) tiene 2 órbitas periódicas simétricas del primer armónico si δ es suficientemente grande. Una es radialmente inestable y se contrae

al origen, y la otra es radialmente estable y tiende a una elipse constante cuando δ diverge al infinito. Cuando $a_2 \leq 0$ el sistema (4.1) tiene solamente una órbita periódica simétrica del primer armónico, la cual es radialmente inestable y se contrae al origen. Además no se puede decir algo acerca de la existencia o no de órbitas periódicas no simétricas.

b) Si $\lambda_2, \lambda_3 \in R^-$ y $-\lambda_1$ esta entre λ_2 y λ_3 , entonces el sistema (4.1) tiene solamente una órbita periódica simétrica del primer armónico, la cual es radialmente inestable y se contrae al origen cuando δ es suficientemente grande. Además, si la función $\omega^2(\delta)$ definida en (4.8) es positiva para toda $\delta > 0$ (considerando la parametrización (4.3)) entonces existe una bifurcación en el número de órbitas periódicas no simétricas del primer armónico (ver Figura 4.5).

Demostración de a). Aquí $a_3 < 0$ y $a_1 a_2 - a_3 > 0$

Entonces para el análisis de las órbitas simétricas la prueba depende de la proposición A11 y se sigue en forma similar que el Teorema 4.2.

Para el caso de la existencia o no existencia de órbitas periódicas no simétricas hacemos el siguiente análisis: Considerar el discriminante

$$D(\delta) = (-a_3 - k_3 \delta^3 + a_2 k_1 \delta + a_1 k_2 \delta^2)^2 - 4(a_1 a_2 - a_3)(k_1 k_2 - k_3) \delta^3$$

Estudiamos las variaciones de signo de los coeficientes del polinomio $-k_3 \delta^3 + a_1 k_2 \delta^2 + a_2 k_1 \delta - a_3$.

Se sabe que $-k_3 < 0$ y $-a_3 > 0$. Tomando en cuenta todas las posibilidades en los signos de a_1 y a_2 podemos ver que puede haber 1 ó 3 variaciones de signo, usando la regla de Descartes se ve que el polinomio tiene al menos una raíz real positiva δ_0 y entonces $D(\delta_0) = -4(a_1 a_2 - a_3)(k_1 k_2 - k_3) \delta_0^3 < 0$, por lo tanto $r(\delta)$ no esta definida para todo $\delta > 0$ y no podemos aplicar las ideas expuestas en el caso de la matriz A estrictamente inestable y de aquí que no podamos decir algo acerca de la existencia o no de órbitas periódicas no simétricas del primer armónico.

Demostración de b). Aquí $a_3 < 0$ y $a_1 a_2 - a_3 < 0$

De aquí que $r(\delta)$ es continua y negativa para toda $\delta > 0$.

Entonces la prueba se obtiene siguiendo los mismos pasos del Teorema 4.3 y Teorema 4.4.

Observación 4.7. Como en el caso en el que la matriz A es Hurwitz, el número de puntos de bifurcación de órbitas periódicas simétricas del primer armónico está acotado por el número de raíces positivas del polinomio $(a_3 + k_3\delta^3 - a_2k_1\delta - a_1k_2\delta^2)^2 - 4(a_1a_2 - a_3)(k_1k_2 - k_3)\delta^3$. Sin embargo, debemos tomar en cuenta otro parámetro. Este es el parámetro a_2 (ver teoremas 4.5 b) y 4.6 a). El signo de a_2 determina la existencia de una o dos órbitas periódicas simétricas **PA** cuando δ es suficientemente grande y esta diferencia en el comportamiento podría modificar el número de puntos de bifurcación en cada caso.

4.7 El 3-Integrador

Considerar el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{S}(K^T x) \quad (4.16)$$

Este sistema es llamado el 3-integrador. En [Sussman, H. J. and Yang, Y, 1991; Fuller, A. T., 1969] se muestra que el sistema (4.16) no es globalmente asintóticamente estable con cualquier función de control de la forma $\text{sat}(k^T u)$ donde sat es la función de saturación. La idea en esos trabajos es encontrar trayectorias que divergen al infinito. En ésta sección predecimos la existencia de una órbita periódica radialmente inestable sobre la frontera de la **RA** del origen. Ya que la **RA** es no acotada [ver Suárez et al.], se puede ver con simulación que la **RA** es un cilindro. De tal manera que las trayectorias fuera del cilindro divergen al infinito. Por otra parte, cuando se considera la parametrización (4.3), las órbitas periódicas se contraen al origen. Esto implica que la **RA** del origen se reduce al origen cuando $\delta \rightarrow \infty$.

Primero nótese que de (3.2) se tiene que

$$1 + W(i\omega) = \frac{d_3 - d_1\omega^2 + \omega(d_2 - \omega^2)i}{-\omega^3 i} \quad (4.17)$$

Buscamos $\omega > 0$, $r \leq 0$ tal que $1 + W(i\omega) = r$, es decir

$$\begin{aligned} d_3 - d_1\omega^2 &= 0 \\ \omega(d_2 - \omega^2) &= -\omega^3 r \end{aligned} \quad (4.18)$$

de aquí que $\omega^2 = \frac{d_3}{d_1}$ y $r = -\frac{d_1 d_2 - d_3}{d_3}$.

Proposición 4.7. El 3-integrador (4.16) satisface lo siguiente:

a). Existe una y sólo una órbita periódica simétrica del primer armónico correspondiente a

$$\omega^2 = \frac{d_3}{d_1}, \quad r = -\frac{d_1 d_2 - d_3}{d_3}, \quad N(a) = \frac{d_3}{d_1 d_2}, \quad a = N^{-1} \left(\frac{d_3}{d_1 d_2} \right)$$

b). Las coordenadas de la órbita periódica simétrica PA satisfacen

$$\frac{x_1^2}{\frac{[N^{-1}(\frac{d_3}{d_1 d_2})]^2 (\frac{d_3}{d_1 d_2})^2}{(\frac{d_3}{d_1})^3}} + \frac{x_2^2}{\frac{[N^{-1}(\frac{d_3}{d_1 d_2})]^2 (\frac{d_3}{d_1 d_2})^2}{(\frac{d_3}{d_1})^2}} = 1,$$

$$\frac{x_2^2}{\frac{[N^{-1}(\frac{d_3}{d_1 d_2})]^2 (\frac{d_3}{d_1 d_2})^2}{(\frac{d_3}{d_1})^2}} + \frac{x_3^2}{\frac{[N^{-1}(\frac{d_3}{d_1 d_2})]^2 (\frac{d_3}{d_1 d_2})^2}{(\frac{d_3}{d_1})^2}} = 1$$

c). La órbita periódica simétrica PA es radialmente inestable.

d). Cuando $\delta \rightarrow \infty$ la órbita periódica simétrica PA se contrae al origen.

e). Las órbitas periódicas simétricas PA son anidadas.

Demostración de a). Se sigue inmediatamente de $1 + W(i\omega) = r$ y $1 + N(a)W(i\omega) = 0$. ■

Demostración de b). Reemplazando $\sigma(u(t)) = aN(a) \sin \omega t$ en la ecuación $\frac{d^3 x}{dt^3} = \sigma(u(t))$ obtenemos $\frac{d^3 x}{dt^3} = aN(a) \sin \omega t$. La solución es

$$x(t) = \frac{aN(a)}{\omega^3} \cos \omega t, \quad y(t) = \frac{-aN(a)}{\omega^2} \sin \omega t, \quad z(t) = \frac{-aN(a)}{\omega} \cos \omega t$$

La prueba se sigue reemplazando los valores de ω^2 , a , $N(a)$ obtenidos en a). ■

Demostración de c). Como $\text{Im } W(i\omega) = \frac{d_3}{\omega^3} - \frac{d_1}{\omega}$ entonces $\frac{d}{d\omega} \text{Im } W(i\omega) \Big|_{\omega^2 = \frac{d_3}{d_1}} = -2 \frac{d_1^2}{d_3} < 0$. ■

Demostración de d). Definimos las funciones

$$\bar{f}(\delta) = \frac{[N^{-1}(\frac{k_3}{k_1 k_2})]^2 (\frac{k_3}{k_1 k_2})^2}{(\frac{k_3}{k_1})^3 \delta^6}, \quad \bar{g}(\delta) = \frac{[N^{-1}(\frac{k_3}{k_1 k_2})]^2 (\frac{k_3}{k_1 k_2})^2}{(\frac{k_3}{k_1})^2 \delta^4}, \quad \bar{h}(\delta) = \frac{[N^{-1}(\frac{k_3}{k_1 k_2})]^2 (\frac{k_3}{k_1 k_2})^2}{\frac{k_3}{k_1} \delta^2}$$

Se satisfacen las relaciones $\frac{x^2}{\bar{f}(\delta)} + \frac{y^2}{\bar{g}(\delta)} = 1$ y $\frac{y^2}{\bar{g}(\delta)} + \frac{z^2}{\bar{h}(\delta)} = 1$. Es inmediato que $\bar{f}(\delta)$, $\bar{g}(\delta)$, y $\bar{h}(\delta) \rightarrow 0$ cuando $\delta \rightarrow \infty$. ■

Demostración de e). Las derivadas de $\bar{f}(\delta)$, $\bar{g}(\delta)$ y $\bar{h}(\delta)$ satisfacen

$$\bar{f}'(\delta) = \frac{-6 [N^{-1}(\frac{k_3}{k_1 k_2})]^2 (\frac{k_3}{k_1 k_2})^2}{(\frac{k_3}{k_1})^3 \delta^7}, \quad \bar{g}'(\delta) = \frac{-4 [N^{-1}(\frac{k_3}{k_1 k_2})]^2 (\frac{k_3}{k_1 k_2})^2}{(\frac{k_3}{k_1})^2 \delta^5},$$

$$\bar{h}'(\delta) = \frac{-2 \left[N^{-1} \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right) \right]^2 \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right)^2}{\frac{k_3}{k_1} \delta^3}$$

de aquí que $\bar{f}(d)$, $\bar{g}(\delta)$ y $\bar{h}(\delta)$ son decrecientes. ■

Observación 4.8. Con el análisis de todos los casos (A estable, A inestable, A con un eigenvalor positivo, A con un eigenvalor negativo), podemos hacer notar que independientemente de cual sea la matriz A y con la parametrización de alta ganancia (4.3) siempre existe al menos una órbita periódica simétrica del primer armónico cuando δ es suficientemente grande, la cual es radialmente inestable y se contrae al origen. Esto podría ser interpretado como que la RA se reduce al origen.

4.8 Conclusiones

En éste capítulo usamos el método de balance de primer armónico para estudiar propiedades de la región de atracción del origen en sistemas de control lineales sujetos a una retroalimentación de alta ganancia con saturación. En particular, describimos la existencia de órbitas periódicas no simétricas desde el punto de vista de una aproximación de primer armónico en sistemas tri-dimensionales. En sistemas con uno o con tres eigenvalores a lazo abierto con parte real negativa, por ejemplo, no existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico. Cuando todos los eigenvalores a lazo abierto tienen parte real positiva demostramos la presencia de órbitas periódicas no simétricas (de primer armónico) para ciertos valores del parámetro de alta ganancia. Ya que tales órbitas no simétricas no existen para valores pequeños y para valores grandes del parámetro, entonces esto puede ser visto como una evidencia de una bifurcación que consiste en el rompimiento de órbitas simétricas. Cuando el sistema tiene 2 eigenvalores a lazo abierto con parte real negativa, el análisis de primer armónico es más complicado, pero también puede obtenerse información acerca de la posible existencia de órbitas no simétricas.

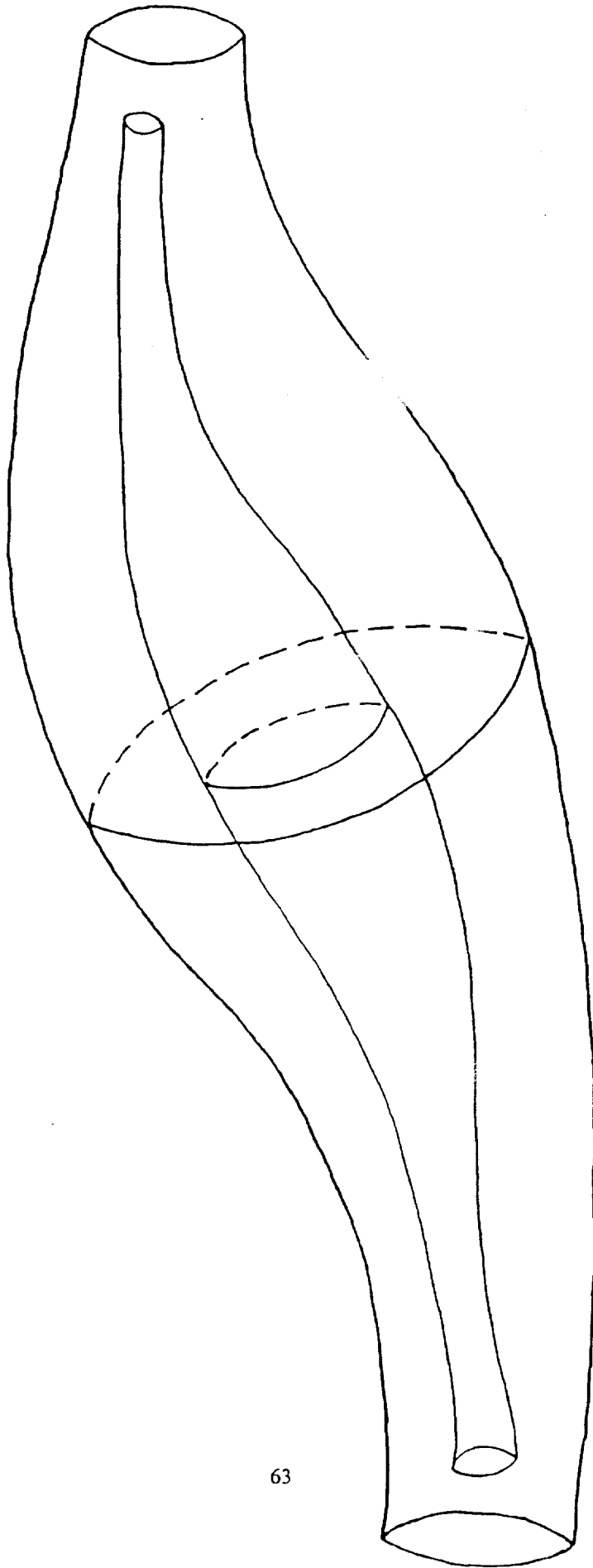
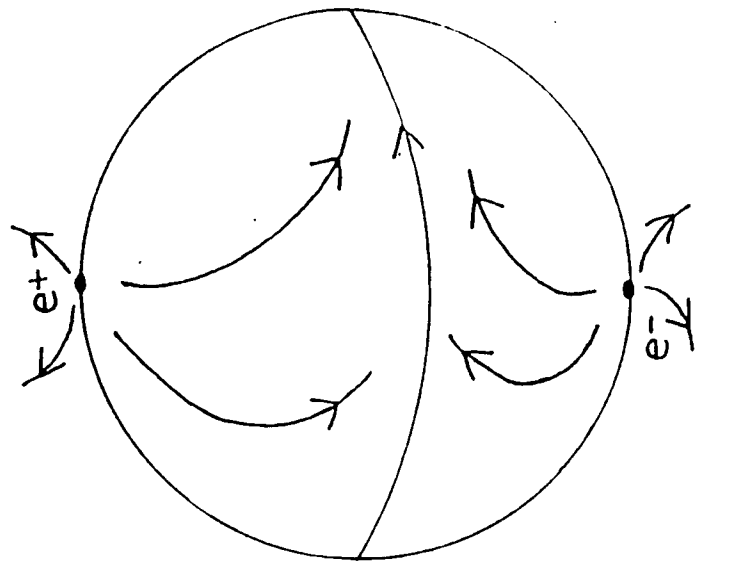
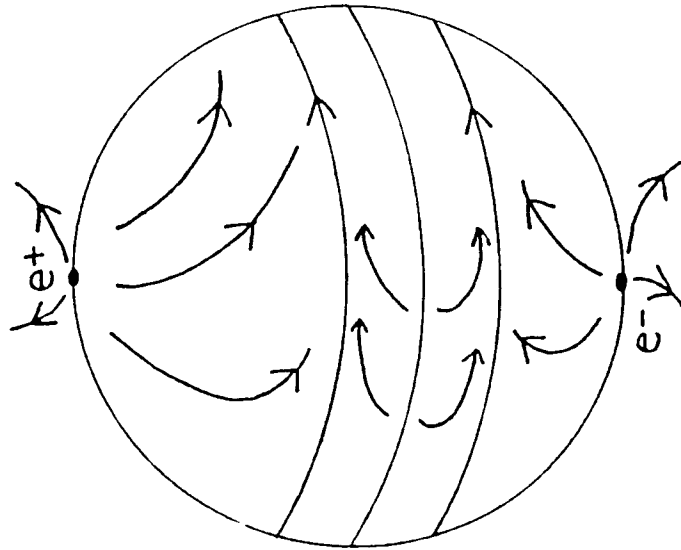


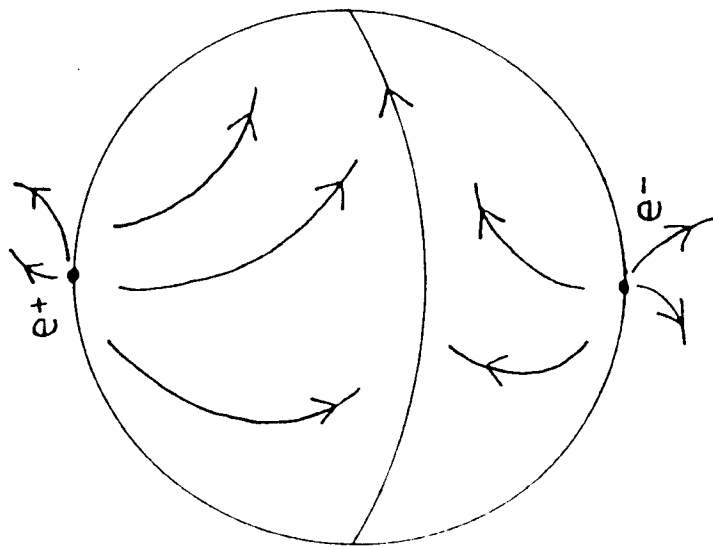
Figura 4.1.1. A es Hurwitz y el parámetro δ es suficientemente grande



δ suficientemente grande



$\delta \in R_{e_1}$



δ suficientemente pequeño

Figura 4.2. La figura ilustra el rompimiento de una órbita periódica simétrica PA cuando A es antiestable

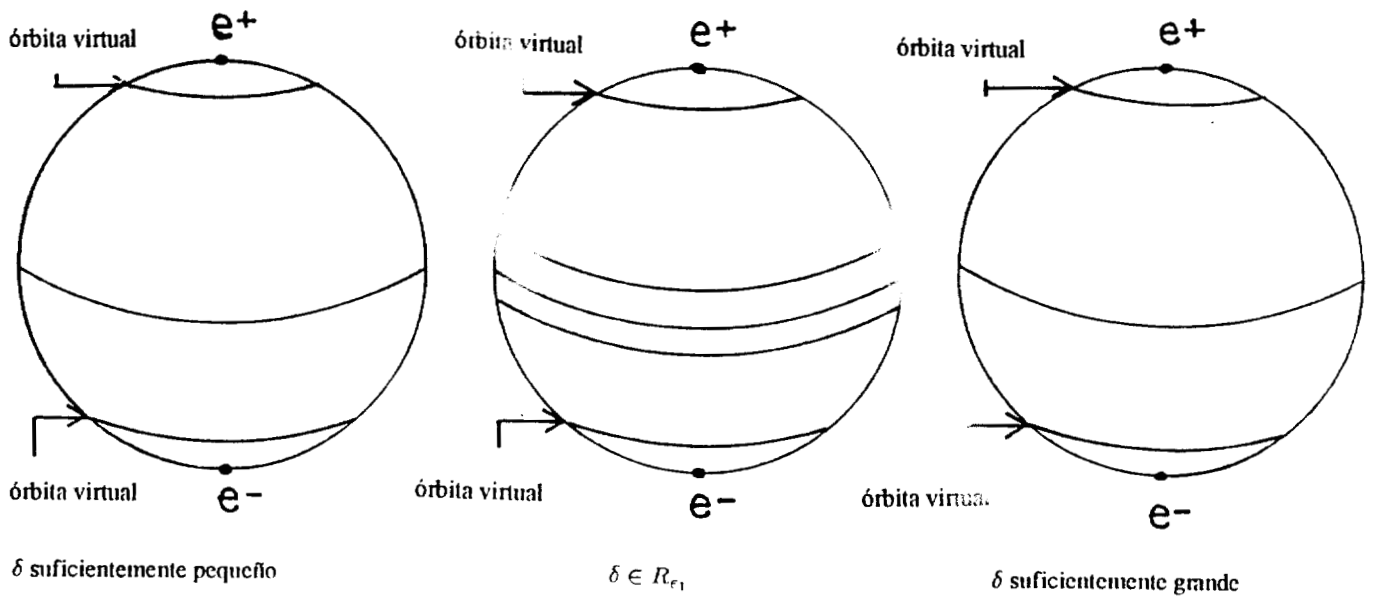


Figura 4.3. Orbitas periódicas virtuales cuando A es antiestable

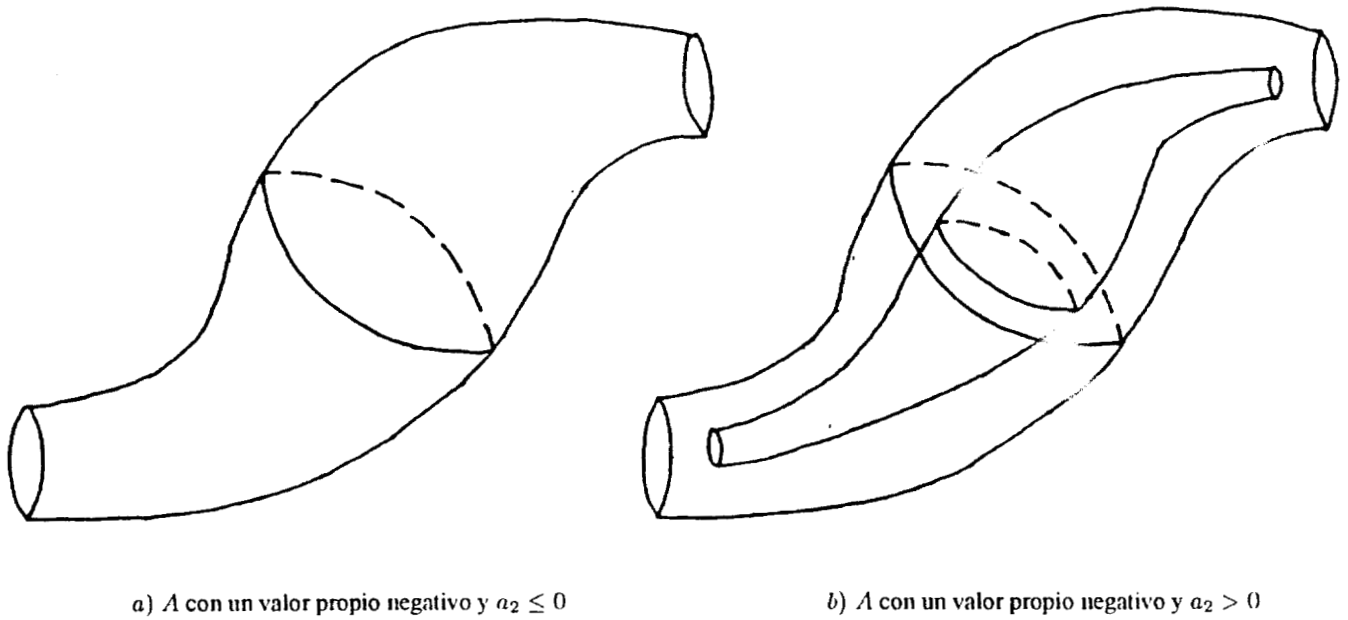


Figura 4.4

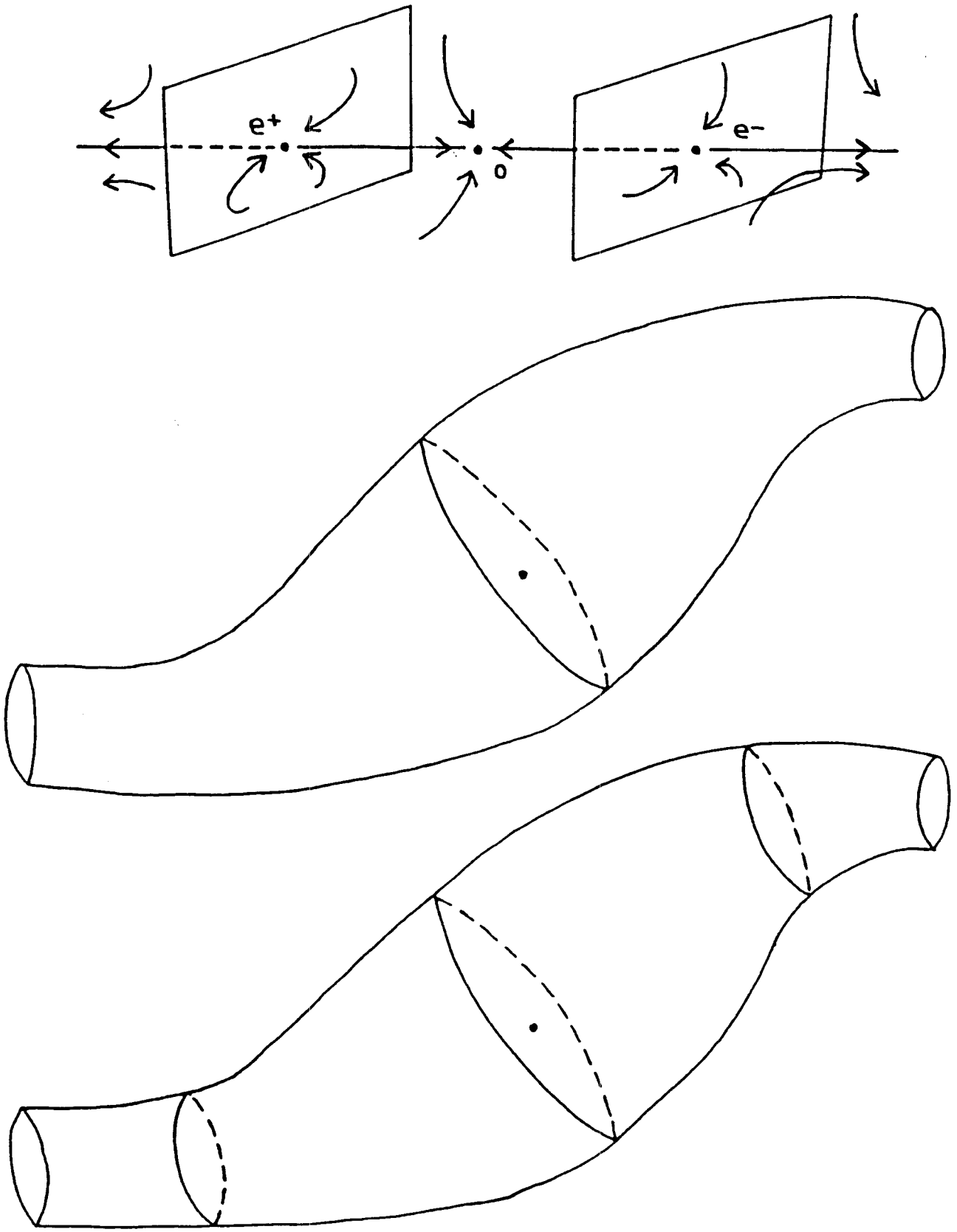


Figura 4.5. Posible rompimiento de una órbita simétrica cuando Λ tiene un valor propio positivo y dos con parte real negativa

Apéndice de la parte 1

A.1. Cálculo de las funciones $F(a, \alpha_0)$ y $G(a, \alpha_0)$

Para calcular $F(a, \alpha_0)$ y $G(a, \alpha_0)$ debemos considerar 6 casos diferentes: $\mathbf{c_1)} \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a} \leq -1$,

$\mathbf{c_2)} \frac{-1-\alpha_0}{a} \leq -1 < \frac{1-\alpha_0}{a} < 1$, $\mathbf{c_3)} -1 < \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a} < 1$,

$\mathbf{c_4)} \frac{-1-\alpha_0}{a} \leq -1 < 1 \leq \frac{1-\alpha_0}{a}$, $\mathbf{c_5)} -1 < \frac{-1-\alpha_0}{a} < 1 \leq \frac{1-\alpha_0}{a}$ y $\mathbf{c_6)} 1 \leq \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a}$.

Lema A1. El valor de $F(a, \alpha_0)$ y $G(a, \alpha_0)$ para cada uno de estos casos son los siguientes:

$$\mathbf{c_1)} F(a, \alpha_0) = 1, \quad G(a, \alpha_0) = 0.$$

$$\mathbf{c_2)} F(a, \alpha_0) = \frac{1}{2}(1 + \alpha_0) - \frac{(1-\alpha_0)}{\pi} \sin^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a} - \frac{a}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2},$$

$$G(a, \alpha_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\sin^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a} + \frac{(1-\alpha_0)}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2} \right).$$

$$\mathbf{c_3)} F(a, \alpha_0) = \frac{1+\alpha_0}{\pi} \sin^{-1} \frac{1+\alpha_0}{a} - \frac{1-\alpha_0}{\pi} \sin^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a} + \frac{a}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} - \frac{a}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2},$$

$$G(a, \alpha_0) = \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{1+\alpha_0}{a} + \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a} + \frac{1+\alpha_0}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} + \frac{1-\alpha_0}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2}.$$

$$\mathbf{c_4)} F(a, \alpha_0) = \alpha_0, \quad G(a, \alpha_0) = 1.$$

$$\mathbf{c_5)} F(a, \alpha_0) = -\frac{1}{2}(1 - \alpha_0) + \frac{(1+\alpha_0)}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right) + \frac{a}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2},$$

$$G(a, \alpha_0) = +\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\sin^{-1} \frac{1+\alpha_0}{a} + \frac{1+\alpha_0}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} \right).$$

$$\mathbf{c_6)} F(a, \alpha_0) = 1, \quad G(a, \alpha_0) = 0.$$

Demostración. Debemos calcular las integrales definidas en las ecuaciones (2.7) y (2.8) para el caso en que η es la función de saturación \mathcal{S} . Primero hacemos algunas observaciones acerca de la función de saturación.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta) &= \begin{cases} 1, & \alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta > 1 \\ \alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta, & -1 < \alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta < 1 \\ -1, & \alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta < -1 \end{cases} \\ &= \alpha_0 + a \cdot \begin{cases} \frac{1-\alpha_0}{a}, \operatorname{sen} \theta > \frac{1-\alpha_0}{a} \\ \operatorname{sen} \theta, \frac{-1-\alpha_0}{a} < \operatorname{sen} \theta < \frac{1-\alpha_0}{a} \\ \frac{-1-\alpha_0}{a}, \operatorname{sen} \theta < \frac{-1-\alpha_0}{a} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathbf{c_1)} \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a} \leq -1$$

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{S}(\alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta) d\theta = \alpha_0 2\pi + a \int_0^{2\pi} \frac{1-\alpha_0}{a} d\theta = \alpha_0 2\pi + (1-\alpha_0) 2\pi = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} S(\alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta = \alpha_0 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta d\theta + a \int_0^{2\pi} \frac{1 - \alpha_0}{a} \operatorname{sen} \theta d\theta = 0 + 0 = 0$$

$$c_2) \frac{-1 - \alpha_0}{a} \leq -1 < \frac{1 - \alpha_0}{a} < 1$$

$$a) \frac{1 - \alpha_0}{a} = 0 \text{ e.d. } 1 = \alpha_0.$$

Las integrales de este inciso satisfacen las fórmulas del inciso b).

$$b) \alpha_0 \neq 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} S(\alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta) d\theta &= \alpha_0 2\pi + a \int_{\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1 - \alpha_0}{a}\right)}^{\pi - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1 - \alpha_0}{a}\right)} \frac{1 - \alpha_0}{a} d\theta \\ &\quad + a \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta d\theta}_{\text{cero}} - \int_{\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1 - \alpha_0}{a}\right)}^{\pi - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1 - \alpha_0}{a}\right)} \operatorname{sen} \theta d\theta \\ &= \alpha_0 2\pi + (1 - \alpha_0) \left(\pi - 2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{1 - \alpha_0}{a} \right) \\ &\quad - 2a \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \alpha_0}{a} \right)^2} \\ \int_0^{2\pi} S(\alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta &= \alpha_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta d\theta}_{\text{cero}} + a \int_{\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1 - \alpha_0}{a}\right)}^{\pi - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1 - \alpha_0}{a}\right)} \frac{1 - \alpha_0}{a} \operatorname{sen} \theta d\theta \\ &\quad + a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta - a \int_{\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1 - \alpha_0}{a}\right)}^{\pi - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1 - \alpha_0}{a}\right)} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \\ &= \frac{a\pi}{2} + (1 - \alpha_0) \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \alpha_0}{a} \right)^2} + a \operatorname{sen}^{-1} \frac{1 - \alpha_0}{a} \end{aligned}$$

$$c_3) -1 < \frac{-1 - \alpha_0}{a} < \frac{1 - \alpha_0}{a} < 1$$

$$a) \frac{-1 - \alpha_0}{a} = 0 \text{ e.d. } \alpha_0 = -1$$

Las integrales de este inciso satisfacen las fórmulas del inciso c).

$$b) \frac{1 - \alpha_0}{a} = 0 \text{ e.d. } \alpha_0 = 1$$

Lo mismo que inciso a).

$$c) \alpha_0 \neq 1, -1$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} S(\alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta) d\theta &= \alpha_0 2\pi + a \int_{-\pi - \operatorname{sen}^{-1} \frac{-1-\alpha_0}{a}}^{\operatorname{sen}^{-1} \frac{-1-\alpha_0}{a}} \left(\frac{-1-\alpha_0}{a} \right) d\theta + a \int_{\operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{1-\alpha_0}{a} \right)}^{\pi - \operatorname{sen}^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a}} \left(\frac{1-\alpha_0}{a} \right) d\theta \\
&+ a \int_{\operatorname{sen}^{-1} \frac{-1-\alpha_0}{a}}^{\operatorname{sen}^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a}} \operatorname{sen} \theta d\theta + a \int_{\pi - \operatorname{sen}^{-1} \frac{-1-\alpha_0}{a}}^{\pi - \operatorname{sen}^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a}} \operatorname{sen} \theta d\theta \\
&= 2(-1-\alpha_0) \operatorname{sen}^{-1} \frac{-1-\alpha_0}{a} - 2(1-\alpha_0) \operatorname{sen}^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a} \\
&- 2a \left[\sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a} \right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{-1-\alpha_0}{a} \right)^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} S(\alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta &= \\
&= \underbrace{\alpha_0 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta d\theta}_{\text{cero}} + a \int_{-\pi - \operatorname{sen}^{-1} \frac{-1-\alpha_0}{a}}^{\operatorname{sen}^{-1} \frac{-1-\alpha_0}{a}} \frac{-1-\alpha_0}{a} \operatorname{sen} \theta d\theta \\
&+ a \int_{\operatorname{sen}^{-1} \frac{-1-\alpha_0}{a}}^{\pi - \operatorname{sen}^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a}} \frac{1-\alpha_0}{a} \operatorname{sen} \theta d\theta \\
&+ a \int_{\operatorname{sen}^{-1} \frac{-1-\alpha_0}{a}}^{\operatorname{sen}^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a}} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta + a \int_{\pi - \operatorname{sen}^{-1} \frac{-1-\alpha_0}{a}}^{\pi - \operatorname{sen}^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a}} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \\
&= (1+\alpha_0) \sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a} \right)^2} + (1-\alpha_0) \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a} \right)^2} + a \left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a} - \operatorname{sen}^{-1} \frac{-1-\alpha_0}{a} \right).
\end{aligned}$$

$$c_4) \frac{-1-\alpha_0}{a} \leq -1 < 1 \leq \frac{1-\alpha_0}{a}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} S(\alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta) d\theta &= \alpha_0 2\pi + a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta d\theta = \alpha_0 2\pi \\
\int_0^{2\pi} S(\alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta &= \alpha_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta d\theta}_{\text{cero}} + a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = a\pi
\end{aligned}$$

$$c_5) -1 < \frac{-1-\alpha_0}{a} < 1 \leq \frac{1-\alpha_0}{a}$$

$$a) \frac{-1-\alpha_0}{a} = 0 \text{ e.d. } \alpha_0 = -1$$

Las integrales de este inciso satisfacen las fórmulas del inciso b).

$$b) \alpha_0 \neq -1$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} S(\alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta) d\theta &= \\
&= \alpha_0 2\pi + a \int_{\operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{-1-\alpha_0}{a} \right)}^{\pi - \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{-1-\alpha_0}{a} \right)} \operatorname{sen} \theta d\theta + a \int_0^{2\pi} \frac{-1-\alpha_0}{a} d\theta - a \int_{\operatorname{sen}^{-1} \frac{-1-\alpha_0}{a}}^{\pi - \operatorname{sen}^{-1} \frac{-1-\alpha_0}{a}} \left(\frac{-1-\alpha_0}{a} \right) d\theta =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_0 2\pi + 2a \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \alpha_0}{a}\right)^2} - (1 + \alpha_0) 2\pi + (1 + \alpha_0) \left(\pi - 2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{-1 - \alpha_0}{a}\right) \\
\int_0^{2\pi} S(\alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta &= \\
&= \underbrace{\alpha_0 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta d\theta}_{\text{cero}} + a \int_{\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-1 - \alpha_0}{a}\right)}^{\pi - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-1 - \alpha_0}{a}\right)} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta + \\
&+ \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\frac{-1 - \alpha_0}{a}\right) \operatorname{sen} \theta}_{\text{cero}} - a \int_{\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-1 - \alpha_0}{a}\right)}^{\pi - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-1 - \alpha_0}{a}\right)} \frac{-1 - \alpha_0}{a} \operatorname{sen} \theta d\theta = \\
&= \frac{a\pi}{2} - a \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{-1 - \alpha_0}{a}\right) + (1 + \alpha_0) \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \alpha_0}{a}\right)^2}.
\end{aligned}$$

c₂) $-1 < 1 \leq \frac{-1 - \alpha_0}{a} \leq \frac{1 - \alpha_0}{a}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} S(\alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta) d\theta &= \alpha_0 2\pi + a \int_0^{2\pi} \left(\frac{-1 - \alpha_0}{a}\right) d\theta = \alpha_0 2\pi + (-1 - \alpha_0) 2\pi = -2\pi \\
\int_0^{2\pi} S(\alpha_0 + a \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta &= \alpha_0 \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta d\theta}_{\text{cero}} + a \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{-1 - \alpha_0}{a}}_{\text{cero}} \operatorname{sen} \theta d\theta = 0
\end{aligned}$$

■

A.2. Resultados Técnicos

Las siguientes proposiciones son útiles para probar la existencia o no existencia de órbitas periódicas no simétricas del primer armónico. **Proposición A2.** Dada $F(a, \alpha_0)$ como en el Lema A1 se cumple lo siguiente

a) Para **c₂**) tenemos que $F(a, \alpha_0) > 0$ y $F(a, \alpha_0) - \alpha_0 < 0$,

b) Para **c₃**) tenemos que $F(a, \alpha_0) > 0$ y $F(a, \alpha_0) - \alpha_0 < 0$ si $\alpha_0 > 0$, o $F(a, \alpha_0) < 0$ y $F(a, \alpha_0) - \alpha_0 > 0$ si $\alpha_0 < 0$,

c) Para **c₅**) tenemos que $F(a, \alpha_0) < 0$ y $F(a, \alpha_0) - \alpha_0 > 0$.

Demostración. a) Observar que en este caso α_0 es positivo ya que tenemos $1 - \alpha_0 < a \leq 1 + \alpha_0$. Primero podemos ver que $F(a, \alpha_0)$ es decreciente como función de la variable a ya que $\frac{\partial F}{\partial a} =$

$-\frac{1}{\pi}\sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2} < 0$. Así que, para α_0 fijo el mínimo valor de $F(a, \alpha_0)$ es $F(1 + \alpha_0, \alpha_0)$. Dada la función $L(\alpha_0) = F(1 + \alpha_0, \alpha_0)$ resulta que

$$L'(\alpha_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0} - \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}\right)^2}$$

$$L''(\alpha_0) = \frac{-4}{\pi(1+\alpha_0)^3 \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}\right)^2}} < 0,$$

de donde se tiene que $L'(\alpha_0)$ es decreciente y entonces $L'(\alpha_0) > \lim_{\alpha_0 \rightarrow \infty} L'(\alpha_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Esto implica que $L(\alpha_0)$ es decreciente y $L(\alpha_0) > \lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} L(\alpha_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = 0$.

Ya que $L(\alpha_0)$ es el mínimo valor de $F(a, \alpha_0)$ se tiene que $F(a, \alpha_0) > L(\alpha_0) > 0$.

Para probar la segunda parte de este inciso observese que $F(a, \alpha_0) - \alpha_0$ es decreciente como función de la variable a .

$$\text{Si } 1 - \alpha_0 \geq 0 \text{ entonces } F(a, \alpha_0) - \alpha_0 < F(1 - \alpha_0, \alpha_0) - \alpha_0 = \frac{1}{2}(1 + \alpha_0) - \frac{1}{2}(1 - \alpha_0) - \alpha_0 = 0.$$

$$\text{Si } 1 - \alpha_0 < 0 \text{ entonces } F(a, \alpha_0) - \alpha_0 < F(-1 + \alpha_0, \alpha_0) - \alpha_0 = \frac{1}{2}(1 + \alpha_0) + \frac{1}{2}(1 - \alpha_0) - \alpha_0 = 1 - \alpha_0 < 0.$$

b) Aquí solo probaremos que $F(a, \alpha_0) > 0$ si $\alpha_0 > 0$ ya que $F(a, -\alpha_0) = -F(a, \alpha_0)$. Primero vemos que $\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} - \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2}$, ya que $\alpha_0 > 0$ se tiene que $\frac{\partial F}{\partial a} < 0$ y entonces F es decreciente como una función de a . Entonces $F(a, \alpha_0) > \lim_{a \rightarrow \infty} F(a, \alpha_0) = 0$.

Como $F(a, -\alpha_0) + \alpha_0 = -(F(a, \alpha_0) - \alpha_0)$, es suficiente probar la segunda parte del inciso solamente para $\alpha_0 > 0$. Observese que $F(a, \alpha_0) - \alpha_0$ es decreciente como función de a , de aquí que $F(a, \alpha_0) - \alpha_0 < F(1 + \alpha_0, \alpha_0) - \alpha_0$. Definamos $h(\alpha_0) = F(1 + \alpha_0, \alpha_0) - \alpha_0$. Entonces $h'(\alpha_0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0} - \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}\right)^2}$ y $h''(\alpha_0) = \frac{-4}{\pi(1+\alpha_0)^3 \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}\right)^2}} < 0$. De aquí que h' sea una función decreciente y por lo tanto $h'(\alpha_0) < \lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} h'(\alpha_0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Y entonces $h(\alpha_0)$ es una función decreciente. De aquí que, $h(\alpha_0) < h(0) = 0$. Finalmente, como en este caso $1 + \alpha_0 < a$, $F(a, \alpha_0) - \alpha_0 < F(1 + \alpha_0, \alpha_0) - \alpha_0 = h(\alpha_0) < 0$.

c) La prueba se sigue del inciso a) observando que $\alpha_0 < 0$ y que la función $F(a, \alpha_0)$ en este caso es igual a la función $-F(a, -\alpha_0)$ con a y α_0 satisfaciendo **c2**).

La segunda parte del inciso se sigue del hecho de que $F(a, \alpha_0) - \alpha_0$ es creciente, en forma similar a la prueba de a). ■

Se tiene el siguiente corolario a la Proposición A2.

Proposición A3. Dado $F(a, \alpha_0)$ como en el Lema A1 se cumple lo siguiente

$$\frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)} - 1 > 0$$

Proposición A4. Dado $G(a, \alpha_0)$ como en el Lema A1 tenemos para \mathbf{c}_2), \mathbf{c}_3) y \mathbf{c}_5) $\text{Im}G(a, \alpha_0) = (0, 1)$.

Demostración. Consideremos cada caso por separado.

\mathbf{c}_2) : Para este caso $\alpha_0 > 0$. Considerar α_0 fijo. Si $\alpha_0 = 1$, $\text{Im}[G(a, \alpha_0)] = \{1/2\}$. Si $1 - \alpha_0 > 0$, entonces $G(a, \alpha_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}N\left(\frac{a}{1-\alpha_0}\right)$ y $G(a, \alpha_0)$ es decreciente como función de a . Así que, $\text{Im} G(a, \alpha_0) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}N\left(\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}\right), 1\right]$.

Si $1 - \alpha_0 < 0$, entonces $G(a, \alpha_0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}N\left(\frac{a}{\alpha_0-1}\right)$ y $G(a, \alpha_0)$ es creciente como función de a . De aquí que, $\text{Im} G(a, \alpha_0) = \left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}N\left(\frac{1+\alpha_0}{\alpha_0-1}\right)\right)$.

Ya que $\frac{d}{d\alpha_0} N\left(\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}\right) = N'\left(\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}\right) \frac{2}{(1-\alpha_0)^2} < 0$ y $\frac{d}{d\alpha_0} \left(-N\left(\frac{1+\alpha_0}{\alpha_0-1}\right)\right) = N'\left(\frac{1+\alpha_0}{\alpha_0-1}\right) \frac{2}{(\alpha_0-1)^2} < 0$, tomando el límite cuando $\alpha_0 \rightarrow 1$ obtenemos $\text{Im} G(a, \alpha_0) = \{1/2\} \cup (1/2, 1) \cup (0, 1/2) = (0, 1)$.

\mathbf{c}_3) : $G(a, \alpha_0) = G(a, -\alpha_0)$ de aquí que es suficiente considerar $\alpha_0 \geq 0$. Considerar α_0 fijo. Si $\alpha_0 = 0$, $G(a, 0) = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{1}{a} + \frac{2}{a\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} = N(a)$, de donde se satisface que $\text{Im} G(a, 0) = (0, 1)$.

Si $\alpha_0 = 1$, $G(a, 1) = \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{2}{a} + \frac{2}{a\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{1}{2}N\left(\frac{a}{2}\right)$. En este caso se tiene la desigualdad $a > 1 + \alpha_0 = 2$, entonces, $\text{Im}[G(a, 1)] = (0, 1/2)$.

Si $1 - \alpha_0 > 0$, $G(a, \alpha_0) = \frac{1}{2}N\left(\frac{a}{1+\alpha_0}\right) + \frac{1}{2}N\left(\frac{a}{1-\alpha_0}\right)$ es decreciente como función de a . De aquí que, $\text{Im} G(a, \alpha_0) = \left(0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}N\left(\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}\right)\right)$. Como $N\left(\frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}\right)$ es decreciente, entonces $\text{Im} G(a, \alpha_0) = \text{Im} G(a, 0) = (0, 1)$.

Si $1 - \alpha_0 < 0$, $G(a, \alpha_0) = \frac{1}{2}N\left(\frac{a}{1+\alpha_0}\right) - \frac{1}{2}N\left(\frac{a}{\alpha_0-1}\right)$. En este caso $G(a, \alpha_0)$ es creciente para $a \in (1 + \alpha_0, \sqrt{2}\sqrt{1+\alpha_0^2})$ y decreciente para $a \in (\sqrt{2}\sqrt{1+\alpha_0^2}, \infty)$. Así,

$$\text{Im } G(a, \alpha_0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}N\left(\frac{\alpha_0+1}{\alpha_0-1}\right), \frac{1}{2}N\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right) - \frac{1}{2}N\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\alpha_0^2}}{\alpha_0-1}\right) \right) \cup \left(0, \frac{1}{2}N\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right) - \frac{1}{2}N\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\alpha_0^2}}{\alpha_0-1}\right) \right).$$

Por otra parte, $\frac{d}{d\alpha_0} \left[-N\left(\frac{\alpha_0+1}{\alpha_0-1}\right) \right] = N'\left(\frac{\alpha_0+1}{\alpha_0-1}\right) \frac{2}{(\alpha_0-1)^2} < 0$, así que, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}N\left(\frac{\alpha_0+1}{\alpha_0-1}\right) \geq 0$. Esto

implica que

$$\text{Im } G(a, \alpha_0) = \left(0, \frac{1}{2}N\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right) - \frac{1}{2}N\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\alpha_0^2}}{\alpha_0-1}\right) \right). \text{ Finalmente, ya que}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha_0} \left[\frac{1}{2}N\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\alpha_0^2}}{1+\alpha_0}\right) - \frac{1}{2}N\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+\alpha_0^2}}{\alpha_0-1}\right) \right] &= \frac{-2(1+\alpha_0)^2}{\pi 2(1+\alpha_0^2)} \sqrt{1 - \frac{(1-\alpha_0)^2}{2(1+\alpha_0^2)}} \frac{\sqrt{2}(\alpha_0-1)}{\sqrt{1+\alpha_0^2(1+\alpha_0^2)}} + \\ &+ \frac{2(\alpha_0-1)^2}{\pi 2(1+\alpha_0^2)} \sqrt{1 - \frac{(\alpha_0-1)^2}{2(1+\alpha_0^2)}} \frac{\sqrt{2}(-1-\alpha_0)}{\sqrt{1+\alpha_0^2(\alpha_0-1)^2}} < 0 \end{aligned}$$

calculando el limite cuando $\alpha_0 \rightarrow 1$, tenemos $\text{Im } G(a, \alpha_0) = (0, \frac{1}{2})$.

c₅): Observar que $\alpha_0 < 0$ y $G_{c_5}(a, \alpha_0) = G_{c_2}(a, -\alpha_0)$. Por lo tanto

$$\text{Im } G(a, \alpha_0) = (0, 1). \blacksquare$$

Proposición A.5. Considerar la función $h(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{sen}^{-1} \frac{2-a}{a} - \frac{1}{\pi} \frac{3a-2}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{2-a}{a}\right)^2}$ definida para $a > 1$, entonces existe $\tilde{a} > 2$ tal que $h(a) < 0 \Leftrightarrow a \in (1, \tilde{a})$, $h(a) > 0 \Leftrightarrow a \in (\tilde{a}, \infty)$ y $h(a) = 0$.

Demostración. Derivando: $h'(a) = \frac{1}{\pi} \frac{8}{\sqrt{1 - \left(\frac{2-a}{a}\right)^2}} \left(\frac{2-a}{a^4}\right)(1-a)$, entonces

h es decreciente para $a \in (1, 2)$ y es creciente para $a \in (2, \infty)$ y como $\lim_{a \rightarrow 1} h(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0 = 0$, entonces $h < 0$ para $a \in (1, 2)$. Por otra parte $\lim_{a \rightarrow \infty} h(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{sen}^{-1}(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, de aquí que exista $\tilde{a} > 2$ tal que $h(a) < 0$ para $a \in [2, \tilde{a})$ y $h(a) > 0$ para $a \in (\tilde{a}, \infty)$, completandose la prueba. \blacksquare

Proposición A.6. Considerar la función $F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0)$ y sea (a, α_0) tal que (a, α_0) satisfacen la condición **c₂** o satisfacen la condición **c₃** junto con $\alpha_0 > 0$. Entonces

a) Para $a \geq 1$ fijo, $\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0) = 0$; es decir, $F - \alpha_0 G \rightarrow 0$ cuando estamos en la proximidad de la semirecta $\alpha_0 = 0, a \geq 1$.

b) $\lim_{a \rightarrow \alpha_0 - 1} F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0) = 1$; es decir $F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0) \rightarrow 1$ cuando estamos en la proximidad de la semirecta $a = \alpha_0 - 1$ (y $\alpha_0 > 0$).

c) $\lim_{a \rightarrow 1 - \alpha_0} F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0) = 0$; es decir $F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0) \rightarrow 0$ cuando estamos en la proximidad del segmento $a = 1 - \alpha_0$ (y $\alpha_0 > 0$).

d) En la recta $a = 1 + \alpha_0$, $F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0)$ cumple lo siguiente $F - \alpha_0 G < 0$ si $a \in (1, \tilde{a})$, $F - \alpha_0 G > 0$ si $a \in (\tilde{a}, \infty)$ y $F - \alpha_0 G = 0$ al evaluar en $a = \tilde{a}$ y $\alpha_0 = \tilde{a} - 1$ (\tilde{a} es la misma que fue definida en la proposición A.5)

Demostración.

a) Para $a \geq 1$ fijo y α_0 próximo al cero se satisface la condición **c₃**), entonces evaluando $\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0) = 0$.

b) Aquí se satisface **c₂**), entonces evaluando el límite $\lim_{a \rightarrow \alpha_0 - 1} F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0) = 1$.

c) Aquí se satisface **c₂**), entonces evaluando el límite $\lim_{a \rightarrow 1 - \alpha_0} F(a, \alpha_0) - \alpha_0 G(a, \alpha_0) = 0$.

d) Aquí se cumple la condición **c₂**), evaluando en $a = 1 + \alpha_0$, obtenemos que $F(a, a-1) - (a-1)G(a, a-1) = h(a)$, por lo tanto de la proposición A.5 obtenemos el resultado.

Proposición A.7. Sean J_2^+ , J_3^+ , J_2^- , J_3^- como en la definición, entonces los cuatro conjuntos son distintos del vacío.

Prueba. Analicemos **c₂**) y **c₃**) separadamente.

Primero sea (a, α_0) satisfaciendo **c₂**), entonces $\frac{\partial}{\partial \alpha_0} (F - \alpha_0 G) = \frac{3\alpha_0 - 1}{a\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \alpha_0}{a}\right)^2}$. Así que

$F - \alpha_0 G$ como función de α_0 es decreciente si $\alpha_0 < \frac{1}{3}$ y es creciente si $\alpha_0 > \frac{1}{3}$. De la proposición A.6 sabemos el comportamiento en la proximidad de las rectas $a = \alpha_0 - 1$, $a = 1 - \alpha_0$ y $a = 1 + \alpha_0$, de donde obtenemos que J_2^- y J_2^+ son conjuntos no vacíos (ver figura 3.1).

Ahora sea (a, α_0) satisfaciendo **c₃**) y $\alpha_0 > 0$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_0} (F - \alpha_0 G) = -\frac{1}{a\pi} \left[(1 + 3\alpha_0) \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \alpha_0}{a}\right)^2} + (1 - 3\alpha_0) \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \alpha_0}{a}\right)^2} \right].$$

•) Si $\alpha_0 < \frac{1}{3}$ ($1 - 3\alpha_0 > 0$) entonces $\frac{\partial}{\partial \alpha_0} (F - \alpha_0 G) < 0$, por lo tanto $F - \alpha_0 G$ como función de α_0 es decreciente para $\alpha_0 < \frac{1}{3}$.

••) Si $\alpha_0 > \frac{1}{3}$ ($1 - 3\alpha_0 < 0$) entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_0} (F - \alpha_0 G) < 0 &\Leftrightarrow (1 - 3\alpha_0)^2 \left(1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2\right) < (1 + 3\alpha_0)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 [(1 - 3\alpha_0)^2 - (1 + 3\alpha_0)^2] < (1 - \alpha_0)^2 (1 - 3\alpha_0)^2 - (1 + \alpha_0)^2 (1 + 3\alpha_0)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -12\alpha_0 a^2 < -16\alpha_0 (1 + \alpha_0)^2 \Leftrightarrow 3a^2 > 4(1 + 3\alpha_0)^2 \Leftrightarrow \alpha_0 < \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3} > 0$ ya que como se satisface c_3) entonces $a > 1 + \alpha_0$, y como además $\alpha_0 > \frac{1}{3}$ entonces $a > \frac{4}{3}$, de donde $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3} > 0$.

Por lo tanto $F - \alpha_0 G$ como función de α_0 es decreciente para $\alpha_0 \in \left(\frac{1}{3}, \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}}\right)$ y es creciente para $\alpha_0 \in \left(\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}}, a - 1\right)$. Además $F - \alpha_0 G$ en la proximidad de la recta $a = 1 + \alpha_0$ ($\alpha_0 = a - 1$) tiene el comportamiento de la función $h(a)$ que fue definida en la proposición A.5. También sabemos el comportamiento de la función $F - \alpha_0 G$ en la proximidad de la semirecta $\alpha_0 = 0$, $a \geq 1$ (ver proposición A.6).

De donde

obtenemos que J_3^- y J_3^+ son conjuntos no vacíos (ver figura 3.1). ■

Proposición A8. Sean F y G con a y α_0 satisfaciendo c_3). Entonces

a) Cuando α_0 es constante se sigue que $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} - \frac{a}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2} = 0$

b) Cuando α_0 es constante se sigue que $\lim_{a \rightarrow \infty} F(a, \alpha_0) = 0$ y $\lim_{a \rightarrow \infty} G(a, \alpha_0) = 0$.

Por otra parte considerar $\alpha_0 > 0$, entonces si $\alpha_0 \rightarrow 0$ se tiene

c) $G(\alpha_0 + 1, \alpha_0) \rightarrow 1$,

d) $\frac{\alpha_0}{F(\alpha_0 + 1, \alpha_0)} \rightarrow 1$

Demostración. a)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} - \frac{a}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{\pi} \left[\left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2 \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2}} = \frac{0}{2} = 0$$

b) El segundo límite es inmediato y el primero se sigue del inciso a)

c) $G(\alpha_0 + 1, \alpha_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}\right) + \frac{1-\alpha_0}{\pi(1+\alpha_0)} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

d) La idea es usar la regla de L'Hopital. Primero escribimos el valor de $F(\alpha_0 + 1, \alpha_0)$

$$F(\alpha_0 + 1, \alpha_0) = \frac{1}{2}(1+\alpha_0) - \frac{(1-\alpha_0)}{\pi} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}\right) - \frac{1+\alpha_0}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Derivando con respecto a α_0

$$\frac{dF(\alpha_0 + 1, \alpha_0)}{d\alpha_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0} \right) - \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0} \right)^2}$$

De aquí que

$$\lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} \frac{\alpha_0}{F(\alpha_0 + 1, \alpha_0)} = \lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{dF(\alpha_0+1, \alpha_0)}{d\alpha_0}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} - 0} = 1. \blacksquare$$

Proposición A9. Supongamos $\alpha_0 > 0$ y que se cumple \mathbf{c}_3) y consideramos la función $\rho(a, \alpha_0) = -\left(\frac{a_3}{k_3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)} - 1\right)^{\frac{1}{3}}$. Si δ está próximo al cero entonces α_0 está próximo al cero y a está próximo al 1.

Demostración. El hecho que δ este próximo al cero implica que $\frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)}$ este próximo al 1.

$F(a, \alpha_0)$ es decreciente como función de a (ver prueba de la proposición A.2)

Además $\frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)} > 1$ (ver proposición A.3)

Por lo tanto el valor mínimo de $\frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)}$ es $\frac{\alpha_0}{F(\alpha_0+1, \alpha_0)}$

$$\frac{d}{d\alpha_0} \left[\frac{\alpha_0}{F(\alpha_0 + 1, \alpha_0)} \right] = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0} \right) - \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0} \right)^2}}{F^2(\alpha_0 + 1, \alpha_0)}$$

Se puede checar directamente que $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin^{-1} x - \frac{1}{\pi} \sqrt{1-x^2} > 0$. De donde $\frac{d}{d\alpha_0} \left[\frac{\alpha_0}{F(\alpha_0 + 1, \alpha_0)} \right] > 0$

Entonces usando la proposición A.5 d) $\frac{\alpha_0}{F(\alpha_0+1, \alpha_0)} > \lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} \frac{\alpha_0}{F(\alpha_0+1, \alpha_0)} = 1$. De aquí obtenemos las desigualdades $\frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)} > \frac{\alpha_0}{F(\alpha_0+1, \alpha_0)} > 1$. Por lo tanto α_0 debe estar próximo al cero y a debe estar próximo al 1. \blacksquare

Proposición A10. Considerar $F(a, \alpha_0)$ y $G(a, \alpha_0)$ como en \mathbf{c}_3)

a) Si $\alpha_0 > 0$ entonces $F(a, \alpha_0) - \alpha_0 \frac{\partial F}{\partial \alpha_0} < 0$ y $\frac{\partial G}{\partial \alpha_0} < 0$

b) Considerar la constante $N > 0$ y los números a y α_0 satisfaciendo $\frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)} = N$

Entonces el valor mínimo que puede tomar a es $a = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2N}}$.

Demostración. a) Es directo.

b) En la igualdad $N = \frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)}$ derivamos con respecto a α_0 y obtenemos

$$0 = \frac{1}{F^2(a, \alpha_0)} \left[F(a, \alpha_0) - \alpha_0 \left(\frac{\partial F}{\partial a} a'(\alpha_0) + \frac{\partial F}{\partial \alpha_0} \right) \right]$$

$$\text{De aquí que } F(a, \alpha_0) - \alpha_0 \frac{\partial F}{\partial \alpha_0} = \alpha_0 \frac{\partial F}{\partial a} a'(\alpha_0)$$

Del inciso a) $F(a, \alpha_0) - \alpha_0 \frac{\partial F}{\partial \alpha_0} < 0$ y del hecho que $\frac{\partial F}{\partial a} < 0$ tenemos que $a'(\alpha_0) > 0$.

Entonces el valor mínimo de a ocurre cuando $\alpha_0 = 0$

De la regla de L'Hopital $N = \lim_{\alpha_0 \rightarrow 0} \frac{\alpha_0}{F(a, \alpha_0)} = \frac{\pi}{2 \sin^{-1} \frac{1}{a}}$, es decir $a = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2N}}$. ■

A.3. Propiedades asintóticas de r y ω^2

Cuando se considera la parametrización (4.3), r y ω^2 tienen importantes propiedades asintóticas que pueden ser obtenidas calculando algunos límites. Las propiedades a las que nos referimos son las siguientes.

Proposición A11. La pareja r_+, ω_+^2 definida en (4.8) tiene las siguientes propiedades

$$a) r_+(\delta) \rightarrow -\frac{(k_1 k_2 - k_3)}{k_3}, \text{ cuando } \delta \rightarrow \infty$$

$$b) \frac{\omega_+^2(\delta)}{\delta^2} \rightarrow \frac{k_3}{k_1}, \text{ cuando } \delta \rightarrow \infty$$

$$c) \delta r'_+(\delta) \rightarrow 0, \text{ cuando } \delta \rightarrow \infty$$

$$d) \frac{\delta}{a_2} \frac{\omega_+^2(\delta)}{\delta} \rightarrow 2 \frac{k_3}{k_1}, \text{ cuando } \delta \rightarrow \infty$$

La pareja r_-, ω_+^2 definida en (4.9) tiene las siguientes propiedades

$$e) \frac{r_-(\delta)}{\delta^3} \rightarrow -\frac{k_3}{a_1 a_2 - a_3}, \text{ cuando } \delta \rightarrow \infty$$

$$f) \omega_+^2(\delta) \rightarrow a_2, \text{ cuando } \delta \rightarrow \infty$$

Demostración. a)

$$r_+(\delta) = \frac{2(k_1 k_2 - k_3)\delta^3}{-a_3 - k_3\delta^3 + a_2 k_1 \delta + a_1 k_2 \delta^2 - \sqrt{(-a_3 - k_3\delta^3 + a_2 k_1 \delta + a_1 k_1 \delta^2)^2 - 4(a_1 a_2 - a_3)(k_1 k_2 - k_3)\delta^3}}$$

Dividiendo arriba y abajo entre δ^3 y tomando límite se llega al resultado

b)

$$\frac{\omega_+^2(\delta)}{\delta^2} = \frac{a_3 - k_3\delta^3 - a_2 k_1 \delta + a_1 k_2 \delta^2 - \sqrt{a_3 - k_3\delta^3 - a_2 k_1 \delta + a_1 k_2 \delta^2)^2 - 4(a_1 - k_1 \delta)(a_3 k_2 \delta^2 - a_2 k_3 \delta^3)}}{\delta^2 \cdot 2(a_1 - k_1 \delta)}$$

Dividiendo arriba y abajo entre δ^3 y metiendo $\frac{1}{\delta^3} = \frac{1}{\sqrt{\delta^6}}$ en la raíz del numerador se resuelve el límite.

$$c) \text{ Definamos } H_{\pm}(\delta) = a_2 k_1 + 2a_1 k_2 \delta - 3k_3 \delta^2 \pm$$

$$\pm \frac{(-a_3 + a_2 k_1 \delta + a_1 k_2 \delta^2 - k_3 \delta^3)(a_2 k_1 + 2a_1 k_2 \delta - 3k_3 \delta^2) - 6(a_1 a_2 - a_3)(k_1 k_2 - k_3)\delta^2}{\sqrt{(-a_3 + a_2 k_1 \delta + a_1 k_2 \delta^2 - k_3 \delta^3)^2 - 4(a_1 a_2 - a_3)(k_1 k_2 - k_3)\delta^3}}$$

Entonces

$$\delta r'_+(\delta) = \frac{\delta}{2(a_1 a_2 - a_3)} H_+(\delta) = \frac{\delta}{2(a_1 a_2 - a_3)} H_+(\delta) \frac{H_-(\delta)}{H_-(\delta)} = \frac{\delta^2}{2(a_1 a_2 - a_3) H_-(\delta)} \cdot \frac{1}{\delta} H_+(\delta) H_-(\delta)$$

Se puede ver que $\frac{H_-(\delta)}{\delta^2} \rightarrow -6k_3$, $\delta \rightarrow \infty$ es decir $\frac{\delta^2}{H_-(\delta)} \rightarrow \frac{-1}{6k_3}$, $\delta \rightarrow \infty$. Por otra parte $\frac{1}{\delta} H_+(\delta)H_-(\delta)$

es el cociente de polinomios de grado 7 con numerador

$$\begin{aligned} & -4(a_2k_1 + 2a_1k_2\delta - 3k_3\delta^2)^2(a_1a_2 - a_3)(k_1k_2 - k_3)\delta^3 \\ & + 12(-a_3 + a_2k_1\delta + a_1k_2\delta^2 - k_3\delta^3)(a_2k_1 + 2a_1k_2\delta - 3k_3\delta^2)(a_1a_2 - a_3)(k_1k_2 - k_3)\delta^2 \\ & - 36(a_1a_2 - a_3)^2(k_1k_2 - k_3)^2\delta^4 \end{aligned}$$

y con denominador

$$\delta[(-a_3 + a_2k_1\delta + a_1k_2\delta^2 - k_3\delta^3)^2 - 4(a_1a_2 - a_3)(k_1k_2 - k_3)\delta^3]$$

De aquí que

$$\frac{1}{\delta} H_+(\delta)H_-(\delta) \rightarrow -36(a_1a_2 - a_3)(k_1k_2 - k_3) + 36(a_1a_2 - a_3)(k_1k_2 - k_3) = 0, \quad \delta \rightarrow \infty \text{ por lo tanto}$$

$$\delta r'_+(\delta) = \frac{\delta^2}{2(a_1a_2 - a_3)H_-(\delta)} \cdot \frac{1}{\delta} H_+(\delta)H_-(\delta) \rightarrow \frac{-1}{2(a_1a_2 - a_3)6k_3} (0) = 0 \quad \delta \rightarrow \infty$$

d) Derivaremos $\omega_-^2(\delta)$. Para simplificar nos conviene definir

$$G_-(\delta) = a_3 - k_3\delta^3 - a_2k_1\delta + a_1k_2\delta^2 - \sqrt{(a_3 - k_3\delta^3 - a_2k_1\delta + a_1k_2\delta^2)^2 - 4(a_1 - k_1\delta)(a_3k_2\delta^2 - a_2k_3\delta^3)}$$

$$G'_-(\delta) = -3k_3\delta^2 + 2a_1k_2\delta - a_2k_1 +$$

$$\frac{(a_3 - k_3\delta^3 - a_2k_1 - a_1k_2\delta^2)(-3k_3\delta^2 + 2a_1k_2\delta - a_2k_1) - 2(a_1 - k_1\delta)(2a_3k_2\delta - 3a_2k_3\delta^2) + 2k_1(a_3k_2\delta^2 - a_2k_3\delta^3)}{-\sqrt{(a_3 - k_3\delta^3 - a_2k_1\delta + a_1k_2\delta^2)^2 - 4(a_1 - k_1\delta)(a_3k_2\delta^2 - a_2k_3\delta^3)}}$$

Escribimos $\omega_-^2(\delta) = \frac{G_-(\delta)}{2(a_1 - k_1\delta)}$ entonces

$$\frac{d}{d\delta}[\omega_-^2(\delta)] = \frac{2G'_-(\delta)(a_1 - k_1\delta) - G_-(\delta)(-2k_1)}{4(a_1 - k_1\delta)^2}$$

$$\frac{d}{d\delta}[\omega_-^2(\delta)] = \frac{G'_-(\delta)}{2(a_1 - k_1\delta)} + \frac{G_-(\delta)}{2(a_1 - k_1\delta)} \cdot \frac{k_1}{(a_1 - k_1\delta)} = \frac{G'_-(\delta)}{2(a_1 - k_1\delta)} + \omega_-^2(\delta) \frac{k_1}{(a_1 - k_1\delta)}$$

Entonces

$$\frac{\frac{d}{d\delta}[\omega_-^2(\delta)]}{\delta} = \frac{G'_-(\delta)}{2(a_1 - k_1\delta)\delta} + \frac{\omega_-^2(\delta)k_1}{(a_1 - k_1\delta)\delta}$$

Por proposición A11 b) $\frac{\omega_-^2(\delta)}{\delta^2} \rightarrow \frac{-1}{k_1}$, $\delta \rightarrow \infty$.

Y es fácil ver que $\frac{G'_-(\delta)}{\delta^2} \rightarrow -3k_3 - \frac{(-k_3)(-3k_3)}{k_3} = -3k_3 - 3k_3 = -6k_3$. Por lo tanto

$$\frac{\frac{d}{d\delta}[\omega_-^2(\delta)]}{\delta} \rightarrow \frac{-6k_3}{-2k_1} + \frac{\frac{k_3}{k_1} \cdot k_1}{-k_1} = 3\frac{k_3}{k_1} - \frac{k_3}{k_1} = 2\frac{k_3}{k_1}$$

como se quería probar

e)

$$\frac{r_-(\delta)}{\delta^3} = \frac{-a_3 - k_3\delta^3 + a_2k_1\delta + a_1k_2\delta^2 - \sqrt{-a_3 - k_3\delta^3 + a_2k_1\delta + a_1k_2\delta^2)^2 - 4(a_1a_2 - a_3)(k_1k_2 - k_3)\delta^3}}{\delta^3 \cdot 2(a_1a_2 - a_3)}$$

Dividiendo arriba y abajo entre δ^3 y metiendo $\frac{1}{\delta^3} = \sqrt{1/\delta^6}$ en la raíz del numerador se llega al límite.

f)

$$\omega_+^2(\delta) = \frac{a_3 - k_3\delta^3 - a_2k_1\delta + a_1k_2\delta^2 + \sqrt{(a_3 - k_3\delta^3 - a_2k_1\delta + a_1k_2\delta^2)^2 - 4(a_1 - k_1\delta)(a_3k_2\delta^2 - a_2k_3\delta^3)}}{2(a_1 - k_1\delta)}$$

Multiplicando y dividiendo por

$$\omega_+^2(\delta) = \frac{a_3 - k_3\delta - a_2k_1\delta + a_1k_2\delta^2 - \sqrt{(a_3 - k_3\delta^3 - a_2k_1\delta + a_1k_2\delta^2)^2 - 4(a_1 - k_1\delta)(a_3k_2\delta^2 - a_2k_3\delta^3)}}{2(a_3k_2\delta^2 - a_2k_3\delta^3)}$$

Dividiendo arriba y abajo entre δ^3 y tomando límite se llega al resultado. ■

Proposición A12. Considerar la pareja (4.8) y sea $q(\delta) = (a_3 - a_1\omega_-^2(\delta))^2 + \omega_-^2(\delta)(\omega_-^2(\delta) - a_2)^2$.

Cuando se considera la parametrización (4.3), se satisfacen los siguientes límites

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{q(\delta)}{\delta^6} &= \left(\frac{k_3}{k_1}\right)^3 \text{ y } \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{q'(\delta)}{\delta^5} = 6\left(\frac{k_3}{k_1}\right)^3 \\ \text{b) } \lim_{\delta \rightarrow \infty} \delta \frac{d}{d\delta} \left(\left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta) - 1} \right) \right]^2 \frac{1}{[r(\delta) - 1]^2} \right) &= 0 \\ \text{c) } \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta} \frac{d}{d\delta} \left(\left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta) - 1} \right) \right]^2 \frac{1}{[r(\delta) - 1]^2} \omega^2(\delta) \right) &= \left[N^{-1} \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right) \right]^2 \frac{k_3}{k_1 k_2} \frac{2k_3}{k_1} \\ \text{d) } \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta^3} \frac{d}{d\delta} \left(\left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta) - 1} \right) \right]^2 \frac{1}{[r(\delta) - 1]^2} \omega^4(\delta) \right) &= \left[N^{-1} \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right) \right]^2 4 \left(\frac{k_3}{k_1} \right)^2 \end{aligned}$$

Demostración.

$$\text{a) } \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{q(\delta)}{\delta^6} = \left(\frac{k_3}{k_1}\right)^3 \text{ es inmediato de proposición A11. Por otra parte}$$

$$q'(\delta) = [2(a_3 - a_1\omega_-^2(\delta))(-a_1) + \omega_-^2(\delta)2(\omega_-^2(\delta) - a_2) + (\omega_-^2(\delta) - a_2)^2] \frac{d}{d\delta} \omega_-^2(\delta)$$

De proposición A11 b) y A11 d)

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{q'(\delta)}{\delta^5} = \left[0 + \left(\frac{k_3}{k_1}\right) 2 \left(\frac{k_3}{k_1}\right) + \left(\frac{k_3}{k_1}\right)^2 \right] 2 \left(\frac{k_3}{k_1}\right) = 6 \left(\frac{k_3}{k_1}\right)^3$$

b) Sabemos que

$$N^{-1} \left(\frac{-1}{r_+(\delta) - 1} \right) = a \rightarrow N^{-1} \left(\frac{k_3}{k_1 k_2} \right), \quad \delta \rightarrow \infty$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} \left[\left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r_+(\delta) - 1} \right) \right]^2 \frac{1}{[r_+(\delta) - 1]^2} \right] &= 2N^{-1} \left(\frac{-1}{r_+(\delta) - 1} \right) \left[-\frac{\pi}{4} \frac{\left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r_+(\delta) - 1} \right) \right]^3}{\sqrt{\left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r_+(\delta) - 1} \right) \right]^2 - 1}} \right] \frac{r_+'(\delta)}{[r_+(\delta) - 1]^2} \frac{1}{[r_+(\delta) - 1]^2} + \\ &+ \left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r_+(\delta) - 1} \right) \right]^2 \left[\frac{-2r_+'(\delta)}{[r_+(\delta) - 1]^3} \right] \end{aligned}$$

Multiplicando por δ y usando las observaciones de arriba junto con el hecho de que

$\delta r'_+(\delta) \rightarrow 0, \delta \rightarrow \infty$ (Proposición A11 c) queda probado este inciso.

c)

$$\frac{d}{d\delta} \left[\left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta)-1} \right) \right]^2 \frac{1}{(r(\delta)-1)^2} \omega^2(\delta) \right] = \frac{d}{d\delta} \left[\left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta)-1} \right) \right]^2 \frac{1}{(r(\delta)-1)^2} \right] \omega^2(\delta) + \left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta)-1} \right) \right]^2 \frac{1}{(r(\delta)-1)^2} \frac{d}{d\delta}$$

Dividiendo entre δ y usando el inciso b), así como proposiciones A11 b) y A11 d) queda probado este inciso.

d)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} \left[\left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta)-1} \right) \right]^2 \frac{1}{(r(\delta)-1)^2} \omega^4(\delta) \right] &= \frac{d}{d\delta} \left[\left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta)-1} \right) \right]^2 \frac{1}{(r(\delta)-1)^2} \right] \omega^4(\delta) + \\ &+ \left[N^{-1} \left(\frac{-1}{r(\delta)-1} \right) \right]^2 \frac{1}{(r(\delta)-1)^2} \cdot 2\omega^2(\delta) \cdot \frac{d}{d\delta} \omega^2(\delta) \end{aligned}$$

Dividiendo entre δ^3 y usando el inciso b), así como proposiciones A11 b) y A11 d) queda probado

este inciso. ■

Parte 2. Sistemas sujetos a controles de alta ganancia

Capítulo 5

Introducción

Consideremos el siguiente sistema en \mathbb{R}^n , $n \geq 2$

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (5.1)$$

Donde asumimos que el par (A, b) es controlable. Controlabilidad implica la existencia de un control de retroalimentación de estado y que es lineal $u = K^T x$, $K \in \mathbb{R}^n$, tal que los eigenvalores de la matriz $A + bK^T$ pueden ser escogidos arbitrariamente. En particular, dada cualquier matriz a lazo abierto A , la ganancia del control K siempre puede ser escogida de tal manera que la matriz $A + bK^T$ sea Hurwitz. Sea $y = Cx$ la salida del sistema y supongamos que el sistema controlado está sujeto a una perturbación aditiva $\varphi(t)$ (es decir $\dot{x} = (A + bK^T)x + \varphi(t)$). Si el objetivo del control es reducir los efectos de $\varphi(t)$ en la salida del sistema y , un diseño de control muy común es escoger una ganancia de control K de tal manera que coloque los eigenvalores de $A_c = A + bK^T$ en el semiplano izquierdo del plano complejo y que las partes reales tengan valor absoluto muy grande. En particular, se puede probar que cuando $t \rightarrow \infty$, $|y(t)| \leq p\varphi_{\max}/\lambda^*$, donde p es una constante positiva, φ_{\max} es una cota superior para $|\varphi(t)|$, y λ^* es una constante positiva que es del orden de $\min_j |\operatorname{Re} \lambda_j(A_c)|$, donde los $\lambda_j(A_c)$'s son los eigenvalores de A_c . De esta manera, podemos hacer que el efecto de $\varphi(t)$ sobre la salida del sistema $y(t)$ sea más pequeño si conseguimos ubicar los $\lambda(A_c)$'s más lejos del origen. Esta propiedad es interesante porque la perturbación $\varphi(t)$ puede ser rechazada tomando una adecuada ganancia de control K que ubique los valores propios de A_c en el lado izquierdo del plano complejo y con valor absoluto muy grande. Tal diseño de control es conocido como retroalimentación de estado de alta ganancia (**RAG**) ya que se inducen ganancias de control altas $|K|$. En aplicaciones prácticas, **RAG** se acostumbra usar para reducir los efectos de perturbaciones acotadas y de no-linealidades sobre las salidas del sistema y sobre la estabilidad interna, respectivamente [Kokotovic and Marino, 1986; Morari and Zafiriou, 1989].

Un inconveniente de **RAG** es que conduce a acciones de control muy largas. Ya que todos los sistemas físicos están sujetos a restricciones en la magnitud de las acciones de control usadas para regular el sistema, entonces la restricción $|u| \leq u_{\max}$ limita nuestros alcances en la estabilidad y el desempeño del sistema controlado. Si $K^T x$ es el control de retroalimentación diseñado, entonces realmente el control de retroalimentación que efectivamente actúa sobre el sistema llega a ser $\text{sat}(u(x)) = S(K^T x)$, donde $S: \mathbb{R} \rightarrow [-u_{\max}, u_{\max}]$ es una función de saturación, la cual está dada por

$$S(v) = \begin{cases} -u_{\max} & \text{si } -u_{\max} > v \\ v & \text{si } -u_{\max} \leq v \leq u_{\max} \\ u_{\max} & \text{si } v > u_{\max} \end{cases} \quad (5.2)$$

El sistema resultante a lazo cerrado $\dot{x} = Ax + bu_s(x)$ es continuo y no lineal. Sin embargo, ya que $S(0) = 0$ y la linealización de $Ax + bu_s(x)$ alrededor del origen es $\dot{x} = A_c x$, el origen sigue siendo un punto de equilibrio asintóticamente estable del sistema a lazo cerrado a pesar de la saturación.

Además del efecto de saturación que puede producir un control de alta ganancia también pueden presentar el inconveniente del fenómeno de desestabilización del origen. Una forma de desestabilización es cuando la **RA** del origen se anula cuando el parámetro de alta ganancia se anula. Kokotovic y Marino [1986] han presentado el ejemplo

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2 - x_2^2 u$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = u$$

Con la ley de control $u(t) = -\gamma^2 x_1 - \gamma x_2$ y considerando la linealización en el origen, se consigue que la parte real de ambos valores propios tiendan a $-\infty$ cuando el parámetro γ es grande. Este sistema tiene la propiedad que la **RA** del origen se anula cuando γ crece. Ellos muestran otros ejemplos de sistemas de control en el plano donde también ocurre este fenómeno de que la **RA** se anule. Al final de su trabajo hacen un comentario, según el cual ellos tenían la idea de que este fenómeno no ocurriría si las no-linealidades se saturan, lo que no parece ser así pues en los capítulos 6 y 7 usando un control de alta ganancia con saturación obtuvimos desde un punto de vista de primer armónico que la **RA** se anula.

Otra forma en que puede presentarse el fenómeno de desestabilización es con la aparición de picos.

Sussman y Kokotovic [1991] estudiaron el sistema

$$\frac{d}{dt}x = f(x, \xi)$$

$$\frac{d}{dt}\xi = A\xi + Bu$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^v$, $u \in \mathbb{R}^\mu$ y se satisface lo siguiente:

H_1 : el par (A, B) es controlable

H_2 : el mapeo $f : \mathbb{R}^{n+v} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1

H_3 : el origen es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable del sistema

$$\frac{d}{dt}x = f(x, 0) = g(x), x \in \mathbb{R}^n.$$

El problema consiste en diseñar un control que estabilice el sistema. La idea de usar una retroalimentación de alta ganancia en el sistema $\frac{d}{dt}\xi = A\xi + Bu$ es conseguir que las partes reales de los valores propios tengan parte real muy negativa y de esta manera obtener una convergencia muy rápida hacia una vecindad de la variedad $\xi = 0$, y entonces esperar que la propiedad H_3 se encargara que llevar las trayectorias hacia el origen. La razón de que esta idea falle es el fenómeno de pico: cuando en el sistema $\frac{d}{dt}\xi = A\xi + Bu$, se usa una retroalimentación lineal de alta ganancia, algunas trayectorias alcanzan valores muy grandes antes de converger rápidamente hacia el origen, lo cual en la práctica significa que el origen se desestabiliza pues algunas trayectorias escapan al infinito.

En esta parte solo consideraremos sistemas controlables, así que podemos suponer que están escritos en forma canónica (2.11), es decir

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De manera que el polinomio $P_0(s) = s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{n-i}$ es el polinomio característico del sistema a lazo abierto $\dot{x} = Ax$. Ya que estamos interesados en el comportamiento dinámico cuando la parte real de al menos uno de los eigenvalores a lazo cerrado tiende a $-\infty$, usaremos dos parametrizaciones de alta ganancia:

1a. Parametrización de alta ganancia.

El vector de ganancias $K^T \in \mathbb{R}^n$ está dado como $K_i = a_{n-i} - c_{n-i}\delta^{n-i}$, $1 \leq i \leq n$, donde los c_i 's son constantes positivas escogidas de tal manera que el polinomio $P_c^*(s) = s^n + \sum_{i=1}^n c_i s^{n-i}$ sea Hurwitz y δ es un parámetro positivo. Con tal parametrización del vector de ganancias del control K , si $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ son las raíces de $P_c^*(s)$, entonces $\{\delta\lambda_1, \delta\lambda_2, \dots, \delta\lambda_n\}$ son los eigenvalores del sistema a lazo cerrado en el origen. Nótese que aquí la parte real de todos los eigenvalores a lazo cerrado tiende a $-\infty$ cuando $\delta \rightarrow \infty$.

2a. Parametrización de alta ganancia.

El vector de ganancias $K^T \in \mathbb{R}^n$ está dado como $K_i = -c_{n+1-i}\delta$, $1 \leq i \leq n$, donde los c_i 's son constantes positivas escogidas de tal manera que el polinomio $P_c^{**}(s) = \sum_{i=1}^n c_i s^{n-i}$ sea Hurwitz y δ es un parámetro positivo. Con tal parametrización del vector de ganancias del control K , si $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ son las raíces del polinomio a lazo cerrado se sabe que una de las raíces, digamos que λ_1 tiene la propiedad de que $\frac{\lambda_1}{\delta} \rightarrow -c_1$, y las otras tienden a ser las raíces del polinomio $P_c^{**}(s) = \sum_{i=1}^n c_i s^{n-i}$ cuando $\delta \rightarrow \infty$ [Ver Shaked & Kouvaritakis, 1976; Young et al, 1977].

En los dos capítulos siguientes estudiaremos la primera parametrización de alta ganancia y en el capítulo 8 estudiaremos la segunda parametrización.

Capítulo 6

Sistemas planos controlables: primera parametrización de alta ganancia

En el capítulo 3 estudiamos sistemas planos en general, es decir, no pedimos que el sistema fuera controlable y tampoco pedimos que el origen fuera un punto de equilibrio asintóticamente estable, pero los sistemas planos generales son objeto de interés más bien en Ecuaciones Diferenciales y no tanto en Teoría de Control. Debido a que los sistemas controlables en los que se satisface que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable si son de importancia en Teoría de Control hemos incluido un capítulo para la discusión de sistemas planos con estas características.

Considérese un sistema lineal de dimensión dos, controlable y que está sujeto a una retroalimentación de estado estabilizante. La propiedad de controlabilidad implica que tal sistema de control puede ser escrito como

$$\dot{x} = Ax + bS(c^T x), \quad x, c \in \mathbb{R}^2 \quad (6.1a)$$

donde $c^T = (c_1, c_2)$ es una ganancia de retroalimentación,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ((6.1b))$$

y $S : [-u_0, u_0]$ es la función de saturación que hemos definido en capítulos anteriores.

Notemos que ya que $S(0) = 0$ y $c^T x$ es una retroalimentación estabilizante, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable de (6.1). Los valores propios del sistema linealizado de (6.1) alrededor del origen están dados por las raíces del polinomio $P_c(s) = s^2 + (a_1 - c_1)s + (a_2 - c_2)$.

Debido a la función no-lineal de saturación, el origen podría no ser un atractor global. En el artículo [Alvarez *et al.*, 1993], el comportamiento cualitativo de la región de atracción del origen $\Omega(0)$ fue estudiado en términos de los parámetros del sistema no controlado $\{a_1, a_2\}$. También fue establecida la clasificación de los puntos de equilibrio de (6.1). Sea $\sigma(A)$ el espectro de la matriz A ; se mostró que si

$\sigma(A) \cap C^+ \neq \emptyset$, el origen no es globalmente asintóticamente estable. Además, si $\text{traza}(A) > 0$, entonces podría aparecer una órbita periódica alrededor del origen tal que $\Omega(0)$ es un conjunto acotado. Fueron descritas bifurcaciones topológicas de $\Omega(0)$ tales como el paso de $\Omega(0)$ de un conjunto no acotado a un conjunto acotado a través de conexiones homo(hetero)-clínicas entre puntos de equilibrio de tipo silla.

Desde el punto de vista de las aplicaciones de control, un problema importante es estudiar el comportamiento de $\Omega(0)$ con respecto a las ganancias de control $\{c_1, c_2\}$, para un conjunto dado (y fijo) de parámetros $\{a_1, a_2\}$ de un sistema no controlado. De particular interés es el caso de retroalimentación de alta ganancia (es decir, $|c_1|, |c_2| \rightarrow \infty$) porque tal estrategia de control es comunmente usada en la práctica para reducir los efectos de perturbaciones acotadas sobre las salidas del sistema y de no linealidades sobre la estabilidad interna [Stokovic & Marino, 1986; Morari & Zafriiu, 1989]. Simulaciones numéricas muestran que si $\sigma(A) \cap C^+ \neq \emptyset$, el conjunto $\Omega(0)$ decrece cuando crece la magnitud de las ganancias de control $\{c_1, c_2\}$.

El objetivo de éste capítulo es usar el *Principio de Balance Armónico* (**PBA**) [Mees, 1981; Krenz & Miller, 1986; Llibre & Ponce, 1995], por medio del *Método de la Función Descriptora* (**MFD**), para estudiar el comportamiento de $\Omega(0)$ en el caso particular donde $\partial\Omega(0)$ es una órbita periódica del sistema dos-dimensional (6.1).

6.1 Diagrama de Bifurcación del Primer Armónico

Por comodidad, supongamos que el vector de ganancias del control c esta dado como sigue: $c_1 = a_1 - d_1$ y $c_2 = a_2 - d_2$ con $d_1 > 0, d_2 > 0$, así que las raíces del polinomio a lazo cerrado(en el origen) $P_c(p) = p^2 + d_1p + d_2$ están en C^- . Se puede probar que $1 + W(p) = \frac{P_c(p)}{P_o(p)}$ donde $P_o(p) = p^2 + a_1p + a_2$. De la ecuación (2.8), una solución $(\tilde{a}, \tilde{\omega})$ corresponde a un punto de intersección de las curvas $\{W(j\omega) : \omega > 0\}$ y $\{-\frac{1}{N(a)} : a > 0\} = (-\infty, -1)$. Ya que $N(a)$ es estrictamente decreciente para $a > 1$, una solución $(\tilde{a}, \tilde{\omega})$ corresponde unívocamente a un par $(\tilde{r}, \tilde{\omega})$ tal que $N(\tilde{a}) = \frac{1}{1-\tilde{r}}$. Por lo tanto

las soluciones $(\tilde{a}, \tilde{\omega})$ corresponden a soluciones $\tilde{\omega} > 0$ y $\tilde{r} \leq 0$ de la ecuación $1 + W(j\omega) = r$. Definamos los parámetros $\alpha_1 = \frac{d_1}{a_1}$, $\alpha_2 = \frac{d_2}{a_2}$ y $v = \frac{\omega}{\sqrt{d_2}}$. Entonces $1 + W(j\omega) = r$ es equivalente a las ecuaciones

$$\begin{aligned} r &= \alpha_1 \\ \alpha_2(1 - v^2) &= r(1 - \alpha_2 v^2) \end{aligned} \quad (6.2)$$

las cuales tiene una única solución dada por $\tilde{r} = \alpha_1$ y $\tilde{v}^2 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{(1 - \alpha_1)\alpha_2}$. Por lo tanto hay una órbita periódica **PA** en $\alpha_1 < 0$ y $\alpha_1 < \alpha_2$. Por otra parte, $\text{sign}\left(\frac{d}{d\omega} \text{Im}(W(j\omega))\right)|_{\omega=\tilde{\omega}} = \text{sign}\left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\right) = -1$. Así que, en caso de existir una órbita periódica, ésta es inestable. Ya que $d_1 > 0$ y $d_2 > 0$, las condiciones $\alpha_1 < 0$ y $\alpha_1 < \alpha_2$ implican que el sistema (6.1) tiene una órbita periódica **PA** sólo si la traza $\text{tr}(A) > 0$, es decir, sólo si la matriz A tiene al menos un eigenvalor inestable ($\sigma(A) \cap C^+ \neq \emptyset$). Por otra parte, se concluye que si $\sigma(A) \subset C^+$, el sistema (6.1) siempre tiene una órbita periódica **PA** inestable. Estos comportamientos fueron descritos en [Alvarez *et al.*, 1993] usando teoría cualitativa de sistemas dinámicos. Cuando el sistema (6.1) tiene una órbita periódica **PA**, ésta es única e inestable. Por lo tanto, y desde un punto de vista de una aproximación de primer armónico, $\partial\Omega(0)$ (la frontera de la región de atracción del origen) coincide con la órbita periódica que se predice por el **PBA**. En lo que sigue estudiaremos el comportamiento de $\partial\Omega(0)$ (identificada con la órbita periódica **PA** que se predijó) para el caso de retroalimentación de alta ganancia. Sea $\delta > 0$ y supongamos que las ganancias del control están escritas como:

$$c_1 = a_1 - \delta k_1, \quad c_2 = a_2 - \delta^2 k_2 \quad (6.3)$$

Con esta parametrización de las ganancias del control, los valores propios de la linealización en el origen de (6.1) son $\{\delta\tilde{\lambda}_1, \delta\tilde{\lambda}_2\}$, donde $\{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2\}$ son las raíces del polinomio $P_c(s) = s^2 + k_1 s + k_2$. Es decir, mientras más grande sea δ , más grande será la razón de decaimiento exponencial alrededor del origen. Las altas ganancias definidas en (6.3) son comúnmente usadas para mejorar la robustez del sistema (6.1) contra perturbaciones no acotadas y dinámicas no modeladas [Kokotovic & Marino, 1986; Morari & Zafiriou, 1989].

Sea $A = aN(a)$, entonces podemos escribir $S(c^T x(t)) \cong A \text{sen} \omega t$. Entonces, el sistema (6.1) conduce a la siguiente expresión para la órbita periódica **PA**:

$$\frac{[a_1^2\omega^2 + (a_2 - \omega^2)^2]}{A^2}x_1^2 + \frac{[a_1^2\omega^2 + (a_2 - \omega^2)^2]}{\omega^2 A^2}x_2^2 = 1 \quad (6.4)$$

De la solución de (6.2) (\tilde{r}, \tilde{v}) , se tiene que

$$\omega^2 = \frac{\delta k_1 a_2 - \delta^2 k_2 a_1}{\delta k_1 - a_1},$$

$$A = \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) N^{-1} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right)$$

las cuales al ser substituidas en (6.4) producen:

$$\frac{q(\delta)}{\left[N^{-1} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) \right]^2} x_1^2 + \frac{q(\delta)}{\left[N^{-1} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) \right]^2} r(\delta) x_2^2 = 1 \quad (6.5)$$

donde

$$q(\delta) = a_2^2 - a_1 a_2 k_1 \delta + (a_1^2 k_2 + a_2 k_1^2 - 2a_2 k_2) \delta^2 - a_1 k_1 k_2 \delta^3 + k_2^2 \delta^4$$

$$r(\delta) = \frac{\delta k_1}{a_1}$$

En las coordenadas (x_1, x_2) , la órbita periódica **PA** es una elipse centrada en el origen. De aquí que para describir el comportamiento de la órbita periódica **PA** con respecto a δ , es suficiente estudiar las intersecciones de la elipse (6.3) con los ejes. Mostraremos que para δ suficientemente grande, la órbita cerrada representada por (6.5) converge al origen. Definamos

$$B_1(\delta) = \frac{\left[N^{-1} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) \right]^2}{q(\delta)}$$

$$B_1(\delta) = \frac{\left[N^{-1} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) \right]^2}{q(\delta)} r(\delta)$$

El siguiente resultado se usará para estudiar el comportamiento de la órbita periódica **PA** (6.5) con respecto a las ganancias del control.

Proposición 6.1.

$$(a) \frac{dN^{-1} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right)}{d\delta} = -\frac{\pi}{4} \frac{\left[N^{-1} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) \right]^3}{\sqrt{\left[N^{-1} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) \right]^2 - 1}} \frac{a_1 k_1}{(a_1 - \delta k_1)^2} \quad (6.6)$$

$$(b) \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) N^{-1} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) = 2 \quad (6.7)$$

Demostración. (a) Usando la expresión (2.12) y el teorema de la derivada de la función inversa se obtiene la derivada (6.6).

(b) Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) N^{-1} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) &= \lim_{Z \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} N^{-1}(Z) Z = \lim_{Z \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} Z}{1/N^{-1}(Z)} = \\ &= \lim_{Z \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{N^{-1}(Z)}{\sqrt{[N^{-1}(Z)]^{-1}}}} \quad (\text{por la regla de L'Hopital y por parte (a)}). \\ &= 2. \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 6.2. Se satisfacen los siguientes límites:

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} B_1(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} B_2(\delta) = 0 \quad (6.8)$$

Demostración. Ya que $q(\delta)$ es un polinomio de cuarto grado, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow \infty} B_1(\delta) &= \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left[N^{-1} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) \right]^2 \frac{1}{k_2^2 \delta^4} \\ &= \frac{k_1^4}{k_2^2 a_1^4} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right)^4 \left[N^{-1} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) \right]^2 \\ &= \frac{k_1^4}{k_2^2 a_1^4} \lim_{Z \rightarrow 0} Z^2 [N^{-1}(Z) \cdot Z]^2 \\ &= 0 \quad (\text{usando la parte (b) de la Proposición 6.1}). \end{aligned}$$

Análogamente, usando el hecho de que para valores grandes de δ , $r(\delta) \approx \frac{-\delta k_2 a_1}{k_1}$, entonces obtenemos

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} B_2(\delta) = \frac{-k_1^3}{k_2 a_1^3} \lim_{Z \rightarrow 0} Z [N^{-1}(Z) \cdot Z]^2 = 0. \blacksquare$$

Observación 6.1. El resultado anterior muestra que la órbita periódica PA se contrae a un punto de equilibrio cuando $\delta \rightarrow \infty$. Además, ya que la órbita periódica PA es inestable, el punto de equilibrio se hace prácticamente inestable inestable. De acuerdo a la parametrización (6.3), se tiene que $\alpha_1(\delta) < 0$ y $\alpha_1(\delta) < \alpha_2(\delta)$, para $\delta > \delta^*$ y δ^* suficientemente grande. Pero $\alpha_1(\delta) < 0$ implica que $\sigma(A) \cap C^+ \neq \emptyset$. De aquí que si la matriz A tiene al menos un eigenvalor inestable, el origen se convierte en un punto de equilibrio tipo fuente cuando $\delta \rightarrow \infty$ para $\alpha_1(\delta) < 0$ y $\alpha_1(\delta) < \alpha_2(\delta)$. Haciendo uso de los Teoremas 2.3 y 3.10 en [Alvarez *et al.*, 1993] acerca de los puntos de equilibrio y el comportamiento cualitativo de

(1) podemos describir el diagrama de bifurcación del primer armónico del sistema 2-dimensional (6.1) (ver figura 6.1). El círculo externo en la Figura 6.1 representa la proyección al infinito de \mathbb{R}^2 . Concluimos que, si la traza(A) > 0 , entonces la región de atracción del origen $\Omega(0)$, se anula cuando las ganancias del control van al infinito.

El siguiente resultado muestra que los límites (6.8) son alcanzados de manera estrictamente decreciente.

Proposición 6.3. *Se cumple lo siguiente:*

$$(a) \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{dB_1(\delta)}{d\delta} = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{dB_2(\delta)}{d\delta} = 0$$

(b) Para $\delta > \delta^*$, con δ^* suficientemente grande, las funciones $B_1(\delta)$ y $B_2(\delta)$ son estrictamente decrecientes.

Demostración. Sólo haremos la demostración para $B_1(\delta)$. La prueba para $B_2(\delta)$ se sigue de manera similar. La derivada de $B_1(\delta)$ está dada por:

$$\frac{dB_1}{d\delta} = \frac{\left[N^{-1} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) \right]^2}{[q(\delta)]^2 - 1} \delta^3 \cdot \left[\frac{\pi}{2} \frac{\left[N^{-1} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) \right]^2}{\sqrt{\left[N^{-1} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \right) \right]^2 - 1}} \cdot \frac{a_1}{a_1 - \delta k_1} \cdot \frac{k_1 \delta}{a_1 - \delta k_1} \cdot \frac{q(\delta)}{\delta^4} - \frac{q'(\delta)}{\delta^3} \right].$$

El factor que está fuera de los parentesis cuadrados siempre es positivo para δ finito. Ya que $q(\delta)$ es un polinomio de cuarto grado, tal factor se hace cero cuando $\delta \rightarrow \infty$ (de la Proposición 6.1). Analicemos ahora los términos dentro de los parentesis cuadrados. Se puede ver que $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{q(\delta)}{\delta^4} = k_2^2$ y $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{q'(\delta)}{\delta^3} = 4k_2^2$. De la Proposición 6.2, los términos dentro de los parentesis cuadrados tienden a $-4k_2^2 < 0$, cuando $\delta \rightarrow \infty$. Ya que $B_1(\delta)$ es una función continua, concluimos que $\frac{dB_1(\delta)}{d\delta} < 0$ para todo $\delta > \delta^*$ y $\delta^* > 0$ suficientemente grande. Esto muestra que $B_1(\delta)$ es estrictamente decreciente para $\delta > \delta^*$. ■

Observación 6.2. El resultado anterior es interesante porque implica para valores de δ suficientemente grandes, las magnitudes de las intersecciones con los ejes de la elipse (6.5) son más pequeñas cuando se incrementa el parametro de la ganancia δ . Ya que el interior de la órbita periódica **PA** es una

aproximación de la región de atracción del origen, $\Omega(0)$, entonces obtenemos que $\Omega(0)$ decrece cuando se incrementan las ganancias del control $c_1(\delta)$ y $c_2(\delta)$. También, $\Omega(0)$ se anula cuando $\delta \rightarrow \infty$. Además, si $\Omega(\delta)$ denota la dependencia de $\Omega(0)$ con respecto de δ , entonces los resultados anteriores implican el siguiente resultado de anidamiento de las regiones de atracción:

$$\Omega_{\delta_1}(0) \subset \Omega_{\delta_2}(0) \quad (6.9)$$

para $\delta_1 > \delta_2 > \delta^*$. De aquí se plantea un problema:

Margen de Robustez respecto al parámetro de la retroalimentación de alta ganancia contra tamaño de la región de atracción.

6.2 Simulaciones numéricas

Ilustraremos el anidamiento de los conjuntos en (6.9) con simulaciones numéricas. Consideremos el caso donde $a_1 = -3$ y $a_2 = -2$, de tal manera que los valores propios de la matriz A en (6.1) son $\{+1, +2\}$. Esto quiere decir que el sistema no controlado tiene sus valores propios en C^+ . Escogemos las ganancias del control como $c_1 = -3 - 2\delta$ y $c_2 = -2 - \delta^2$, de manera que

$$\alpha_1 = -2\delta^3 \text{ y } \alpha_2 = \frac{\delta^2}{2}, \text{ para } \delta > 0 \quad (6.10)$$

Con (6.10), los eigenvalores en el origen son $\{-\delta, -\delta\}$. Note que $\alpha_1 < \alpha_2$ y que $\alpha_1 < 0$, de tal manera que existe una órbita periódica **PA** inestable para todo $\delta > 0$. Además, tal órbita periódica **PA** se contrae a un punto de equilibrio inestable cuando $\delta \rightarrow \infty$ (ver Figura 6.1). La Figura 6.2 muestra la órbita periódica real del sistema para $\delta = 10, 15, 25, 50$ y 250 . Note que la propiedad de anidamiento está presente para estos valores de δ , y que la órbita periódica se aproxima a una forma elipsoidal cuando δ es cada vez mayor, como describimos en la sección anterior. También, se puede observar que $\Omega(0)$ se anula cuando $\delta \rightarrow \infty$.

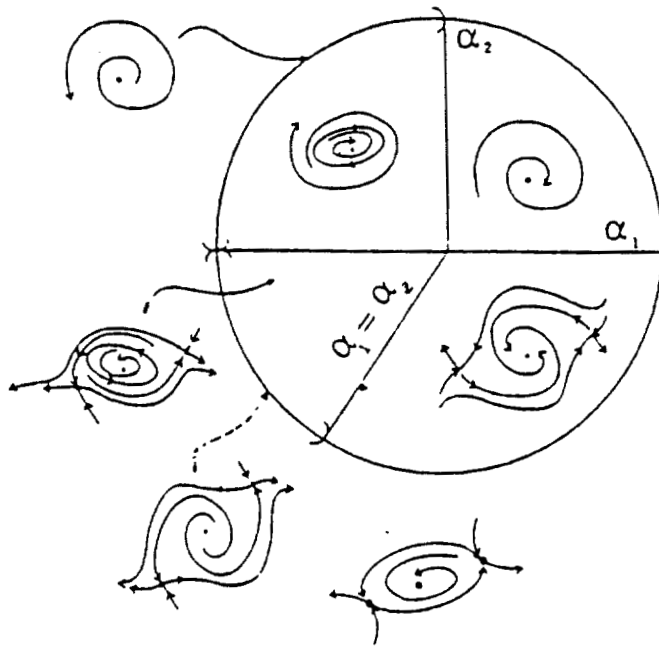


Figura 6.1 Retratos fase de 1er. armónico para el sistema de control (6.1)

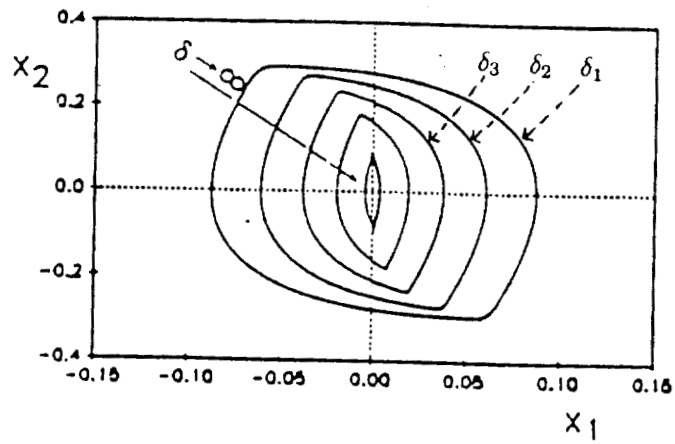


Figura 6.2 Ciclos límite anidados para el caso $a_1 = -3$ y $a_2 = -2$ cuando δ varia ($\delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \dots$).

6.3 Conclusiones

En ésta sección usamos una aproximación del primer armónico (Método de la función descriptora) para analizar la dependencia de las órbitas periódicas sobre los parámetros de control de sistemas lineales planos con una retroalimentación saturada. En investigaciones anteriores [Alvarez *et al*, 1993] donde se estudiaron estos sistemas lineales sujetos a una retroalimentación de estado con saturación con teoría cualitativa de sistemas dinámicos, el comportamiento de las regiones de atracción con respecto a las ganancias del control no fue obvia. En ésta sección se mostró, desde un punto de vista de una aproximación de primer armónico, que si el sistema a lazo abierto tiene al menos un valor propio inestable, las órbitas periódicas convergen monótonicamente a un punto de equilibrio inestable cuando las ganancias del control van al infinito. Ya que el interior de la órbita periódica **PA** es una aproximación de la región de atracción del origen $\Omega(0)$, entonces también obtuvimos que desde un punto de vista de una aproximación de primer armónico la región de atracción del origen $\Omega(0)$ decrece cuando se incrementan las ganancias del control $c_1(\delta)$ y $c_2(\delta)$.

Los resultados obtenidos en ésta sección conducen a un problema que hasta ahora no ha sido estudiado:

Margen de Robustez contra tamaño de la región de atracción.

Capítulo 7

Sistemas n-dimensionales: primera parametrización de alta ganancia

7.1 Introducción

En éste capítulo usaremos la primera parametrización. Para ilustrar los fenómenos que aparecen cuando un sistema esta sujeto a un control de alta ganancia de este tipo, comenzamos presentando un ejemplo.

Ejemplo. Consideremos el siguiente sistema de control tri-dimensional:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + u\end{aligned}\tag{7.1}$$

Para $u = 0$ (*sistema a lazo abierto*) los eigenvalores son $\{-1, -2, -3\}$. De aquí que todas las trayectorias a lazo abierto converjan exponencialmente al origen. Supongamos que para controlar el sistema (7.1) se diseña la siguiente retroalimentación parametrizada:

$$L(x; \lambda) = (-\lambda^3 + 6)x_1 + (-3\lambda^2 + 11)x_2 + (-3\lambda + 6)x_3, \quad \lambda > 0\tag{7.2}$$

Denotemos por $K_1 = -\lambda^3 + 6$, $K_2 = -3\lambda^2 + 11$ y $K_3 = -3\lambda + 6$. Note que $|K_j| \rightarrow \infty$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$. La entrada de control que esta actuando sobre (7.1) es $u = u_s(x; \lambda) = S(L(x; \lambda))$. Bajo (7.2), los eigenvalores del sistema linealizado alrededor del origen son $\{-\lambda, -\lambda, -\lambda\}$. Además, el origen es el único punto de equilibrio del sistema a lazo cerrado $\dot{x} = Ax + bu_s(x)$. Usando simulaciones numéricas, encontramos el siguiente comportamiento dinámico.

- a) Si $0 \leq \lambda < 29.6$, el sistema a lazo cerrado $\dot{x} = Ax + bu_s(x)$ es **GAE** alrededor del origen.
- b) Si $\lambda > 29.6$, el sistema a lazo cerrado no es **GAE**. Algunas trayectorias a lazo cerrado convergen a una

órbita periódica atractora y otras convergen asintóticamente al origen. Por lo tanto estas últimas trayectorias están contenidas en la región de atracción (**RA**) del origen.

De tales resultados numéricos, se ve que ocurre una bifurcación topológica en $\lambda \cong 29.6$. En realidad, en este valor crítico de λ , aparece una órbita periódica no-hiperbólica. Para $\lambda > 29.6$, tal órbita periódica se bifurca en una órbita periódica atractora, la cual es el ω -conjunto límite de las trayectorias en (b), y en una órbita periódica inestable (de tipo silla), cuya variedad estable define la frontera de la **RA** del origen. La figura 7.1 muestra la órbita periódica atractora para 2 valores de u_{\max} . La forma de estas órbitas periódicas atractoras permanece casi igual para valores grandes de λ . Sin embargo, ocurre un fenómeno muy interesante en el comportamiento de la órbita periódica inestable. Como fue mencionado anteriormente, la variedad estable de la órbita periódica tipo-silla define la frontera de la **RA** del origen. Se llevaron a cabo simulaciones numéricas en un Sun-Sparc workstation, encontrándose que a valores cada vez mayores de λ , corresponden **RA's** cada vez más pequeñas! Por ejemplo, condiciones iniciales fuera de la bola $|x| \geq 10^{-5}$ no pueden ser llevadas al origen cuando $\lambda > 10^4$. Esto significa que cuando $\lambda \rightarrow \infty$, la **RA** se anula. Este comportamiento dinámico es generado cuando la órbita periódica tipo-silla se contrae y desestabiliza al origen. La figura 7.2 presenta el mapa de bifurcación describiendo el comportamiento dinámico mencionado para $u_{\max} = 1$. Es de esperarse que en sistemas de dimensiones mayores ocurra un comportamiento dinámico análogo.

Ya que en la práctica es muy común usar **RAG**, es importante una mejor comprensión del fenómeno. Pero una descripción analítica del hecho que la **RA** se anule no es una tarea fácil porque en la mayoría de los casos no es posible encontrar explícitamente las soluciones del sistema $\dot{x} = Ax + bS(K^T x)$ y por lo tanto, en general el análisis de las trayectorias que definen la **RA** es un problema muy complicado. En este capítulo veremos como el uso de técnicas de balance armónico proporcionará una explicación del hallazgo numérico de que la **RA** se anula cuando la parte real de los eigenvalores a lazo cerrado divergen a $-\infty$. Se muestra que cuando los eigenvalores a lazo cerrado tienen valor absoluto muy grande y se localizan en el lado izquierdo del plano complejo, entonces aparecen varias órbitas periódicas simétricas inestables que se contraen al origen, provocando la desestabilización de este punto de equilibrio. Este

comportamiento dinámico es interpretado como la anulación de la región de atracción del origen cuando se usa una retroalimentación de alta ganancia con saturación.

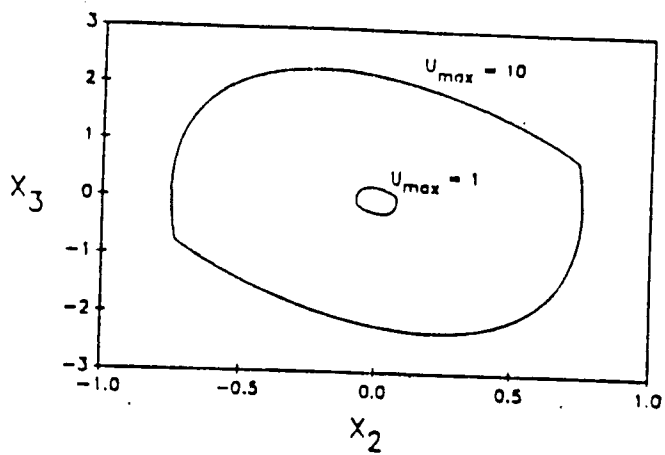


Figura 7.1 Orbita periódica atractora para 2 valores de u_{max}

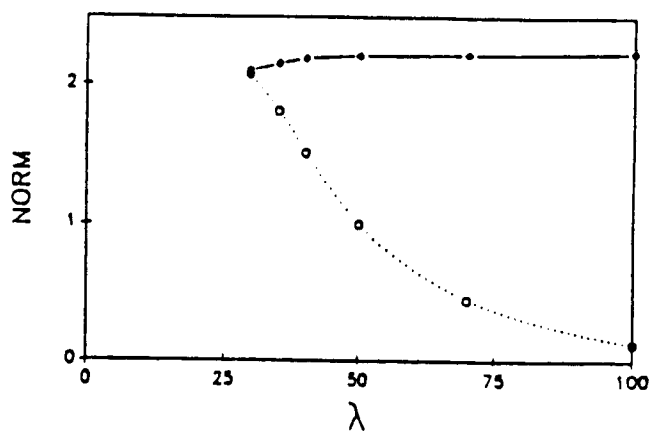


Figura 7.2 Diagrama de Bifurcación del sistema controlado para $u_{max} = 1$

7.2 Información del método de la función descriptora

Considerar el sistema n-dimensional controlable

$$\dot{x} = Ax + bS(K^T x) \quad (7.3)$$

escrito en la forma canónica (2.11). En este capítulo aplicaremos el método de la función descriptora para estudiar la existencia de órbitas periódicas simétricas, de manera que si $(a, \omega) \in \mathbb{R}_+^n$ son solución de la ecuación (2.9) entonces para determinar las soluciones aproximadas del sistema (7.3) debemos encontrar la solución particular de $\dot{x} = Ax + bN(a)a \sin(\omega t)$ correspondiente a la oscilación $\sigma(t) = N(a)a \sin(\omega t)$. Esta solución particular fue encontrada en el capítulo 2, además se vió que las coordenadas satisfacen las relaciones (2.14), de manera que para éste caso particular la correspondiente órbita periódica **PA** en el espacio fase (x_1, x_2, \dots, x_n) está dada como la intersección de las siguientes variedades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1^2}{B_1^2 + B_2^2} + \frac{x_2^2}{\omega^2(B_1^2 + B_2^2)} = 1 \\ \frac{x_2^2}{\omega^2(B_1^2 + B_2^2)} + \frac{x_3^2}{\omega^4(B_1^2 + B_2^2)} = 1 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{x_{n-1}^2}{\omega^{2(n-2)}(B_1^2 + B_2^2)} + \frac{x_n^2}{\omega^{2(n-1)}(B_1^2 + B_2^2)} = 1 \end{array} \right. \quad (7.4)$$

donde

$$B_1^2 + B_2^2 = \frac{a^2 N^2(a)}{(a_{2m} - a_{2m-2}\omega^2 + \dots + (-1)^m \omega^{2m})^2 + \omega^2(a_{2m-1} - a_{2m-3}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1} a_1 \omega^{2(m-1)})^2}$$

para $n = 2m$, y

$$B_1^2 + B_2^2 = \frac{a^2 N^2(a)}{(a_{2m+1} - a_{2m-1}\omega^2 + \dots + (-1)^m a_1 \omega^{2m})^2 + \omega^2(a_{2m} - a_{2(m-1)}\omega^2 + \dots + (-1)^m \omega^{2m})^2}$$

para $n = 2m + 1$.

Se sabe que $1 + W(p) = P_c(p)/P_0(p)$ [Barnett & Cameron, 1985]. De (2.9) y (2.12), una órbita periódica PA con parámetros $(\bar{a}, \bar{\omega})$ corresponde a un punto de intersección de las curvas $\{W(j\omega) : \omega > 0\}$ y $\{-1/N(a) : a > 0\} = (-\infty, -1)$, donde $j = (-1)^{1/2}$. Ya que $N(a)$ es estrictamente decreciente para $a > 1$, una solución $(\bar{a}, \bar{\omega})$ corresponde unívocamente a un par $(\bar{r}, \bar{\omega})$ tal que $N(\bar{a}) = 1/(1 - \bar{r})$. Por lo tanto, soluciones $(\bar{a}, \bar{\omega})$ corresponden a soluciones $\bar{\omega} > 0, \bar{r} \leq 0$ de la ecuación $1 + W(j\omega) = r$. De esta manera, encontramos que el par (ω, r) satisface las siguientes ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} d_{2m} - d_{2m-2}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1}d_2\omega^{2(m-1)} + (-1)^m\omega^{2m} \\ = r[a_{2m} - a_{2m-2}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1}a_2\omega^{2(m-1)} + (-1)^m\omega^{2m}] \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} d_{2m-1} - d_{2m-3}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1}d_1\omega^{2(m-1)} \\ = r[a_{2m-1} - a_{2m-3}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1}a_1\omega^{2(m-1)}] \end{aligned}$$

para $n = 2m$, y

$$\begin{aligned} d_{2m+1} - d_{2m-1}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1}d_1\omega^{2m} \\ = r[a_{2m+1} - a_{2m-1}\omega^2 + \dots + (-1)^m a_1\omega^{2m}] \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} d_{2m} - d_{2m-2}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1}d_2\omega^{2(m-1)} + (-1)^m\omega^{2m} \\ = r[a_{2m} - a_{2m-2}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1}a_2\omega^{2(m-1)} + (-1)^m\omega^{2m}] \end{aligned}$$

para $n = 2n + 1$.

7.3 Resultados principales

Para estudiar el comportamiento dinámico del sistema $\dot{x} = Ax + bS(K^T x)$ cuando la parte real de los eigenvalores a lazo cerrado tienden a $-\infty$, usamos la siguiente parametrización: $K_i = a_{n-i} - \delta^{n-i}c_{n-i}$, $1 \leq i \leq n$, donde los c_i 's son constantes positivas tal que el polinomio $P_c^*(s) = s^n + \sum_{i=1}^n c_i s^{n-i}$ es Hurwitz y δ es un parámetro positivo. Con tal parametrización del vector de ganancias del control K , si $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ son las raíces de $P_c^*(s)$, entonces $\{\delta\lambda_1, \delta\lambda_2, \dots, \delta\lambda_n\}$ son los eigen-

valores del sistema a lazo cerrado en el origen. De esta manera, cuando $\delta \rightarrow \infty$, obtenemos el comportamiento asintótico deseado de los eigenvalores a lazo cerrado, y las soluciones $(\bar{a}, \bar{\omega})$ dependerán del parámetro δ .

Proposición 7.1. Si una solución $(\bar{a}, \bar{\omega})$ tiene las propiedades $a^2 N^2(a) \rightarrow \beta < \infty$ y $\omega^2 \rightarrow \infty$, cuando $\delta \rightarrow \infty$. Entonces la correspondiente órbita periódica PA se contrae al origen cuando $\delta \rightarrow \infty$.

Demostración. De (7.4), para cualquier n y $0 \leq \rho \leq n-1$, el término $\omega^{2\rho}(B_1^2 + B_2^2)$ es el producto de $a^2 N^2(a)$ con un cociente de polinomios $P_1(\omega^2)/P_2(\omega)$ satisfaciendo $\deg(P_1(\omega^2)) < \deg(P_2(\omega^2))$ y como $a^2 N^2(a) \rightarrow \beta < \infty$ y $\omega^2 \rightarrow \infty$ cuando $\delta \rightarrow \infty$ entonces $\omega^{2\rho}(B_1^2 + B_2^2) \rightarrow 0$. ■

El resultado de la proposición anterior es importante porque establece que las órbitas periódicas PA que se contraen al origen cuando $\delta \rightarrow \infty$ son aquellas para las cuales la señal $S(v_0(t)) \cong \bar{a}(\delta)N(\bar{a}(\delta))\sin(\omega(\delta)t)$ alcanza frecuencia infinita con una amplitud de la oscilación finita. Bajo esta clase de señales, la ecuación diferencial $y^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_i y^{(n-i)} = S(v_0(t))$ se comporta como un filtro pasa bajos, de manera que la única solución particular es la trivial $y(t) = 0$.

En lo que sigue estudiaremos el comportamiento de las soluciones $(\bar{r}(\delta), \bar{\omega}(\delta))$ de (7.5) (o (7.6)) cuando $\delta \rightarrow \infty$. Específicamente, buscaremos soluciones $(\bar{r}(\delta), \bar{\omega}(\delta))$ las cuales satisfacen las condiciones de la Proposición 7.1. Consideremos el caso cuando n es par (es decir $n = 2m$). Supóngase que $r \neq 0$. Entonces, la variable r puede ser eliminada de (7.5) para dar

$$f(\omega^2) = \begin{aligned} & [c_{2m}\delta^{2m} - c_{2m-2}\delta^{2m-2}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1}c_2\delta^2\omega^{2(m-1)} + (-1)^m\omega^{2m}] \\ & [a_{2m-1} - a_{2m-3}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1}a_1\omega^{2(m-1)}] \\ & - [c_{2m-1}\delta^{2m-1} - c_{2m-3}\delta^{2m-3}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1}c_1\delta\omega^{2(m-1)}] \\ & [a_{2m} - a_{2m-2}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1}a_2\omega^{2(m-1)} + (-1)^m\omega^{2m}] \end{aligned} \quad (7.7)$$

De esta manera, $f(\omega^2)$ es una función en la variable ω^2 . Así que, las soluciones positivas $\bar{\omega}$ de la ecuación $f(\omega^2) = 0$ son el valor de la frecuencia para las órbitas periódicas PA. Definamos los siguientes polinomios en la variable L :

$$Q(L) = c_{2m-1} - c_{2m-3}L + \dots + (-1)^{m-1}c_1L^{m-1} \quad (7.8a)$$

$$S(L) = c_{2m} - c_{2(m-1)}L + \dots + (-1)^{m-1}c_2L^{m-1} + (-1)^mL^m \quad (7.8b)$$

Análogamente, definimos los siguientes polinomios cuando $n = 2m + 1$:

$$Q(L) = c_{2m+1} - c_{2m-1}L + \dots + (-1)^m c_1L^m \quad (7.9a)$$

$$S(L) = c_{2m} - c_{2(m-1)}L + \dots + (-1)^{m-1}c_2L^{m-1} + (-1)^mL^m \quad (7.9b)$$

La siguiente proposición proporciona condiciones bajo las cuales una órbita periódica PA se contrae al origen cuando $\delta \rightarrow \infty$.

Proposición 7.2.A. Sea $n = 2m$, $m \geq 1$, y sea L_0 una raíz del polinomio $Q(L)$ tal que

- a) L_0 es simple y
- b) $S(L_0) < 0$ para m par, y $S(L_0) > 0$ para m impar

Entonces, existe $(\bar{a}, \bar{\omega})$ correspondiente a una órbita periódica PA tal que $\bar{\omega}^2(\delta) \cong L_0\delta^2$

y $\bar{a}^2 N^2(\bar{a}) \rightarrow [N^{-1}(\beta)]^2 \beta^2 < \infty$ cuando $\delta \rightarrow \infty$, donde $\beta = \frac{(-1)^m L_0^m}{(-1)^m L_0^m - S(L_0)}$.

Demostración.

Asumir que para δ grande, existen dos números κ y L_0 tales que $\omega^2(\delta) \cong L_0\delta^{2\kappa}$. De (7.5), obtenemos

$$\begin{aligned} & [c_{2m}\delta^{2m} - c_{2m-2}L_0\delta^{2(m-2+\kappa)} + \dots + (-1)^{m-1}c_2L_0^{m-1}\delta^{2(1+\kappa(m-1))} + (-1)^mL_0^m\delta^{2m\kappa}] \\ & = r [a_{2m} - a_{2m-2}L_0\delta^{2\kappa} + \dots + (-1)^{m-1}a_2(L_0\delta^{2\kappa})^{m-1} + (-1)^m(L_0\delta^{2\kappa})^m] \end{aligned} \quad (7.10)$$

Si $\kappa > 0$ y $k \neq 1$, tenemos que $r \rightarrow -\infty$ cuando $\delta \rightarrow \infty$ a una razón diferente en cada expresión en (7.5). De aquí que, la única parametrización posible de órbitas periódicas que se contraigan al origen

cuando $\delta \rightarrow \infty$ es aquella para la cual $\kappa = 1$. En éste caso, $f(L\delta^2)$ es un polinomio en δ cuyo término de mayor peso es $-Q(L)(-1)^m \delta^{4m-1}$. Por hipótesis, L_0 es una raíz simple. Si escogemos L suficientemente próximo pero diferente a L_0 , entonces $f(L\delta^2)$ cambia de signo en L_0 cuando $\delta \rightarrow \infty$. Por lo tanto, $f(\omega^2)$ tiene una raíz $\omega^2(\delta)$ tal que $\omega^2(\delta)/\delta^2 \rightarrow L_0$ cuando $\delta \rightarrow \infty$. Por otra parte, de (7.5) tenemos que

$$r = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{S(L_0)\delta^{2m}}{a_{2m} - a_{2m-2}L_0\delta^2 + \dots + (-1)^{m-1}a_2(L_0\delta^2)^{m-1} + (-1)^m(L_0\delta^2)^m} = \frac{S(L_0)}{(-1)^m L_0^m}$$

De las hipótesis de la proposición, se sigue que $-\infty < r(\delta) < 0$ cuando $\delta \rightarrow \infty$. Entonces $N(a) = 1/(1-r(\delta))$, y por lo tanto también se tiene que $a = N^{-1}[1/(1-r(\delta))]$ converge a un valor finito cuando $\delta \rightarrow \infty$. De aquí que $\bar{a}^2 N^2(\bar{a})$ converge al número $[N^{-1}(\beta)]^2 \beta^2$ donde $\beta = \frac{(-1)^m L_0^m}{(-1)^m L_0^m - S(L_0)}$. ■

Se tiene un resultado análogo para el caso donde n es impar.

Proposición 7.2.B. Sea $n = 2m + 1$, $m \geq 0$, y sea L_0 una raíz del polinomio $Q(L)$ tal que

- a) L_0 es simple y
- b) $S(L_0) < 0$ para m par, y $S(L_0) > 0$ para m impar.

Entonces, existe $(\bar{a}, \bar{\omega})$ correspondiente a una órbita periódica PA tal que $\omega^{-2}(\delta) \cong L_0\delta^2$ y $a^{-2}N^2(\bar{a}) \rightarrow \beta < \infty$ cuando $\delta \rightarrow \infty$.

Los resultados anteriores establecen que las órbitas periódicas que se contraen al origen cuando $\delta \rightarrow \infty$ tienen la propiedad de que ω^2 se parametriza como $\omega^2(\delta) \cong L_0\delta^2$, para ciertos $L_0 \in \mathbb{R}$. En lo que sigue, buscaremos soluciones de (7.5) o (7.6) en las cuales ω^2 puede ser parametrizada como fue indicado anteriormente. Para ello, las hipótesis de la proposición 7.2 deben satisfacerse. Es decir, dado el polinomio Hurwitz $P_c^*(s)$ y sus polinomios asociados $Q(L)$ y $S(L)$ indicados en (7.8) y (7.9) nos planteamos el siguiente problema: existirá una raíz L_0 del polinomio $Q(L)$ tal que a) L_0 es una raíz simple, y b) $S(L_0) < 0$ cuando m es par y $S(L_0) > 0$ cuando m es impar?

Proposición 7.3. Existe al menos un número L_0 satisfaciendo las condiciones de la proposición 7.2.

Demostración. Haremos la prueba solamente para el caso donde n es par. La prueba para el caso donde n es impar se sigue de manera análoga. Consideremos $P_c^*(L) = s^n + \sum_{i=1}^n c_i L^{n-1}$ y

notemos que $P_c^*(jL) = S(L^2) + jLQ(L^2)$. Ya que $P_c^*(L)$ es un polinomio Hurwitz, del Teorema de Hermite-Biehler (ver Apéndice), las raíces de los polinomios $Q(L)$ y $S(L)$ satisfacen la Propiedad de Alternancia. De aquí, las raíces de $Q(L)$ y $S(L)$ son reales, positivas y distintas. Esto implica que L_0 es una raíz simple. Para probar la condición (b) de la Proposición 7.2, tomemos m par. Escribimos $S(L_0) = (L_0 - L_{S,1}) \dots (L_0 - L_{S,m})$ y tomemos $L_0 = L_{Q,m-1}$. Ya que $m - 1$ es impar, la Propiedad de Alternancia implica que $S(L_0) < 0$. Análogamente, cuando m es impar, se cumple que $S(L_0) > 0$, que es lo que teníamos que demostrar. ■

Una órbita periódica **PA** que se contrae al origen cuando $\delta \rightarrow \infty$ será llamada órbita periódica **PA** que se colapsa.

Teorema 7.1.A. Sea n par (i.e. $n = 2m$, $m \geq 2$). Entonces

a) Si m es par, existen $m/2$ órbitas periódicas **PA** que se colapsa.

b) Si m es impar, existen $(m - 1)/2$ órbitas periódicas **PA** que se colapsan.

Demostración. De la Proposición 7.1, si una solución $(\bar{a}, \bar{\omega})$ tiene las propiedades $a^2 N^2(a) \rightarrow \beta < \infty$ y $\omega^2 \rightarrow \infty$, cuando $\delta \rightarrow \infty$, entonces la correspondiente órbita periódica **PA** tiende al origen cuando $\delta \rightarrow \infty$. De la proposición 7.2, tales propiedades asintóticas se satisfacen si $\bar{\omega}^2(\delta) \cong L_0 \delta^2$ y $\bar{a}^2 N^2(\bar{a}) \rightarrow \beta < \infty$ cuando $\delta \rightarrow \infty$, o equivalentemente, si las condiciones de la Proposición 7.2 se cumplen en L_0 . Así que, de la Proposición 7.3 y de la Propiedad de Alternancia, las raíces de $Q(L)$ y $S(L)$ satisfacen la siguiente cadena de desigualdades

$$0 < L_{S,1} < L_{Q,1} < L_{S,2} < \dots < L_{S,m-1} < L_{Q,m-1} < L_{S,m}$$

Si m es par, las raíces de $Q(L)$ que satisfacen las condiciones de la Proposición 7.2 son $\{L_{Q,1}, L_{Q,3}, \dots, L_{Q,m-1}\}$, es decir, en este caso existen $\frac{m}{2}$ órbitas periódicas **PA** que se colapsan. Análogamente, si m es impar, las raíces de $Q(L)$ que satisfacen las condiciones de la Proposición 7.2 son $\{L_{Q,2}, L_{Q,3}, \dots, L_{Q,m-1}\}$. Por lo tanto existen exactamente $\frac{m-1}{2}$ órbitas periódicas **PA** que se colapsan. ■

Para el caso donde n es impar, se tiene un resultado análogo al teorema anterior.

Teorema 7.1.B. Sea n impar (es decir, $n = 2m + 1$, $m \geq 1$). Entonces

a) Si m es par, existen $m/2$ órbitas periódicas PA que se colapsan.

b) Si m es impar, existen $(m + 1)/2$ órbitas periódicas PA que se colapsan.

Estos resultados solamente prueban que existen órbitas periódicas PA que se colapsan. Sin embargo también nos interesa obtener información acerca de la estabilidad de las órbitas.

Para estudiar la estabilidad de las órbitas periódicas PA que se colapsan hacemos las siguientes notaciones para el caso $n = 2m$, $m \geq 2$:

$$g_1(\omega) = c_{2m}\delta^{2m} - c_{2m-2}\delta^{2m-2}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1}c_2\delta^2\omega^{2(m-1)} + (-1)^m\omega^{2m}$$

$$g_2(\omega) = c_{2m-1}\delta^{2m-1} - c_{2m-3}\delta^{2m-3}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1}c_1\delta\omega^{2(m-1)}$$

$$g_3(\omega) = a_{2m} - a_{2m-2}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1}a_2\omega^{2(m-1)} + (-1)^m\omega^{2m}$$

$$g_4(\omega) = a_{2m-1} - a_{2m-3}\omega^2 + \dots + (-1)^{m-1}a_1\omega^{2(m-1)}$$

Proposición 7.4. Sea $L_0 > 0$ una raíz de $Q(L)$ satisfaciendo las condiciones de la Proposición 7.3, y sea $\bar{\omega}^2(\delta)$ la frecuencia asociada a una órbita periódica PA que se colapsa (es decir, $\bar{\omega}^2(\delta) \cong L_0\delta^2$). Entonces cuando $\delta \rightarrow \infty$, se satisfacen los siguientes límites:

$$1) [d(\omega g_2(\omega)g_3(\omega)/\delta^{4m-1})/d\omega]_{\omega=\bar{\omega}(\delta)} \rightarrow 2(-1)^m L_0^{m+1} Q'(L_0)$$

$$2) [d(\omega g_1(\omega)g_4(\omega)/\delta^{4m-1})/d\omega]_{\omega=\bar{\omega}(\delta)} \rightarrow 0$$

$$3) [d(\omega g_2(\omega)g_3(\omega) - \omega g_1(\omega)g_4(\omega))/\delta^{4m-1})/d\omega]_{\omega=\bar{\omega}(\delta)} \rightarrow 2(-1)^m L_0^{m+1} Q'(L_0)$$

$$4) (\bar{\omega}(\delta)g_2(\bar{\omega}(\delta))g_3(\bar{\omega}(\delta)) - \bar{\omega}g_1(\bar{\omega}(\delta))g_4(\bar{\omega}(\delta)))/\delta^{4m} \rightarrow 0$$

$$5) (g_3^2(\bar{\omega}(\delta)) + \bar{\omega}^2 g_4^2(\bar{\omega}(\delta)))/\delta^{4m} \rightarrow L_0^{2m}$$

$$6) [d(g_3^2(\omega) + \omega^2 g_4^2(\omega))/\delta^{4m-1})/d\omega]_{\omega=\bar{\omega}(\delta)} \rightarrow 4m L_0^{2m-1/2}$$

Demostración. Sea $L_0 > 0$ una raíz simple de $Q(L)$ satisfaciendo las condiciones de la Proposición

7.3.

$$1) \frac{\frac{d}{d\omega} [\omega g_2(\omega) g_3(\omega)]_{\omega=\bar{\omega}(\delta)}}{\delta^{4m-1}} = \frac{\bar{\omega}}{\delta} \frac{g_2'(\bar{\omega})}{\delta^{2m-2}} \frac{g_3(\bar{\omega})}{\delta^{2m}} + \frac{g_2(\bar{\omega})}{\delta^{2m-1}} \left[\frac{\bar{\omega}}{\delta} \frac{g_3'(\bar{\omega})}{\delta^{2m-1}} + \frac{g_3(\bar{\omega})}{\delta^{2m}} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{L_0} Q'(L_0) 2\sqrt{L_0} (-1)^m L_0^m + Q(L_0) [\text{constante}] = 2(-1)^m L_0^{m+1} Q'(L_0).$$

$$2) \frac{\frac{d}{d\omega} [\omega g_1(\omega) g_4(\omega)]_{\omega=\bar{\omega}(\delta)}}{\delta^{4m-1}} = \frac{1}{\delta} \left[\frac{\bar{\omega}}{\delta} \frac{g_1'(\bar{\omega})}{\delta^{2m-1}} \frac{g_4(\bar{\omega})}{\delta^{2m-2}} + \frac{\bar{\omega}}{\delta} \frac{g_1(\bar{\omega})}{\delta^{2m}} \frac{g_4'(\bar{\omega})}{\delta^{2m-3}} + \frac{g_1(\bar{\omega})}{\delta^{2m}} \frac{g_4(\bar{\omega})}{\delta^{2m-2}} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow 0[\sqrt{L_0} S'(L_0) 2\sqrt{L_0} (-1)^{m-1} a_1 L_0^{m-1} + \sqrt{L_0} S(L_0) (-1)^{m-1} a_1 2(m-1) \sqrt{L_0} L_0^{m-2} +$$

$$S(L_0) (-1)^{m-1} a_1 L_0^{m-1}] = 0$$

3) Se sigue directamente de 1) y 2).

$$4) \frac{\bar{\omega} g_2(\bar{\omega}) g_3(\bar{\omega}) - \bar{\omega} g_1(\bar{\omega}) g_4(\bar{\omega})}{\delta^{4m}} = \frac{\bar{\omega}}{\delta} \left[\frac{g_2(\bar{\omega})}{\delta^{2m-1}} \frac{g_3(\bar{\omega})}{\delta^{2m}} - \frac{g_1(\bar{\omega})}{\delta^{2m}} \frac{g_4(\bar{\omega})}{\delta^{2m-2}} \frac{1}{\delta} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{L_0} Q(L_0) (-1)^m L_0^m = 0$$

$$5) \frac{g_3^2(\bar{\omega}) + \bar{\omega}^2 g_4^2(\bar{\omega})}{\delta^{4m}} = \frac{g_3^2(\bar{\omega})}{\delta^{4m}} + \frac{\bar{\omega}^2}{\delta^2} \frac{g_4^2(\bar{\omega})}{\delta^{4m-4}} \frac{1}{\delta^2} \rightarrow (-1)^{2m} L_0^{2m} = L_0^{2m}$$

$$6) \frac{\frac{d}{d\omega} [g_3^2(\omega) + \omega^2 g_4^2(\omega)]_{\omega=\bar{\omega}(\delta)}}{\delta^{4m-1}} = 2 \frac{g_3(\bar{\omega})}{\delta^{2m}} \frac{g_3'(\bar{\omega})}{\delta^{2m-1}} + \frac{2}{\delta^2} \left[\frac{\bar{\omega}}{\delta} \frac{g_4^2(\bar{\omega})}{\delta^{4(m-1)}} + \frac{\bar{\omega}^2}{\delta^2} \frac{g_4(\bar{\omega})}{\delta^{2m-2}} \frac{g_4'(\bar{\omega})}{\delta^{2m-3}} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(-1)^m L_0^m (-1)^m 2m \sqrt{L_0} L_0^{m-1} = 4m \sqrt{L_0} L_0^{2m-1}. \blacksquare$$

Teorema 7.2. Todas las órbitas periódicas PA que se colapsan descritas en el Teorema 7.1 son inestables. Es decir, $\text{sign } d[\text{Im}(W(j\omega))]/d\omega|_{\bar{\omega}(\delta)} < 0$ cuando $\delta \rightarrow \infty$.

Demostración. Haremos la prueba en el caso en que n es par. La prueba para el caso en que n es impar es análoga. No es difícil obtener la igualdad

$$1 + W(j\omega) = \frac{g_1(\omega) + j\omega g_2(\omega)}{g_3(\omega) + j\omega g_4(\omega)}$$

Por lo tanto

$$\text{Im}(W(j\omega)) := \frac{G_1(\omega)}{G_2(\omega)} = \frac{\omega g_2(\omega) g_3(\omega) - \omega g_1(\omega) g_4(\omega)}{g_3^2(\omega) + \omega^2 g_4^2(\omega)}$$

y $d[\text{Im}(W(j\omega))]/d\omega = H(\omega)/G_2^2(\omega)$, donde $H(\omega) = G_2(\omega)G_1'(\omega) - G_1(\omega)G_2'(\omega)$.

Entonces, $\text{sign}\{d[\text{Im}(W(j\omega))]/d\omega\} = \text{sign}\{H(\omega)\}$. De aquí que

$$H(\omega) = \frac{[d(\omega g_2(\omega) g_3(\omega) - \omega g_1(\omega) g_4(\omega))/d\omega] [g_3^2 + \omega^2 g_4^2(\omega)]}{-[\omega g_2(\omega) g_3(\omega) - \omega g_1(\omega) g_4(\omega)] [d(g_3^2 + \omega^2 g_4^2(\omega))/d\omega]}$$

De la proposición 7.4, se obtiene que

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} (H(\bar{\omega}(\delta)) / \delta^{4m-1}) = 2L_0^{3m+1} (-1)^m Q'(L_0)$$

De la propiedad de alternancia las raíces de $Q(L)$ que satisfacen las condiciones de la Proposición 7.2 también satisfacen la propiedad de que $Q'(L_0) < 0$ para m par y $Q'(L_0) > 0$ cuando m es impar. Por lo tanto $\text{sign } d[\text{Im}(W(j\omega))] / d\omega|_{\bar{\omega}(\delta)} < 0$ y la órbita periódica **PA** que se colapsa es inestable (ver (2.13)). ■

7.4 Conclusiones

Con el resultado anterior de estabilidad hemos completado la información que el método del primer armónico nos da sobre el comportamiento del sistema a lazo cerrado $\dot{x} = Ax + bS(K^T x)$ en el límite de alta ganancia. Cierta familia de órbitas periódicas **PA** se contraen al origen. Ya que tales órbitas periódicas **PA** son inestables, el origen se convierte en un punto de equilibrio inestable. De esta manera la región de atracción del origen se anula. Es importante hacer notar que el comportamiento arriba descrito es independiente de la estabilidad del sistema a lazo abierto $\dot{x} = Ax$, siempre que $n \geq 3$. Es decir, desde el punto de vista de un Análisis del Primer Armónico, casi para cualquier condición inicial la solución correspondiente no converge al origen, lo cual en la práctica significa que para $n \geq 3$, un control de retroalimentación de alta ganancia conduce a la desestabilización del sistema a lazo cerrado con entradas acotadas.

Para obtener una descripción más completa de las órbitas periódicas en el límite de alta ganancia es necesario hacer un estudio de balance armónico de orden mayor (ver por ejemplo Moiola *et al.*, 1991).

Capítulo 8

Condiciones suficientes para que un polinomio sea Hurwitz y su aplicación a el diseño de un control estabilizante de alta ganancia (segunda parametrización)

8.1 Introducción: Sistemas bidimensionales y tridimensionales

Aquí investigaremos el comportamiento de un sistema en dos o tres dimensiones sujeto a un control de alta ganancia de la segunda parametrización. En particular, nos interesa el tipo de condiciones que deben satisfacer los parámetros del sistema para que a lazo cerrado no tenga soluciones periódicas de primer armónico, cuando el parámetro de alta ganancia es grande. En las secciones siguientes trataremos de generalizar estos resultados.

Comencemos con el caso bidimensional: Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{S} \left((-\delta c_2, -\delta c_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)$$

donde $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ ya que el polinomio a lazo cerrado $P_c(s)$ es Hurwitz.

Sabemos que $1 + W(s) = \frac{P_c(s)}{P_o(s)}$, de donde $1 + W(i\omega) = \frac{-\omega^2 + a_2 + \delta c_2 + i(a_1 + \delta c_1)\omega}{-\omega^2 + a_2 + i a_1 \omega}$.

Para que exista una órbita periódica debe cumplirse que $1 + W(i\omega) = r$, con $r < 0$. De aquí se obtiene que ω^2 y r deben satisfacer

$$\omega^2 = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{c_1}, \quad r = \frac{a_1 + \delta c_1}{a_1}.$$

Así pues, cuando el parámetro δ es grande,

el sistema bidimensional tiene órbitas periódicas de primer armónico si y sólo $a_1 < 0$ y $c_1 a_2 - c_2 a_1 > 0$, lo que nos da un criterio muy sencillo para diseñar controles que hagan que el sistema a lazo cerrado no tengan órbitas periódicas de primer armónico, de hecho se ve que si A es Hurwitz ($a_1 > 0$, $a_2 > 0$) entonces no pueden existir órbitas periódicas PA.

El caso de sistemas en tres dimensiones es un poco más complicado y lo analizaremos a continuación. En adelante supondremos que el sistema a lazo abierto es estable.

Consideremos el sistema tridimensional

$$(8.1) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} S \left((-\delta c_3, -\delta c_2, -\delta c_1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)$$

Ya que A es estable, tenemos $a_1, a_3, a_1 a_2 - a_3 > 0$. Si W es la función de transferencia, se satisface que $1 + W(s) = \frac{s^3 + (a_1 + \delta c_1)s^2 + (a_2 + \delta c_2)s + (a_3 + \delta c_3)}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$.

Para que exista una órbita periódica debe cumplirse que

$$1 + W(i\omega) = \frac{(a_3 + \delta c_3) - (a_1 + \delta c_1)\omega^2 + i\omega[(a_2 + \delta c_2) - \omega^2]}{a_3 - a_1\omega^2 + i\omega[a_2 - \omega^2]} = r, \text{ con } r < 0.$$

De donde

$$\begin{cases} (a_3 + \delta c_3) - (a_1 + \delta c_1)\omega^2 = r(a_3 - a_1\omega^2) \\ (a_2 + \delta c_2) - \omega^2 = r(a_2 - \omega^2) \end{cases}$$

Entonces

$$c_1\omega^4 + (a_1c_2 - a_2c_1 - c_3)\omega^2 + (a_2c_3 - a_3c_2) = 0 \quad (8.2)$$

$$(a_1a_2 - a_3)r^2 + [k(-a_2c_1 - a_1c_2 + c_3) - 2(a_1a_2 - a_3)]r + c_1c_2k^2 + (a_2c_1 + a_1c_2 - c_3)k + (a_1a_2 - a_3) = 0 \quad (8.3)$$

Para que no existan órbitas periódicas de primer armónico nosotros debemos buscar que no tenga raíces positivas el polinomio (8.2)

Llamemos Δ al discriminante de (8.2). De aquí resulta $\Delta = (a_1c_2 - a_2c_1 - c_3)^2 - 4c_1(a_2c_3 - a_3c_2)$.

Por otra parte el discriminante de (8.3) es igual a $k^2[\Delta]$.

Para este sistema las condiciones de estabilidad en el origen son $d_1, d_3, d_1 d_2 - d_3 > 0$. De todo esto tenemos el siguiente teorema.

Teorema 8.1. El sistema no tiene órbitas periódicas del primer armónico si y sólo si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

$$1) (c_1a_2 + c_2a_1) - 2\sqrt{(a_1a_2 - a_3)c_1c_2} < c_3 < (c_1a_2 + c_2a_1) + 2\sqrt{(a_1a_2 - a_3)c_1c_2}$$

que es el caso correspondiente a $\Delta < 0$,

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_2^2}{a_1 a_2 - a_3} c_1 < c_2 \\ \frac{a_3}{a_2} c_2 < c_3 \leq (c_1 a_2 + c_2 a_1) - 2\sqrt{(a_1 a_2 - a_3) c_1 c_2} \end{array} \right.$$

que es el caso correspondiente a $\Delta \geq 0$.

Demostración. 1) Si $\Delta < 0$ entonces no hay órbitas periódicas de primer armónico. Por otro lado $\Delta < 0$ si y sólo si $c_3^2 - 2(a_1 c_2 - a_2 c_1) c_3 + (a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 + 4a_3 c_1 c_2 - 4a_2 c_1 c_3 < 0$ lo que es equivalente a $c_3^2 - 2(a_1 c_2 + a_2 c_1) c_3 + (a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 + 4a_3 c_1 c_2 < 0$ y finalmente a

$$(c_1 a_2 + c_2 a_1) - 2\sqrt{(a_1 a_2 - a_3) c_1 c_2} < c_3 < (c_1 a_2 + c_2 a_1) + 2\sqrt{(a_1 a_2 - a_3) c_1 c_2}$$

2) Supongamos que $\Delta \geq 0$. Como en la demostración del inciso 1), se ve que $\Delta \geq 0$ si y sólo si

$$c_3 \leq (c_1 a_2 + c_2 a_1) - 2\sqrt{(a_1 a_2 - a_3) c_1 c_2} \quad \text{ó} \quad c_3 \geq (c_1 a_2 + c_2 a_1) + 2\sqrt{(a_1 a_2 - a_3) c_1 c_2} \quad (a)$$

Por otra parte las raíces de la ecuación (8.2) son $\omega^2 = \frac{(a_2 c_1 - a_1 c_2 + c_3) \pm \sqrt{\Delta}}{2c_1}$

Se requiere que la raíz más grande sea negativa, es decir $(a_2 c_1 - a_1 c_2 + c_3) + \sqrt{\Delta} < 0$, de aquí que

$$\sqrt{\Delta} < (a_1 c_2 - a_2 c_1 - c_3), \text{ de donde se obtiene } 0 < (a_1 c_2 - a_2 c_1 - c_3), \text{ es decir}$$

$$c_3 < a_1 c_2 - a_2 c_1 \quad (b)$$

Como sabemos que $d_3 > 0$, debe cumplirse que

$$a_2 c_1 < a_1 c_2 \quad (c)$$

Por otra parte regresando a la desigualdad $\sqrt{\Delta} < (a_1 c_2 - a_2 c_1 - c_3)$, tenemos

$$(a_1 c_2 - a_2 c_1 - c_3)^2 - 4c_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) < (a_1 c_2 - a_2 c_1 - c_3)^2, \text{ entonces } -4c_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) < 0 \text{ y de}$$

aquí que

$$a_2 c_3 > a_3 c_2 \quad (d)$$

Los puntos (a), (b), (c) y (d) se cumplen si escogemos d_1, d_2 y d_3 satisfaciendo el punto 2). ■

En dimensiones mayores el análisis es más complicado; sin embargo, generalizando éstas ideas nosotros obtendremos un control que consigue que el sistema a lazo cerrado no tenga órbitas periódicas de primer armónico.

8.2 Diseño de un control de alta ganancia para conseguir no existencia de soluciones periódicas

En esta sección presentaremos cuales son las condiciones que proponemos satisfaga el control de manera que:

1) El control es un control de alta ganancia de la segunda parametrización, es decir, la parte real de un eigenvalor a lazo cerrado diverge a $-\infty$ y las otras convergen a puntos fijos en el lado izquierdo del plano complejo.

2) El sistema a lazo cerrado es asintóticamente estable en el origen, es decir, el control es un control estabilizante para todos los valores del parámetro.

3) Desde un punto de vista de una aproximación de primer armónico, el sistema a lazo cerrado no tiene soluciones periódicas.

Obtendremos nuestras condiciones precisamente haciendo un análisis de primer armónico.

Para estudiar el comportamiento dinámico del sistema $\dot{x} = Ax + bS(K^T x)$ cuando la parte real de los eigenvalores a lazo cerrado tienden a $-\infty$, usamos la segunda parametrización, la cual recordamos en seguida: $K_i = -\delta c_{n+1-i}$, $1 \leq i \leq n$, donde las c_i 's son constantes positivas tal que el polinomio $P_c^{**}(s) = \sum_{i=1}^n c_i s^{n-i}$ es Hurwitz y δ es un parámetro positivo. Con tal parametrización del vector de ganancias del control K , si $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ son los eigenvalores del sistema a lazo cerrado en el origen, es decir son las raíces del polinomio $P_c(s) = s^n + \sum_{i=1}^n (a_i + \delta c_i) s^{n-i}$ entonces un eigenvalor, digamos λ_1 , tiene la propiedad de que $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1}{\delta} = -c_1$ y los otros $\{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ convergen a las raíces de $P_c^{**}(s)$, cuando $\delta \rightarrow \infty$ [ver Shaked, V. & Kouvaritakis, 1976 y Young et al, 1977]. Nuestra intención será buscar cuales son las c_i 's adecuadas de tal manera que $P_c^*(s)$ sea Hurwitz y el sistema a lazo cerrado no tenga órbitas periódicas de primer armónico.

Véamos que condiciones buscar en términos del Método de Balance Armónico. Se sabe que $1 + W(p) = P_c(p)/P_0(p)$ [Barnett & Cameron; 1985]. De (2.9) y (2.11), una órbita periódica PA con parámetros $(\bar{a}, \bar{\omega})$ corresponde a un punto de intersección de las curvas $\{W(j\omega) : \omega > 0\}$ y $\{-1/N(a) : a > 0\} = (-\infty, -1)$, donde $j = (-1)^{1/2}$. Ya que $N(a)$ es estrictamente decreciente para $a > 1$, una solución $(\bar{a}, \bar{\omega})$ corresponde unívocamente a un par $(\bar{r}, \bar{\omega})$ tal que $N(\bar{a}) = 1/(1 - \bar{r})$. Por lo tanto, soluciones $(\bar{a}, \bar{\omega})$ corresponden a soluciones $\bar{\omega} > 0, \bar{r} \leq 0$ de la ecuación $1 + W(j\omega) = r$. Es decir, la existencia de una órbita periódica de primer armónico implica que ω sea tal que $1 + W(j\omega)$ sea un número real negativo.

Consideremos el caso cuando n es par (es decir $n = 2m$). Definamos los siguientes polinomios en la variable L :

$$\begin{aligned} p(L) &= c_{2m} - c_{2(m-1)}L + \dots + (-1)^{m-1}c_2L^{m-1} \\ q(L) &= c_{2m-1} - c_{2m-3}L + \dots + (-1)^{m-1}c_1L^{m-1} \\ P(L) &= a_{2m} - a_{2(m-1)}L + \dots + (-1)^{m-1}a_2L^{m-1} + (-1)^mL^m \\ Q(L) &= a_{2m-1} - a_{2m-3}L + \dots + (-1)^{m-1}a_1L^{m-1} \end{aligned}$$

Observese que

$$\begin{aligned} P_c^{**}(i\omega) &= p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2) \\ P_c(i\omega) &= (P + \delta p)(\omega^2) + i\omega(Q + \delta q)(\omega^2) \\ P_o(i\omega) &= P(\omega^2) + i\omega Q(\omega^2) \end{aligned}$$

Análogamente, definimos los siguientes polinomios cuando $n = 2m + 1$:

$$\begin{aligned} p(L) &= c_{2m} - c_{2(m-1)}L + \dots + (-1)^{m-1}c_2L^{m-1} \\ q(L) &= c_{2m+1} - c_{2m-1}L + \dots + (-1)^m c_1L^m \\ P(L) &= c_{2m} - c_{2(m-1)}L + \dots + (-1)^{m-1}c_2L^{m-1} + (-1)^mL^m \\ Q(L) &= a_{2m+1} - a_{2m-1}L + \dots + (-1)^m a_1L^m \end{aligned}$$

Observese que

$$P_c^{**}(i\omega) = q(\omega^2) + i\omega p(\omega^2)$$

$$P_c(i\omega) = (Q + \delta q)(\omega^2) + i\omega(P + \delta p)(\omega^2)$$

$$P_o(i\omega) = Q(\omega^2) + i\omega P(\omega^2)$$

Para el caso en que $n = 2m$ obtenemos que

$$1 + W(i\omega) = \frac{P + \delta p + i\omega(Q + \delta q)}{P + i\omega Q} = \frac{[P(P + \delta p) + \omega^2 Q(Q + \delta q)] + i\omega\delta(Pq - Qp)}{P^2 + \omega^2 Q^2}$$

donde los polinomios P, Q, p y q están evaluados en la variable ω^2

Por otro lado, para el caso en que $n = 2m + 1$ obtenemos que

$$1 + W(i\omega) = \frac{Q + \delta q + i\omega(P + \delta p)}{Q + i\omega P} = \frac{[Q(Q + \delta q) + \omega^2 P(P + \delta p)] + i\omega\delta(Qp - Pq)}{Q^2 + \omega^2 P^2}$$

donde los polinomios P, Q, p y q están evaluados en la variable ω^2 .

Para que el sistema no tenga soluciones periódicas del primer armónico en ambos casos necesitamos que el polinomio $Pq - Qp$ no tenga raíces positivas. Veamos como son los coeficientes del polinomio

$Pq - Qp$. Primero definamos la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & -a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Si D^i denota el i -ésimo renglón y denotamos por $c^T = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ entonces el polinomio $(Pq - Qp)(\omega^2)$ queda definido como

$$(Pq - Qp)(\omega^2) = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n (D^i c) \omega^{2(n-i)} \quad (8.4)$$

Observese que si

$$D^i c > 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (8.5)$$

entonces el polinomio $(Pq - Qp)$ no tiene raíces positivas. De aquí planteamos el siguiente problema:

<p>Existe $c > 0$ tal que $D^i c > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ de manera que el polinomio $P_c^{**}(s) = \sum_{i=1}^n c_i s^{n-i}$ sea Hurwitz</p>	(8.6)
---	-------

Demostraremos que existe solución para un problema aún más fuerte:

<p>El sistema de desigualdades $D^i c > 0, i = 1, \dots, n$ tiene al menos una solución $c > 0$ y para toda solución c el polinomio $P_c^{**}(s) = \sum_{i=1}^n c_i s^{n-i}$ es Hurwitz</p>	(8.7)
---	-------

De esta manera obtendremos el siguiente teorema.

Teorema 8.2. Consideremos el sistema a lazo cerrado $\dot{x} = Ax + bS(u)$ con A una matriz Hurwitz.

Si tomamos el control $u(t)$ satisfaciendo $u(t) = -\delta c^T x$ donde $c > 0$ es solución de (9.5) entonces el control u satisface

- 1) El control u es un control de alta ganancia de la parametrización propuesta arriba
- 2) El control u es un control estabilizante en el origen para todo valor de δ .
- 3) Desde un punto de vista de una aproximación de primer armónico el sistema a lazo cerrado no tiene órbitas periódicas para todo valor de δ .

Demostración. El inciso 3) es un corolario de las observaciones anteriores. Los incisos 1) y 2) los trabajaremos separadamente y dedicaremos secciones completas a cada uno de ellos, de manera que el inciso 1) será un corolario de la sección 8.3 y el inciso 2) será un corolario de la sección 8.4.

8.3 Condiciones suficientes para que un polinomio con coeficientes reales sea Hurwitz

8.3.1 Introducción

Dado un polinomio real, el problema de encontrar condiciones bajo las cuales todas las raíces del polinomio tengan parte real negativa es un problema que siempre ha despertado mucho interés debido a su importancia en las aplicaciones. El criterio más ampliamente conocido es el llamado criterio de Routh-Hurwitz [ver Gantmacher, 1959; Lancaster & Tismenetsky, 1985] y lo hemos incluido en el apéndice. El problema fue planteado por Maxwell, y resuelto por Routh y Hurwitz, aunque posteriormente se desarrollaron otros criterios.

La prueba clásica del criterio de Routh-Hurwitz [Gantmacher, 1959] está basada en la noción de índices de Cauchy y el Teorema de Sturm. En el libro de Uspensky [1990] puede encontrarse una prueba diferente basada en un método debido a I. Schur. También en el libro de Zabczyk [1992] se puede encontrar una prueba basada en métodos de variable compleja. En el mismo libro de Zabczyk se encuentra un criterio debido a Routh [1877] que resulta ser una equivalencia de las condiciones de Routh-Hurwitz.

Por otro lado, en Lyapunov [1892] se demostró un teorema que produce condiciones necesarias y suficientes para que las raíces del polinomio característico de una matriz real tengan parte real negativa. Otro criterio de estabilidad basándose en el uso de funciones cuadráticas especiales fue obtenido por Lienard y Chipart [1914] con la ventaja que el número de desigualdades por verificar es cerca de la mitad de las desigualdades por verificar en el criterio de Routh-Hurwitz.

En el libro Stability Theory [1995] puede encontrarse una recopilación de trabajos acerca de polinomios Hurwitz y cuestiones relacionadas. El trabajo de Jury en este libro es una revisión histórica de los trabajos de Hermite, Routh, Lyapunov y Hurwitz, así como un estudio de la relación que hay entre estos trabajos y otros acerca de este problema.

8.3.2 Condiciones suficientes

Primero demostraremos que las desigualdades lineales implican que el polinomio $P_c^*(s) = \sum_{i=1}^n c_i s^{n-i}$ es Hurwitz. Comencemos con el siguiente lema.

Lema 8.1. Sea $F(t)$ un polinomio de grado n de coeficientes reales con todas sus raíces contenidas en C^+ y sea $f(t)$ un polinomio de grado $n - 1$ de coeficientes reales tal que $f(0) \neq 0$. Consideremos el polinomio de grado $2n - 1$, $F(t)f(t)$. Si $F(i\omega)f(i\omega)$ no corta al eje x para todo $\omega > 0$ entonces todas las raíces de $f(t)$ están contenidas en C^- .

Demostración. Sea l el número de raíces de $F(t)f(t)$ que están contenidas en C^- y sea r el número de raíces de $F(t)f(t)$ que están contenidas en C^+ . Llamamos $\theta(\omega)$ al argumento de $F(i\omega)f(i\omega)$. Entonces $\Delta_0^\infty \theta(\omega) = \theta(\infty) - \theta(0)$ es el cambio neto en el argumento de $F(i\omega)f(i\omega)$. Ya que $F(i\omega)f(i\omega)$

no corta al eje x si $\omega > 0$, entonces $F(t)f(t)$ no tiene raíces sobre el eje imaginario. Se sabe que $\Delta_0^\infty \theta(\omega) = \frac{\pi}{2}(l-r)$. [ver por ejemplo Ming-tzu Ho *et al*, 1998, p. 406; Gille *et al*, 1959, p. 174]. El hecho de que $F(i\omega)f(i\omega)$ no corte al eje x si $\omega > 0$ implica que $|\Delta_0^\infty \theta(\omega)| \leq \pi$. Por otra parte sabemos que al menos n raíces de $F(t)f(t)$ están contenidas en C^+ , entonces $r \geq n$ y $l \leq n-1$. De donde $l-r < 0$ y como $l-r$ es un número impar pues $l+r = 2n-1$, resulta que la fórmula $\Delta_0^\infty \theta(\omega) = \frac{\pi}{2}(l-r)$ implica que $\Delta_0^\infty \theta(\omega) = -\frac{\pi}{2}$. Entonces $l-r = -1$. La única posibilidad es que $r = n$ y $l = n-1$. Esto da como resultado que $f(t)$ tenga sus $n-1$ raíces contenidas en C^- . ■

Teorema 8.3. Sea el polinomio a lazo abierto $P_o(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ un polinomio Hurwitz.

Si el vector $c > 0$ es solución del sistema de desigualdades lineales

$$D^i c > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

entonces el polinomio $P_c^{**}(t) = \sum_{i=1}^n c_i t^{n-i}$ es Hurwitz.

Demostración. Haremos la demostración solo para el caso en que n es par pues el caso cuando es impar es análogo. Sea $n = 2m$ y sea $F(t) = P_o(-t)$, entonces $F(t)$ es un polinomio de grado n de coeficientes reales con todas sus raíces contenidas en C^+ . Sea también $f(t) = P_c^{**}(t) = \sum_{i=1}^n c_i t^{n-i}$, entonces $f(t)$ es un polinomio de grado $n-1$ de coeficientes reales.

Considerar el polinomio de grado $n-1$, $F(t)f(t)$. Por las observaciones hechas anteriormente

$$F(i\omega)f(i\omega) = [P(\omega^2) - i\omega Q(\omega^2)][p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2)] = [Pp + \omega^2 Qq] + i\omega(Pq - Qp).$$

Ya que $(Pq - Qp)(\omega^2) = -\sum_{i=1}^n (D^i c) \omega^{2(n-1-i)}$ y $D^i c > 0$, $i = 1, \dots, n$, tenemos que $F(i\omega)f(i\omega)$ no corta al eje x para todo $\omega > 0$. Entonces, aplicando el lema anterior se tiene que todas las raíces de $f(t) = P_c^{**}(t)$ están contenidas en C^- . ■

Corolario 8.1. Si A es una matriz Hurwitz y el vector $c > 0$ es solución del sistema de desigualdades lineales

$$D^i c > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathcal{S}((-\delta c_n, -\delta c_{n-1}, \dots, -\delta c_1)x)$$

es estable en el origen y no tiene órbitas periódicas de primer armónico cuando $\delta \rightarrow \infty$. Además, un eigenvalor diverge a $-\infty$ y los otros convergen a las raíces de $P_c^{**}(t) = \sum_{i=1}^n c_i t^{n-i}$.

Demostración. Por el teorema anterior, si el vector $c > 0$ es solución del sistema de desigualdades lineales $D^i c > 0$, $i = 1, \dots, n$ entonces el polinomio $P_c^{**}(t) = \sum_{i=1}^n c_i t^{n-i}$ es Hurwitz. Y por los resultados en [Young *et al.*, 1977] un eigenvalor diverge a $-\infty$ y los otros convergen a las raíces del polinomio $P_c^{**}(t) = \sum_{i=1}^n c_i t^{n-i}$. ■

8.4 El origen es un punto de equilibrio localmente estable: el control diseñado es un control estabilizante

Hasta ahora nosotros sólo hemos probado que con nuestro diseño de control, el origen es punto de equilibrio localmente asintóticamente estable cuando δ es suficientemente grande. Sin embargo, esto también es válido para todo valor de $\delta > 0$ (si nosotros escogemos los parámetros c_i de tal manera que satisfagan las desigualdades $D^i c > 0$, $i = 1, \dots, n$) como veremos en esta sección. Esto es importante, ya que para este tipo de parametrizaciones existen sistemas para los que el origen no es estable para todo valor de $\delta > 0$. Por ejemplo en el siguiente sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{S}((-216\delta, -5\delta, -6\delta)x)$$

estamos usando una parametrización de alta ganancia: el polinomio a lazo abierto es $P_o(t) = t^3 + 6t^2 + 11t + 6 = (t+1)(t+2)(t+3)$ ($P_o(t)$ es Hurwitz) y el polinomio a lazo cerrado es $P_c(t) = t^3 + (6+6\delta)t^2 + (11+5\delta)t + 6 + 216\delta$. Aquí el origen es localmente asintóticamente estable para valores grandes de δ , pues un eigenvalor, λ_1 , tiene la propiedad de que $\frac{\lambda_1}{\delta} \rightarrow -6$ y los otros dos convergen a las raíces del polinomio $P_c^{**}(t) = 6t^2 + 5t + 216$. Sin embargo, hay valores de δ para los cuales el sistema no es estable en el origen. Más precisamente, cuando $\delta \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ se obtiene que

$(6 + 6\delta)(11 + 5\delta) - (6 + 216\delta)$ es negativo, es decir, para estos valores de δ el polinomio $P_c(t)$ no es Hurwitz.

En nuestro diseño de control no se presentan estos problemas como se ve en el siguiente teorema.

Teorema 8.4. Si la matriz a lazo abierto A es una matriz Hurwitz y el vector $c > 0$ es solución del sistema de desigualdades lineales (8.5) entonces el origen es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable para todo valor de $\delta > 0$ del sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathcal{S}((- \delta c_n, - \delta c_{n-1}, \dots, - \delta c_1)x)$$

Demostración. Haremos la demostración para el caso en que n es par, el caso en que n es impar es análogo. Sea $n = 2m$. Sea el vector $c > 0$ solución del sistema de desigualdades lineales $D^i c > 0$, $i = 1, \dots, n$ y $\delta > 0$ un número fijo. Es suficiente demostrar que el polinomio a lazo cerrado es Hurwitz. Consideremos el polinomio $P_c(t)P_o(-t)$, sabemos que los polinomios a lazo abierto y a lazo cerrado satisfacen

$$P_c(i\omega) = (P + \delta p)(\omega^2) + i\omega(Q + \delta q)(\omega^2)$$

$$P_o(i\omega) = P(\omega^2) + i\omega Q(\omega^2)$$

De aquí que

$$P_c(i\omega)P_o(-i\omega) = [P(P + \delta p) + \omega^2 Q(Q + \delta q)] + i\omega\delta(Pq - Qp)$$

Ya que el vector $c > 0$ es solución del sistema de desigualdades lineales $D^i c > 0$, $i = 1, \dots, n$ entonces el polinomio $Pq - Qp$ no tiene raíces positivas. Así pues $(Pq - Qp)(\omega^2) \neq 0$ para todo $\omega > 0$, y por lo tanto $P_c(i\omega)P_o(-i\omega)$ no corta al eje x para todo $\omega > 0$.

Sea l_1 el número de raíces de $P_c(t)P_o(-t)$ que están contenidas en C^- y r_1 el número de raíces de $P_c(t)P_o(-t)$ que están contenidas en C^+ . Llamamos $\theta_1(\omega)$ al argumento de $P_c(i\omega)P_o(-i\omega)$ y denotemos por $\Delta_\delta^\infty \theta_1(\omega) = \theta_1(\infty) - \theta_1(0)$ al cambio neto en el argumento de $P_c(i\omega)P_o(-i\omega)$. Ya que

$P_c(i\omega)P_o(-i\omega)$ no corta al eje x si $\omega > 0$, entonces $P_c(t)P_o(-t)$ no tiene raíces sobre el eje imaginario. Entonces $\Delta_0^\infty \theta_1(\omega) = \frac{\pi}{2}(l_1 - r_1)$.

El hecho de que $P_c(i\omega)P_o(-i\omega)$ no corte al eje x si $\omega > 0$ también implica que $|\Delta_0^\infty \theta_1(\omega)| \leq \pi$. Por otra parte, $P_c(0)P_o(0) = a_{2m}(a_{2m} + \delta c_{2m})$, que es un número que se encuentra sobre el semieje real positivo. Entonces tenemos $\theta_1(0) = 0$.

Para ω grande $P_c(i\omega)P_o(-i\omega) \approx \omega^{4m} - ic_1\delta\omega^{4m-1}$, que es un número complejo que se encuentra en el cuarto cuadrante y lo que junto con el límite $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\text{Im}[P_c(i\omega)P_o(-i\omega)]}{\text{Re}[P_c(i\omega)P_o(-i\omega)]} = 0$ implican que $\theta_1(\infty) = 2s\pi$. Sin embargo, del hecho de que $P_c(i\omega)P_o(-i\omega)$ no corta al eje x si $\omega > 0$, se sigue que $\theta_1(\infty) = 0$, de lo que se obtiene que $\Delta_0^\infty \theta_1(\omega) = 0$. De aquí resulta que el polinomio $P_c(t)P_o(-t)$ tiene el mismo número de raíces ubicadas sobre C^- que las raíces ubicadas sobre C^+ . El polinomio es de grado $2n$, entonces existen n raíces localizadas sobre C^+ , que son las correspondientes a $P_o(-t)$ (ya que sabemos que el polinomio a lazo abierto $P_o(t)$ es un polinomio Hurwitz). Esto implica que las n raíces localizadas en C^- necesariamente son raíces de $P_c(t)$, que es lo que queríamos demostrar. ■

Observación El teorema 8.4 significa que dado un polinomio Hurwitz $\bar{f}(t)$ se satisface que $\bar{f}(t) + \delta\bar{h}(t)$ es Hurwitz para todo δ y para una familia de polinomios $\bar{h}(t)$ tal que $\bar{h}(t) = c_1t^{n-1} + c_2t^{n-2} + \dots + c_n$ con $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in H$.

Un resultado relacionado puede verse en [Hinrichsen & Kharitonov, 1995]. En ese trabajo se presentan condiciones necesarias y suficientes para que $p_0 + K$ sea un conjunto de polinomios Hurwitz, donde K es un cono convexo de polinomios de grado $\leq n$ y $\text{grado}(p_0) = n$.

8.5 Existencia de los controles estabilizantes: (Solución del sistema de desigualdades lineales)

Ahora considerese el conjunto $H = \{c \in R^n : c > 0 \text{ y } D^i c > 0, i = 1, \dots, n\}$. En esta sección mostraremos que el conjunto H es no vacío. En particular para $n = 3$ y $n = 4$ las soluciones las podemos encontrar explícitamente:

Para $n = 3$, el conjunto H de soluciones son los vectores c , cuyas coordenadas satisfacen

$$\frac{a_2^2}{a_1 a_2 - a_3} c_1 < c_2$$

$$\frac{a_3}{a_2} c_2 < c_3 < a_1 c_2 - a_2 c_1$$

Para $n = 4$, las soluciones se escriben explícitamente como aquellos vectores c cuyas coordenadas satisfacen:

$$\frac{a_3(a_2 a_3 - a_1 a_4)}{[a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4]} c_1 < c_3$$

$$\frac{a_4}{a_3} c_3 < c_4 < \frac{(a_1 a_4 - a_2 a_3)}{a_1^2} c_1 + \frac{(a_1 a_2 - a_3)}{a_1^2} c_3$$

$$\frac{a_2}{a_1} c_1 + \frac{1}{a_1} c_3 < c_2 < \frac{a_4}{a_3} c_1 + \frac{a_2}{a_3} c_3 - \frac{a_1}{a_3} c_4$$

Y los intervalos involucrados en cada caso existen debido a las condiciones de estabilidad.

Para dimensiones mayores, podríamos aplicar el Método de Eliminación de Kuhn-Fourier para saber si el sistema $\begin{pmatrix} D \\ I \end{pmatrix} c > 0$ tiene alguna solución [ver Kuhn, 1956 y Stoer & Witzgall, 1970] y en caso de que existan soluciones, el mismo algoritmo permite encontrar explícitamente todo el conjunto de soluciones.

El algoritmo de eliminación de Fourier generaliza el método de eliminación para sistemas de ecuaciones lineales. Denotemos $\Gamma : \begin{pmatrix} D \\ I \end{pmatrix} c > 0$ a nuestro sistema de desigualdades. El algoritmo consiste en una primera parte en obtener un nuevo sistema de desigualdades Γ' en el que ya no aparece una de las variables, digamos que c_n y de manera que:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \text{ es solución de } \Gamma' \text{ si y sólo si } \exists c_n \text{ tal que } \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} \text{ es solución de } \Gamma.$$

De ésta forma toda solución de Γ puede ser encontrada por eliminaciones sucesivas.

Aunque el método de eliminación de Kuhn Fourier es adecuado en problemas concretos, en desarrollos teóricos se vuelve demasiado complicado.

Sin embargo, ya que la matriz A es Hurwitz y la matriz D se construye a partir de las componentes de la matriz A , entonces podremos emplear otros métodos -matrices de clase monótona- para obtener todo el conjunto de soluciones de las desigualdades lineales.

Denotemos por $E = (e_{ij})$ a la matriz inversa de D . Es inmediato comprobar que el primer renglon de E es $(1, 0, 0, \dots, 0)$. Mostraremos que $e_{ij} > 0$ para todo $i = 2, 3, \dots, n$. Antes demostramos un lema.

Lema 8.2. Sea $E_j = (e_{ij})_{i=1, \dots, n}$ la j -ésima columna de E . Definimos el siguiente

$$g(t) = \sum_{i=1}^n e_{ij} t^{n-i}$$

Ya que la matriz E es no singular, existe algún $e_{ij} \neq 0$. Sea s el primer número tal que el coeficiente de t^s es diferente de cero, es decir $e_{n-i,j} = 0$ para todo $i = 1, \dots, s-1$ y $e_{n-s,j} \neq 0$. Entonces, dado el polinomio $h(t) = \sum_{i=1}^{n-s} e_{ij} t^{n-s-i}$ se cumple que $P_o(-t)h(t)$ no tiene raíces sobre el eje imaginario.

Demostración. Se satisface que $P_o(-t)g(t) = t^s P_o(-t)h(t)$. Dividamos en dos casos:

s es par: Se tiene que $P_o(-i\omega)g(i\omega) = (-1)^{\frac{s}{2}} \omega^s P_o(-i\omega)h(i\omega)$. Tomando las partes imaginarias obtenemos $(-1)^{n-1} i\omega \sum_{i=1}^n D^i E_j \omega^{2(n-i)} = (-1)^{\frac{s}{2}} \omega^s \text{Im}[P_o(-i\omega)h(i\omega)]$ [ver (8.4)]

Pero $\text{Im}[P_o(-i\omega)h(i\omega)] = \omega \times [\text{un plinomio en la variable } \omega^2]$, de aquí que $D^i E_j = 0$ para todo $i > n - \frac{s}{2}$. También sabemos que $D^i E_j = 0$ para $i \neq j$ y $D^j E_j = 1$, por lo que $1 \leq j \leq n - \frac{s}{2}$ y por lo tanto $\text{Im}[P_o(-i\omega)h(i\omega)] = (-1)^{n-\frac{s}{2}-1} \omega \sum_{i=1}^{n-\frac{s}{2}} D^i E_j \omega^{2(n-i)-s} = (-1)^{n-\frac{s}{2}-1} \omega \omega^{2(n-j)-s}$. De aquí que si ω es tal que $P_o(-i\omega)h(i\omega) = 0$ entonces $\omega = 0$, pero $P_o(0)h(0) = a_n e_{n-s,j} \neq 0$. Por lo tanto $[P_o(-i\omega)h(i\omega)]$ no tiene raíces sobre el eje imaginario.

s es impar: Se tiene que $P_o(-i\omega)g(i\omega) = (-1)^{\frac{s-1}{2}} i\omega^s P_o(-i\omega)h(i\omega)$. Tomando las partes imaginarias obtenemos $(-1)^{n-1} i\omega \sum_{i=1}^n D^i E_j \omega^{2(n-i)} = (-1)^{\frac{s-1}{2}} i\omega^s \text{Re}[P_o(-i\omega)h(i\omega)]$ [ver (8.4)]

Pero $\text{Re}[P_o(-i\omega)h(i\omega)]$ es un polinomio en la variable ω^2 , de aquí que $D^i E_j = 0$ para todo $i > n - \frac{s-1}{2}$. También sabemos que $D^i E_j = 0$ para $i \neq j$ y $D^j E_j = 1$, por lo que $1 \leq j \leq n - \frac{s-1}{2}$ y por lo tanto $\text{Re}[P_o(-i\omega)h(i\omega)] = (-1)^{n-\frac{s+1}{2}} \sum_{i=1}^{n-\frac{s-1}{2}} D^i E_j \omega^{2(n-i)-s+1} = (-1)^{n-[\frac{s+1}{2}]} \omega^{2(n-j)-s+1}$. Por otra parte sabemos que $P_o(0)h(0) = a_n e_{n-s,j} \neq 0$, por lo tanto $2(n-j) - s + 1 = 0$, es decir $s = 2(n-j) + 1$ y obtenemos que $\text{Re}[P_o(-i\omega)h(i\omega)] = (-1)^{n-\frac{s+1}{2}} = (-1)^{n-[n-j+1]} = (-1)^{j-1} \neq 0$. Por lo tanto $P_o(-i\omega)h(i\omega) \neq 0$ para todo ω , es decir $P_o(-t)h(t)$ no tiene raíces sobre el eje imaginario. ■

Lema 8.3. Sea $E = (e_{ij})$ la matriz inversa de D . Entonces $e_{ij} > 0$ para todos $i = 2, 3, \dots, n$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Demostración. Sea E_j la j -ésima columna de E y D^i el i -ésimo renglon de D . Ya que E es la inversa de D , entonces se satisface que $(D^1 E_j, D^2 E_j, \dots, D^{j-1} E_j, D^j E_j, D^{j+1} E_j, \dots, D^n E_j) = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

Por otra parte, sean $g(t)$, s y $h(t)$ como en el lema 8.2. Considerese el producto de polinomios $P_o(-t)h(t)$. Sea l_2 el número de raíces de $P_o(-t)h(t)$ que están contenidas en C^- y sea r_1 el número de raíces de $P_o(-t)h(t)$ que están contenidas en C^+ . Si evaluamos $P_o(-t)h(t)$ en $i\omega$ podemos expresar el numero complejo $P_o(-i\omega)h(i\omega)$ como $P_o(-i\omega)h(i\omega) = \alpha(\omega^2) + i\omega\beta(\omega^2)$. Dividimos en casos: s es par: Como en lema 8.2, $\text{Im}[P_o(-i\omega)h(i\omega)] = (-1)^{n-\frac{s}{2}-1}\omega\omega^{2(n-j)-s}$, por lo tanto $P_o(-i\omega)h(i\omega)$ no corta al eje x para todo $\omega > 0$.

Llamemos $\theta_2(\omega)$ al argumento de $P_o(-i\omega)h(i\omega)$. Y denotemos por $\Delta_0^\infty \theta_2(\omega) = \theta_2(\infty) - \theta_2(0)$ al cambio neto en el argumento de $P_o(-i\omega)h(i\omega)$. Por lema 8.2 $P_o(-t)h(t)$ no tiene raíces sobre el eje imaginario. Entonces $\Delta_0^\infty \theta_2(\omega) = \frac{\pi}{2}(l_2 - r_2)$.

Ya que $P_o(-i\omega)h(i\omega)$ no corta al eje x si $\omega > 0$ entonces $|\Delta_0^\infty \theta_2(\omega)| \leq \pi$. Por otra parte, $n \leq$ grado de $P_o(-t)h(t) \leq 2n - 1$ y ya que $P_o(-t)$ tiene n raíces en C^+ , entonces $r_2 \geq n$ y por lo tanto $l_2 - r_2 \leq -1$. Esto último implica que $\Delta_0^\infty \theta_2(\omega) \leq -\frac{\pi}{2}$, y esto junto con el hecho de que $|\Delta_0^\infty \theta_2(\omega)| \leq \pi$ da como resultado que $\Delta_0^\infty \theta_2(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ ó $-\pi$. De aquí que $l_2 - r_2 = -1$ o $l_2 - r_2 = -2$, es decir $l_2 = r_2 - 1$ o $l_2 = r_2 - 2$. Como todas las raíces con parte real negativa de $P_o(-t)h(t)$ son necesariamente raíces de $h(t)$ y $h(t)$ es un polinomio de grado menor o igual que $n - 1$, entonces $n > l_2$, pero también $r_2 \geq n$, de donde $n > l_2 \geq n - 1$ o $n > l_2 \geq n - 2$, por lo tanto $l_2 = n - 1$ o $l_2 = n - 2$, y de aquí que el polinomio $h(t)$ tiene grado $n - 1$ o $n - 2$ y todas sus raíces tienen parte real negativa, por lo tanto todos sus coeficientes son diferentes de cero y tienen el mismo signo. También se obtiene que el polinomio $h(t)$ es de grado $n - 1$ (que corresponde al estudio de la columna E_1) o es de grado $n - 2$ (que corresponde al estudio de las columnas E_j con $j \geq 2$). Esto probaría que los elementos

de la primera columna son positivos pues $e_{11} = 1$ y probaría que $e_{ij} \neq 0$ si $j \geq 2$ además de que $\text{signo}(e_{i_1j}) = \text{signo}(e_{i_2j}) \forall 2 \leq i_1, i_2 \leq n \forall j = 2, \dots, n$. También se ve inmediatamente que $s = 0$.

Mostremos que $e_{ij} > 0 \forall j = 2, \dots, n$.

Tenemos que $P_o(-i\omega)h(i\omega) = \text{Re}[P_o(-i\omega)h(i\omega) + (-1)^{n-1}i\omega\omega^{2(n-j)}]$

Supongamos que $n = 2m$ [el caso en que n es impar es análogo]. Entonces se tiene que $\text{Im}[P_o(-i\omega)h(i\omega)] = (-1)^{2m-1}\omega\omega^{2(n-j)+1}$, por lo tanto $P_o(-i\omega)h(i\omega)$ siempre se encuentra en el tercero o cuarto cuadrante.

Por otra parte, $P_o(0)h(0) = a_{2m}e_{2m,j}$.

Si $e_{2m,j} < 0$ entonces $\theta_2(0) = \pi$.

Ahora estudiemos $\theta_2(\infty)$. Cuando $\omega \rightarrow \infty$, $P_o(-i\omega)h(i\omega) \approx -e_{2,j}\omega^{2(2m-1)} - i\omega^{2(n-j)+1}$. Ya que $e_{2,j}$ es del mismo signo que $e_{2m,j}$ entonces $P_o(-i\omega)h(i\omega)$ siempre se encuentra en el cuarto cuadrante cuando $\omega \rightarrow \infty$. Como $j \geq 2$ se satisface que $2(2m-1) > 2(n-j)+1$ y así $\frac{\text{Im}[P_o(-i\omega)h(i\omega)]}{\text{Re}[P_o(-i\omega)h(i\omega)]} \rightarrow 0$ cuando $\omega \rightarrow \infty$, de aquí que $\theta_2(\infty) = 2\pi$, por lo que $\Delta_0^\infty\theta_2(\omega) = 2\pi - \pi = \pi$, lo cual es una contradicción pues $\Delta_0^\infty\theta_2(\omega) = \frac{\pi}{2}(l_2 - r_2) = \frac{\pi}{2}(n - 2 - n) = -\pi$. Por lo tanto $e_{2m,j} > 0$ y $e_{ij} > 0 \forall i = 2, 3, \dots, n$.

s es impar: Véamos que este caso es imposible. Similarmente como en Lema 8.2, $\text{Re}[P_o(-i\omega)h(i\omega)] = (-1)^{j-1} \neq 0$, entonces $P_o(-i\omega)h(i\omega)$ no corta al eje imaginario y siguiendo argumentos análogos al caso anterior se llega a que $e_{ij} \neq 0 \forall j = 1, 2, 3, \dots, n \forall i = 2, 3, \dots, n$, lo cual probaría que $s = 0$ contradiciendo el hecho que s es impar. Por lo tanto el caso s impar es imposible. ■

Antes de indicar cual es el conjunto de soluciones de las desigualdades lineales necesitamos la siguiente definición.

Definición 8.1. Una matriz real R de $m \times s$ es una matriz de clase monótona si $Rz \geq 0$ implica $z \geq 0$, donde $z \geq 0$ significa que todos sus elementos son no negativos [ver Mangasarian, O. L., 1968].

Para matrices cuadradas es conocido que una matriz cuadrada R es de clase monótona si y sólo si existe R^{-1} y $R^{-1} \geq 0$, donde $R^{-1} \geq 0$ significa que todos sus elementos son no negativos [ver Collatz, 1966; Cap. 3, §23]. De aquí obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 8.2. La matriz D es de clase monótona.

Demostración. Se sigue del Lema 8.3.

Para mostrar cual es el conjunto solución de las desigualdades lineales consideremos el siguiente conjunto $\mathbb{R}_+^n = \{z \in \mathbb{R}^n / z > 0\}$.

Teorema 8.5. Se satisface que $H = D^{-1}\mathbb{R}_+^n$.

Demostración. \subseteq] Sea $v \in H$, entonces $Dv > 0$ y $v > 0$, por lo tanto ya que $v = D^{-1}Dv$ con $Dv > 0$, tenemos que $v \in D^{-1}\mathbb{R}_+^n$.

\supseteq] Sea $v \in D^{-1}\mathbb{R}_+^n$, entonces $v = D^{-1}u$ con $u > 0$, de aquí que $Dv = u > 0$, y como la matriz D es de clase monótona, se obtiene que $v > 0$, por lo tanto $v \in H$. ■

8.6 Un ejemplo numérico

Considerar el siguiente sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{S}((-6.5\delta, -11\delta, -5\delta)x)$$

En este caso

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -11 & 6 & -1 \\ 0 & -6 & 11 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 6.5 \end{pmatrix} \text{ y se satisface que } Dc = \begin{pmatrix} 5 \\ 4.5 \\ 5.5 \end{pmatrix} > 0.$$

Haciendo simulaciones para los valores $\delta = 10, 100, 1000$ se encontró que el sistema no tiene soluciones periódicas, aún más se ve que las trayectorias convergen al origen aunque la condición inicial sea muy grande, sugiriendo una posible estabilidad global.

8.7 Conclusiones

El Método de la Función Descriptora resulto valioso no sólo para el análisis de sistemas sino incluso para el diseño de controles como se mostró en este capítulo. Apoyados en ciertas condiciones suficientes para que un polinomio con coeficientes reales sea Hurwitz pudimos diseñar un control estabilizante de alta ganancia. Mas precisamente, el control obtenido es un control que se diseña en terminos de parámetros

que satisfacen ciertas desigualdades lineales y que depende del parametro δ . Se satisface que para todo valor de $\delta > 0$ el origen resulta ser un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable, lo cual es bueno pues esto significa que no debemos imponer condiciones adicionales además de las desigualdades. En otras palabras, el control es un control estabilizante para todo valor de $\delta > 0$. Cuando δ es grande un eigenvalor a lazo cerrado tiene parte real negativa muy grande, es decir, el control es un control de alta ganancia, de donde podría ser utilizado para rechazar perturbaciones. Adicionalmente, desde un punto de vista de primer armónico el sistema controlado no tiene órbitas periódicas.

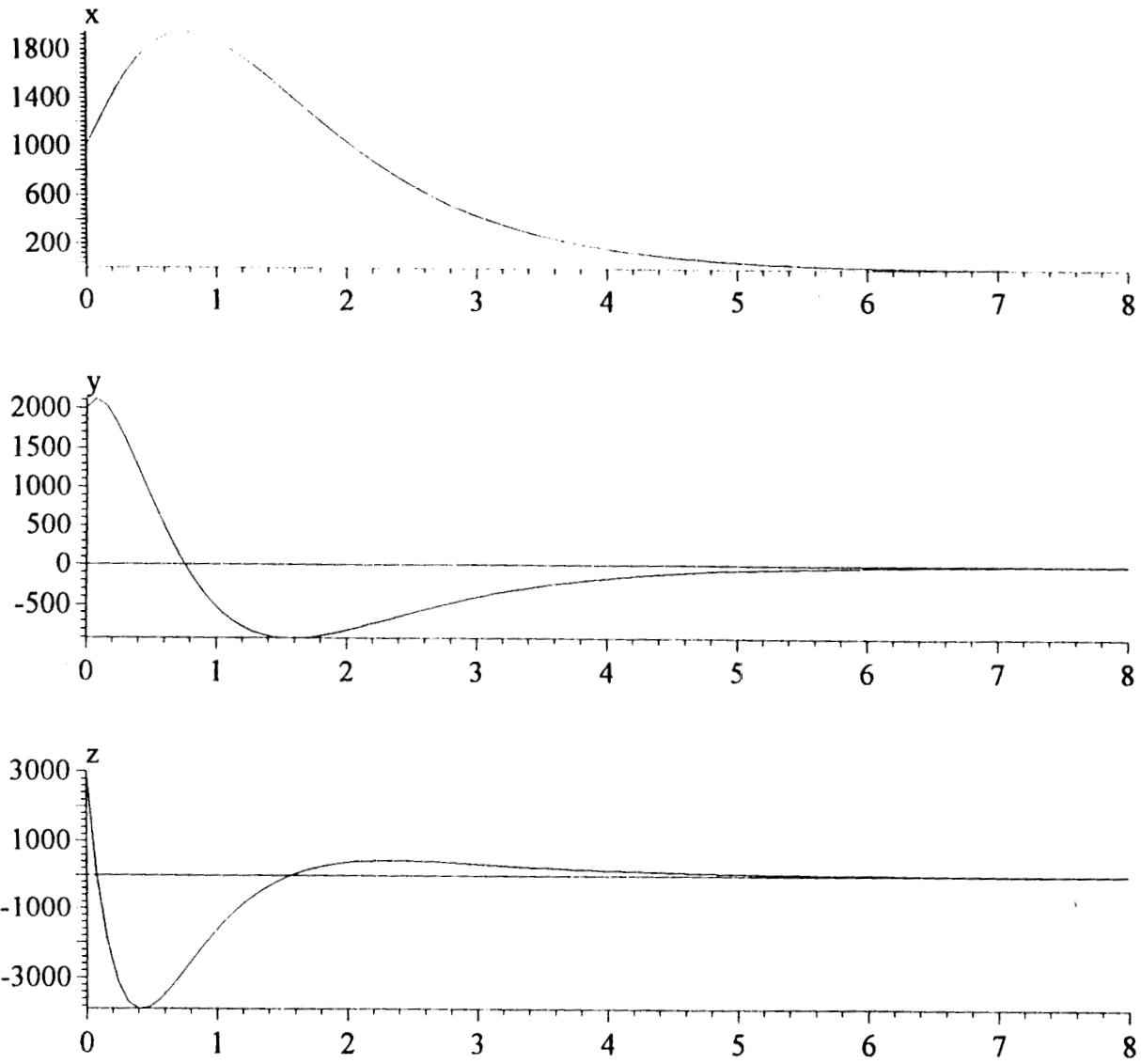


Figura 8.1. Solución para $\delta = 1000$ y condición inicial $x_0 = 1000$, $y_0 = 2000$, $z_0 = 3000$.

Apéndice de la Parte 2

B.1. Las condiciones de Routh-Hurwitz

Teorema (Condiciones de Routh-Hurwitz). Dado un polinomio de coeficientes reales $f(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n$ definimos la matriz de Hurwitz asociada a este polinomio

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{2n-1} & b_{2n-2} & b_{2n-3} & b_{2n-4} & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

donde $b_k = 0$ si $k > n$.

Para que tal polinomio tenga todas sus raíces con parte real negativa, es necesario y suficiente que se satisfaga que $b_0 \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, b_0 \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \dots, \begin{cases} b_0 \Delta_n > 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \Delta_n > 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

donde los Δ_i 's son los menores principales de la matriz de Hurwitz.

En caso de que $b_0 = 1$ la condición simplemente dice que los menores principales deben ser positivos, es decir, $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

B.2. El Teorema de Hermite-Biehler

Los resultados en éste apéndice fueron tomados de [Bhattacharayya *et al.*, 1995]. Consideremos los siguientes polinomios reales:

a) Para n par ($n = 2m, m \geq 1$):

$$\begin{aligned} P(L) &= c_{2m} + c_{2m-1}L + \dots + c_1 L^{2m-1} + L^{2m} \\ Q(L) &= c_{2m-1} - c_{2m-3}L + \dots + (-1)^{m-1} c_1 L^{m-1} \\ S(L) &= c_{2m} - c_{2(m-1)}L + \dots + (-1)^{m-1} c_2 L^{m-1} + (-1)^m L^m \end{aligned}$$

b) Para n impar ($n = 2m + 1, m \geq 0$):

$$\begin{aligned} P(L) &= c_{2m+1} + c_{2m}L + \dots + c_1 L^{2m} + L^{2m+1} \\ Q(L) &= c_{2m+1} - c_{2m-1}L + \dots + (-1)^m c_1 L^m \\ S(L) &= c_{2m} - c_{2(m-1)}L + \dots + (-1)^{m-1} c_2 L^{m-1} + (-1)^m L^m \end{aligned}$$

Note que $P(jL) = S(L^2) + jLQ(L^2)$ cuando n es par, y $P_c^*(jL) = Q(L^2) + jLS(L^2)$ cuando n es impar

Definición B1. (*Propiedad de Alternancia*). Un polinomio real $P(L)$ con grado par satisface la propiedad de alternancia si

a) c_{2m-1} y c_{2m} tienen el mismo signo y c_1 es positivo

b) Todas las raíces de $S(L)$ y $Q(L)$ son reales, positivas y distintas y las m raíces positivas de $S(L)$ junto con las $m - 1$ raíces positivas de $Q(L)$ están alternadas en la siguiente forma:

$$0 < L_{S,1} < L_{Q,1} < L_{S,2} < \dots < L_{S,m-1} < L_{Q,m-1} < L_{S,m}$$

donde las L_S 's y las L_Q 's son las raíces de $S(L)$ y $Q(L)$, respectivamente. Similarmente, un polinomio real $P(L)$ con grado impar satisface la propiedad de alternancia si

a) c_{2m+1} y c_{2m} tienen el mismo signo y c_1 es positivo

b) Todas las raíces de $S(L)$ y $Q(L)$ son reales, positivas y distintas y las m raíces positivas de $S(L)$ junto con las $m - 1$ raíces positivas de $Q(L)$ están alternadas en la siguiente forma:

$$0 < L_{S,1} < L_{Q,1} < L_{S,2} < \dots < L_{S,m-1} < L_{Q,m-1} < L_{S,m} < L_{Q,m}$$

donde las L_S 's y las L_Q 's son las raíces de $S(L)$ y $Q(L)$, respectivamente.

Teorema . (*Hermite-Biehler*) Un polinomio real $P(L)$ es Hurwitz si y sólo si satisface la Propiedad de Alternancia.

Capítulo 9

Conclusiones finales

La primera parte del trabajo la hemos dedicado al estudio de la RA y las posibles bifurcaciones. En el capítulo 3 nosotros estudiamos sistemas más generales de los que usualmente se estudian en Teoría de Control. Más precisamente, en este capítulo hemos trabajado con sistemas para los cuales no son necesariamente controlables y para los cuales el origen no es necesariamente estable y dimos una descripción completa de los diferentes comportamientos dinámicos en términos de una aproximación de primer armónico, mostrando que esta información (que es aproximada) coincide con la obtenida con métodos cualitativos. Siguiendo con la parte 1, en el capítulo 4 (dedicado a sistemas tridimensionales) presentamos algunos resultados sobre la existencia de bifurcaciones de órbitas periódicas, en las cuales una órbita periódica simétrica se rompe para dar origen a al menos dos órbitas periódicas no simétricas en un sistema de control tri-dimensional sujeto a un control de alta ganancia con saturación. Estos resultados deben ser vistos solamente como una evidencia de la existencia de auténticas órbitas periódicas no simétricas y como una motivación para continuar con el estudio de éstos sistemas. Por otra parte, es posible que existan bifurcaciones y comportamientos dinámicos no capturados por el método de balance del primer armónico, ya que el método esencialmente se enfoca a detectar órbitas periódicas.

De especial interés son los sistemas sujetos a un control de retroalimentación de estado de alta ganancia con saturación, a los cuales hemos dedicado la segunda parte del trabajo. En el capítulo 6 continuamos con el estudio del comportamiento dinámico de sistemas lineales bidimensionales bajo retroalimentación de estado con saturación, pero agregando la condición de controlabilidad y el requerimiento de que el control sea estabilizante, de hecho hemos usado un control de alta ganancia. Aplicamos el principio de balance del primer armónico para buscar órbitas periódicas aproximadas, y de ésta manera, hemos ganado en el conocimiento acerca del comportamiento cuantitativo de la región de atracción del origen. En trabajos en dimensión 2 donde se estudiaron estos mismos sistemas lineales sujetos a una retroalimentación de estado con saturación con teoría cualitativa de sistemas dinámicos, el comportamiento de

las regiones de atracción con respecto a las ganancias del control no fue obvia. Ahora hemos encontrado que si el sistema a lazo abierto es inestable, la retroalimentación de alta ganancia tiene un efecto adverso sobre el tamaño de la región de atracción del origen. En el capítulo 7 (sobre sistemas n -dimensionales) hemos generalizado éste resultado apoyándonos en el criterio de estabilidad conocido como Teorema de Hermite-Biehler y hemos encontrado que si $n \geq 3$ un cierto conjunto de órbitas periódicas **PA** se contraen al origen cuando el parámetro de alta ganancia es incrementado. Ya que tales órbitas periódicas **PA** son radialmente inestables y desde un punto de vista de una aproximación de primer armónico están contenidas en la frontera de la **RA** esto puede ser interpretado como una evidencia de que la región de atracción del origen se anula haciendo que el origen se convierta en un punto de equilibrio inestable. Más precisamente, aunque algunas trayectorias del sistema a lazo cerrado $\dot{x} = Ax + bS(K^T x)$ convergen al origen, debido a que la **RA** se colapsa al origen las trayectorias cuya condición inicial no está contenida en la **RA** podrían diverger o ser atraídas hacia un atractor distinto del origen o podrían presentar comportamientos más complicados. Es importante hacer notar que el comportamiento arriba descrito es independiente de la estabilidad del sistema a lazo abierto $\dot{x} = Ax$, siempre que $n \geq 3$. Esto es, desde el punto de vista de un Análisis del Primer Armónico podemos concluir que para $n \geq 3$, un control de retroalimentación de alta ganancia conduce a la desestabilización del sistema a lazo cerrado con entradas acotadas.

Por lo tanto, como en el caso de dos dimensiones la retroalimentación de alta ganancia tiene un efecto adverso sobre el tamaño de la región de atracción, pero en este caso éste efecto adverso se tiene independientemente de la estabilidad de la matriz a lazo abierto. Así que el problema de escoger ganancias de control suficientemente grandes para conseguir un buen margen de robustez, pero no tan grande como para inducir muy pequeñas regiones de atracción, podrá ser analizado a la luz de los resultados preliminares reportados aquí.

En el capítulo 8, hemos obtenido un teorema que da condiciones suficientes para asegurar que un polinomio es Hurwitz. Si los coeficientes de tal polinomio satisfacen cierto sistema de desigualdades lineales entonces todas las raíces del polinomio tienen parte real negativa. Hemos aplicado éste teorema para diseñar un control estabilizante de alta ganancia, de manera que la parte real de un eigenvalor a lazo

cerrado diverge a $-\infty$ y el resto de los eigenvalores convergen a puntos fijos del semiplano izquierdo del plano complejo. Adicionalmente, el sistema a lazo cerrado no presenta soluciones periódicas de primer armónico. Con esta información hemos presentado un ejemplo para el cual las simulaciones muestran que no existen órbitas periódicas.

Como se ha mencionado, cuando obtenemos una órbita periódica de primer armónico esta no necesariamente corresponde a una auténtica órbita periódica. Si las armónicas superiores generadas por el elemento no lineal se atenúan suficientemente por los elementos lineales, de manera que en la salida solamente es significativa la componente de la armónica fundamental, entonces el Método de la Función Descriptora estará prediciendo verdaderas órbitas periódicas.

El Método de la Función Descriptora debe combinarse con otro tipo de análisis: la información obtenida en un análisis de primer armónico debe someterse a un análisis para decidir cual de esta información es factible y cual no, aquí uno podría apoyarse en resultados cualitativos previos del problema o hacer simulaciones numéricas y comparar los resultados. En resumen, el Método de la Función Descriptora debe verse como una herramienta útil para obtener información acerca de las posibles soluciones periódicas de un sistema de ecuaciones diferenciales con control, que en términos generales es un problema difícil. Este trabajo debe ser visto como una primera etapa para estudiar sistemas de control lineales bajo cotas de entrada y retroalimentación de alta ganancia.

Entre los problemas que pueden plantearse como una continuación de esta tesis está el de utilizar métodos cualitativos para demostrar las evidencias que se han encontrado con el método de balance armónico, en particular, cuando se utiliza un control de alta ganancia de la primera parametrización se plantea el problema:

Margen de Robustez contra tamaño de la región de atracción.

También pueden hacerse estudios de sistemas de control con entradas múltiples. Otro problema es el de seguir estudiando los resultados del capítulo 8, donde obtuvimos que cierto polinomio es Hurwitz cuando la matriz a lazo abierto A es Hurwitz, pero que podría hacerse quitando esta restricción y en tal caso proponer un método de diseño de controles estabilizantes.

Referencias

- [1] Aguirre, B.; Alvarez-Ramírez, J.; Fernández, G. and Suárez, R. [1997] First harmonic analysis of linear control systems with high-gain saturated feedback. *Int. J. of Bifur. & Chaos*, Vol. 7, No. 11, 2501-2510.
- [2] Aguirre, B.; Alvarez-Ramírez, J. and Suárez, R. [1998] Symmetry breaking of periodic orbits in control systems: An harmonic balance approach. Por aparecer en *Int. J. of Bifur. & Chaos*.
- [3] Aizerman, M. A. [1963] *Theory of Automatic Control*. Traducido al inglés por Ruth Feinstein. Addison-Wesley. Massachusetts, U.S.A. La versión original en ruso bajo el título *Lektsiyi po teorii avtomaticheskgo regulirovaniya*. Publicado en 1958 por Fizmatgiz, Moscow.
- [4] Alvarez, J.; Suárez, R. & Alvarez, J. [1993] Planar linear systems single saturated feedback. *Syst. Contr. Lett.* **20**, 319-326.
- [5] Andronov, A. A.; Khaikin, S. E.; Vitt, A. A. [1937] *Teoriya Kolyebanii*. Ob'ed. nauch. tekhn. inst. Traducción al inglés editada por S. Lefschetz con el título "Theory of Oscillations". Princeton Press, Princeton N. J., 1949.
- [6] Atherton, D. P. [1975] *Nonlinear Control Engineering*. Van Nostrand Reinhold, London.
- [7] Barnett, S. & Cameron, R.G. [1985] *Introduction to Mathematical Control Theory* (Clarendon Press, Oxford).
- [8] Bhattacharayya, S.P.; Chapellat, H.; & Keel, L.H. [1995] *Robust Control. The Parametric Approach* (Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ).
- [9] Chua, L. O.; Komuro, M. and Matsumoto, T. [1986] The double scroll family. *IEEE Trans. Circ. and Syst.*, **33**, 1072-1118.
- [10] Chua, L. O. & Tichonicky, I. [1991] One dimensional map for the double scroll family. *IEEE Trans. Circuit Syst. CAS-38*, 233-243.
- [11] Collatz, L. [1966] *Functional Analysis and Numerical Mathematics*. Academic Press, New York.
- [12] Davison, E. J. & Wang, S. H. [1974] Properties and calculations of transmission zeroes of multi-variable systems. *Automatica* **10**, No. 6, 643-658.
- [13] Dutilh, J. [1950] Théorie des servomecanismes a relais. *Onde Electr.*, 438-445.
- [14] Fuller, A.T. [1969] In the large stability of relay and saturating control systems with linear controllers, *Int. J. of Control*, **10**, 165-187.
- [15] Gantmacher, F. R. [1959] *The Theory of Matrices*. Chelsea Publ. Co., New York.
- [16] Genesio, R. & Tesi, A. [1992] A harmonic balance approach for chaos prediction: Chua's circuit, *Int. J. of Bif. Chaos*, **2**, 61-79.
- [17] Gille, J.C.; Pelegrin, M.J. & Decaulne, P. [1959] *Feedback Control Systems: Analysis, Syntesis and Design*. New York: McGraw-Hill.
- [18] Goldfarb, L. C. [1947] On some nonlinear phenomena in regulatory systems. *Autom. Telemekh.* **8**, 349-383.
- [19] Hinrichsen, D. & Kharitonov, V. L. [1995] Stability of polynomials with conic uncertainty. *Math. Control Signal Systems* **8**, 97-117.
- [20] Jeltsch, R. & Mansour, M. (editores) [1995] *Stability Theory. Hurwitz Centenary Conference. Cen-*

tro Stefano Francini, Ascona. Birkhäuser Basel.

- [21] Johnson, E. C. [1952] Sinusoidal analysis of feedback control systems containing nonlinear elements. *Trans. Am. Inst. Electr. Eng. Part 2* **71**, 169-181.
- [22] Kahlert, C. and Rossler, O. E. [1985] Analytical properties of Poincare half maps in a class of piecewise-linear dynamical systems. *Z. Naturforsch.* **40a**, 1011-1025.
- [23] Kochenburger, R. J. [1950] A frequency response method for analysing and synthesizing contactor servomechanisms. *Trans. Am. Inst. Electr. Eng. Part 2* **69**, 270-283.
- [24] Kokotovic, P.V. & Marino, R. [1986] On vanishing stability regions in nonlinear systems with high-gain feedback, *IEEE Trans. Autom. Contr.* **AC-31**, 967-970.
- [25] Kouvaritakis, B. and McFarlane, A. G. J. [1976] Geometric approach to analysis and synthesis of systems zeroes (Part 1): square systems. *Int. J. Contr.* **23**, No. 2, 149-166.
- [26] Krenz and, G.S. & Miller, R.K. [1986] Qualitative analysis oscillations in nonlinear control systems. A describing function approach, *IEEE Trans. Circ. and Syst.* **CAS-33**, 562-566.
- [27] Kuhn, H.W. [1956] Solvability and consistency for linear equations and inequalities. *Amer. Math. Monthly* **63**, 217-232.
- [28] Lancaster, P. and Tismenetsky [1985] *The Theory of Matrices with applications, second edition*, Academic Press, Orlando.
- [29] Lefschetz, S. [1965] *Stability of Nonlinear Control Systems*. New York: Academic Press.
- [30] Lienard and Chipart [1914]. Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique, *J. Math. Pures Appl. (6)*, Vol. 10, 291-346.
- [31] Llibre, J. & Ponce, E. [1996] Global first harmonic bifurcation diagram for nonlinear control systems, *Dynamics & Stability of Systems* **11**, 49-88.
- [32] Llibre, J. & Sotomayor, J. Phase portrait of planar control systems,
- [33] Lyapunov, A. M. [1892] *Le problème général de la stabilité du mouvement*. (Annals of Mathematical Studies, No. 17). Princeton University Press, 1949.
- [34] Mangasarian, O. L. [1968] Characterizations of real matrices of monotone kind. *SIAM Review* **Vol. 10**, No. 4, 439-441.
- [35] Maxwell, J. C. [1868] On governors. *Proc. of the Royal Society*
- [36] Mees, A.I. [1981] *Dynamics of Feedback Systems* (J. Wiley and Sons, New York).
- [37] Mees, A. I. & Bergen, A. R. [1975] Describing functions revisited. *IEEE Trans. on Autom. Contr.* **Vol. AC-20**, No. 4, 473-478.
- [38] Ming-tzu Ho, Aniruddha Datta, and S.P. Bhattacharyya [1998]. An elementary derivation of the Routh-Hurwitz criterion. *IEEE Transactions on Automatic Control*. vol. 43, No. 3. 405-409.
- [39] Moiola, J.L. & Chen, G. [1993] Frequency domain approach to computation and analysis of bifurcations and limit cycles: A tutorial, *Int. J. of Bifur. & Chaos* **3(4)**, 843-867.
- [40] Moiola, J. L. & Chen, G. [1993] Computations of limit cycles via high-order harmonic balance approximation, *IEEE Trans. Autom. Contr.* **38**, 782-790.
- [41] Moiola, J. L. & Chen, G. [1996] *Hopf Bifurcations Analysis: A Frequency Domain Approach* (World Scientific Pub. Co. , Singapore).
- [42] Moiola, J.L.; Desages, A. & Romagnoli, J. [1991] Degenerate Hopf bifurcations via feedback

- system theory: higher-order harmonic balance, *Chem. Engng. Sci.* **46**, 1475-1490.
- [43] Morari, M. & Zafiriou, E. [1989] *Robust Process Control* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.)
 - [44] Narendra, K. S. and Taylor, J. H. [1973] *Frequency Domain Criteria for Absolute Stability*. New York: Academic Press.
 - [45] Oppelt, W. [1948] Locus curve method for regulators with friction. *VDI Z* **90**, 179-183.
 - [46] Rosenbrock, H. H. [1970] *State Space and Multivariable Theory*
 - [47] Routh, E. J. [1877]. *Treatise on the Stability of a Given State of Motion*. McMillan and Co., London.
 - [48] Shaked, V. & Konvaritakis, B. [1976] Asymptotic behavior of root loci of linear multivariable systems. *Int. J. Contr.* **23**, No. 3, 297-340.
 - [49] Stoer, J. & Witzgall Ch. [1970] *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I* (Springer-Verlag, N. Y)
 - [50] Suarez, R.; Alvarez-Ramirez, J. & Aguirre, B. [1996] First harmonic analysis of planar linear systems with single saturated feedback, *Int. J. Bifur. & Chaos.*, **Vol. 6**, No. 12B, 2605-2610.
 - [51] Suárez, R.; Alvarez, J. and Alvarez, J. [1995] Regions of attraction of closed loop linear systems with saturated linear feedback. *J. Math. Syst. Est. Contr.* **Vol. 5**, No. 4, 491-494. First version published in [1991] *Proc. Conf. Dec. Contr.* Brighton, England, **1**, 223-228.
 - [52] Suárez, R.; Alvarez, J. and Solis, J. [1997] Linear systems with bounded inputs: Global stabilization with eigenvalue placement. *Int. J. Robust Nonl. Contr.* **7**, 835-845.
 - [53] Sussman, H. J. and Kokotovic, P. V. (1991). The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Autom. Control.* **Vol. 36**, No. 4.
 - [54] Sussman, H. J. and Yang, Y (1991). On the stability of multiple integrators by means of bounded feedback controls. *Proceedings of the 30th. Conference on Decision and Control*. Brighton, England. December 1991.
 - [55] Teruel [1997]. *Clasificación de los Retratos de Fases de los Sistemas Lineales a Trozos en el Plano*. Tesis doctoral.
 - [56] Tustin, A. [1947] The effects of backlash and of speed dependent friction on the stability of closed loop control systems. *J. Inst. Electr. Eng. Part 2* **94**, 143-151.
 - [57] Uspensky, J. V. [1990] *Teoría de Ecuaciones*. Limusa. México, D. F.
 - [58] Vidyasagar, M. [1993] *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, New Jersey.
 - [59] Wiggins, S. [1990] *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos* (Springer-Verlag, New York).
 - [60] Wonham, W.M. (1985). *Linear multivariable control. A Geometric Approach*. Springer-Verlag, New York.
 - [61] Young, K. D.; Kokotovic, P. V. and Utkin, V. I. [1977]. A singular perturbation analysis of high gain feedback systems. *IEEE Trans.*, **AC-22**. 931-939.
 - [62] Zabczyk, J. [1992]. *Mathematical Control Theory: An Introduction*. Birkhäuser, Boston.