UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Unidad Iztapalapa

Departamento de Matemáticas

SISTEMAS DINÁMICOS GENERALIZADOS

Presenta:

MAT. GENARO MONTAÑO MORALES

para la obtención del grado

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

Sinodales:

Dr. José Antonio García Rodríguez. Dr. Francisco Javier Mendoza Torres.

Asesor: Dr. Juan Héctor Arredondo Ruíz

Ciudad de México
27 de Julio de 2018

Índice general

Resumen 5

Introducción 7

Capítulo 1 Preliminares 13
1.1 Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias 13
1.2 Conjuntos precompactos y relativamente compactos 15
1.3 Funciones absolutamente continuas y el Teorema de Arzelá- Ascoli 16
1.4 Mapeos Multivaluados 19
1.4.1 Mapeos multivaluados semicontinuos superiormente 19
1.5 Selecciones 22

Capítulo 2 Soluciones Generalizadas 25
2.1 Motivación 25
2.2 Soluciones en el sentido de Filippov 28
2.3 Teorema de la selección aproximada 31
2.4 Teorema de existencia de soluciones para inclusiones diferenciales 33
2.5 Ejemplo 35

Capítulo 3 Flujos generalizados 37
3.1 Conjunto asintóticamente superior y atracción 37
3.2 Conjuntos ω-límite 39
3.3 Flujos disipativos y puntualmente disipativos 43
3.4 Atractores globales 44
3.5 Existencia de atractores 44
3.5.1 Conjuntos atrayentes compactos 45
3.5.2 Semicompacidad superior 47
3.5.3 Disipatividad puntual 47
3.6 Conexidad de un atractor 50
3.7 Ejemplos 52

Conclusiones 73

Bibliografía 75

Resumen

En cursos básicos de ecuaciones diferenciales, se estudian las condiciones para garantizar soluciones de problemas de valores iniciales (P.V.I). Es decir, sistemas de ecuaciones diferenciales con alguna condición inicial $x_0 \in X$. Generalmente $X = \mathbb{R}^n$. En el estudio de ecuaciones diferenciales parciales o incluso para ecuaciones diferenciales ordinarias sucede que no podemos garantizar existencia de soluciones. Y para las ecuaciones diferenciales (ordinarias o parciales) para las cuales sí se puede probar existencia ocurre el fenómeno de la pérdida de unicidad de las soluciones. Motivados por la existencia de varias soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias, buscamos una manera más general de definir un sistema dinámico generalizado dado por un mapeo multivaluado. Esto nos conduce a estudiar la teoría de mapeos multivaluados, y el método de Filippov para obtener soluciones a una ecuación diferencial sin unicidad que tengan al menos algunas de las propiedades usuales de una ecuación diferencial. Es decir, que la solución generalizada sea continua y satisfaga una ecuación diferencial en un sentido más amplio. Una vez estudiado el caso para ecuaciones diferenciales ordinarias sin unicidad de soluciones, pasamos al estudio de sistemas dinámicos generalizados. Estos aparecen como una generalización a los sistemas dinámicos generados por ecuaciones diferenciales con existencia y unicidad de soluciones.

La teoría para sistemas dinámicos generalizados se ha desarrollado ampliamente debido a sus múltiples aplicaciones en el análisis de sistemas de evolución asociados a sistemas físicos.

En la tesis se presentan las generalizaciones de algunos resultados clásicos para sistemas dinámicos. Principalmente los referentes al concepto de atractores globales.

Este concepto es vital para el análisis de sistemas físicos porque reduce el estudio del sistema a un problema en dimensión finita en ciertos casos, incluso si el sistema tiene infinidad de variables.

En el último capítulo de este trabajo presentamos un método original que nos permite estudiar bajo ciertas condiciones un sistema dinámico clásico discontinuo en el contexto de flujos generalizados.

Introducción

Existe un creciente interés en el estudio de flujos multivaluados o flujos generalizados, los cuales son una generalización de los sistemas semidinámicos. Este tipo de flujos aparecen de manera natural en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales.

En el sentido que se entenderá aquí, un sistema o flujo generalizado consiste en una tripleta $(X, \mathbb{R}, G)$, donde X denota un conjunto no vacío llamado espacio de estados, y G es una función designada como la dinámica, con dominio $X \times \mathbb{R}$, cumpliendo las siguientes condiciones:

1. $G\colon (\mathbb{R}, X) \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$.
2. $G(x, t+s) \subset G(G(x,t), s)$; $(\forall t, s \in \mathbb{R})$ $(\forall x \in X)$.
3. $G(x, 0) = \{x\}$ $(\forall x \in X)$.

El mapeo multivaluado G se llama semiflujo multivaluado si las condiciones $1, 2$ y 3 se cumplen cuando $t, s \in \mathbb{R}^+$.

Recientemente este tipo de flujos ha tenido una creciente atención debido a que varias ecuaciones de evolución asociadas a problemas físicos comparten la propiedad de no tener unicidad de soluciones. Véase por ejemplo [**2**], [**14**], [**15**] , [**27**] y [**30**].

Un caso especial de un flujo generalizado es cuando se considera la ecuación diferencial

$$x' = f(x),$$

donde $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función discontinua en algunos puntos.

El principal interés en el estudio de flujos generalizados (o flujos multivaluados), es determinar el comportamiento asintótico de las soluciones cuando $|t| \to \infty$. Esto equivale a predecir o describir una situación específica del sistema. Lo cual cuando el sistema representa un sistema físico es relevante.

Un caso en el que se hacen presentes estos flujos es en los sistemas evolutivos. Los casos más típicos que se encuentran para un sistema evolutivo son los siguientes:

1) Existe una solución estacionaria $x_0 \in X$

$$G(x_0, t) = G(x_0, 0) = \{x_0\} \quad (\forall t \in \mathbb{R}),$$

y la solución estacionaria es estable y atrae todas las órbitas. Es decir,

$$G(x, t) \to \{x_0\}; \;\; (t \to \infty).$$

Donde el concepto de atracción se definirá más adelante.

2) Existe una familia de soluciones estacionarias, caracterizadas por un conjunto de índices I, tal que:
$$G(x_\sigma, t) = G(x_\sigma, 0) = \{x_\sigma\} \quad (t \in \mathbb{R}) \ (\sigma \in I).$$
En general, el comportamiento asintótico de $G(x, t)$ cuando $t \to \infty$ dependerá de la condición inicial $x \in X$. Típicamente, $G(x, t)$ convergerá a una solución estacionaria x_σ para algún $\sigma \in I$. Cada solución estacionaria $x_\sigma \in X$ posee una región de atracción $X_\sigma \subset X$ tal que
$$G(x, t) \to \{x_\sigma\}; \quad (t \to \infty) \quad (\forall x \in X_\sigma).$$
3) El sistema tiene o no soluciones estacionarias pero además aparece otro tipo de comportamiento asintótico:
$$G(x, t) \to G(x_\omega, t); \quad (t \to \infty),$$
donde $x_\omega \in X$ está caracterizado todavía por un número finito de parámetros $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$, y el comportamiento asintótico puede ser descrito por los valores ω de un conjunto discreto.
4) El caso más complicado aparece cuando el comportamiento no puede ser descrito por un conjunto discreto de valores:
$G(x, t)$ es caótico para cada tiempo $t \in \mathbb{R}$, o al menos así lo parece. En este caso, usando técnicas del análisis de Fourier, se puede mostrar que para cierto tipo de sistemas evolutivos se cumple
$$G(x, t) \to B \quad (t \to \infty),$$
donde $B \subset X$, y la convergencia aquí es con respecto a la métrica de Hausdorff. El subconjunto B resulta ser invariante bajo la acción de la dinámica G:
$$G(x, t) \subset B \quad (\forall x \in B).$$
En general, el subconjunto B no se puede determinar, y para $t \to \infty$ la dinámica $G(x, t)$ está cerca de B . Esto nos conduce a que la descripción del comportamiento asintótico sea complicada.

Este trabajo está dividido en tres capítulos. En el primer capítulo se hace un repaso de los temas más relevantes para el desarrollo de este trabajo. En primer lugar, recordamos algunos aspectos sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales, como por ejemplo, la existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias

$$x' = f(x) \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

donde $f\colon E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua de clase $C^1(E)$, con E un abierto y $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Recordemos que con estas condiciones el problema de Cauchy planteado tiene la propiedad de tener una única solución que pasa por x_0, y que a partir de esta, podemos definir un flujo (Véase por ejemplo [**22**])
$$S(t, x_0) = S_t x_0 = x(t)$$
que cumple las propiedades de grupo
$$S_0 x_0 = x_0, \ \ y \ \ S_{t+s} x_0 = S_t S_s x_0 \ \ (\forall t, s \in I \ \ ) \ \ (\forall \ x_0 \in E).$$

Para algún $I \subset \mathbb{R}$. En general, las ecuaciones diferenciales definidas por (1) definen un sistema dinámico (E, S_t). Lo que da lugar a estudiar de manera natural los sistemas dinámicos en cualquier espacio X. Es decir, se estudian sistemas dinámicos (X, S_t), donde X es llamado el espacio de fase, que en general es un espacio métrico (no necesariamente completo), y S_t es un flujo continuo respecto al tiempo t. En este sencillo ejemplo generalmente $X = \mathbb{R}^n$. Estos sistemas dinámicos nos motivan a pensar en algo más general, que son los flujos generalizados, estudiados en el capítulo 3.

Las soluciones de ecuaciones diferenciales como (1), tienen la propiedad de representarse como:

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s)ds.$$

En la sección 1.3, nos cuestionamos qué tipo de funciones pueden escribirse de esta manera. Resulta ser que las funciones absolutamente continuas cumplen con esta propiedad. De hecho si f tiene derivada casi en todas partes y esta es finita, se tiene que

$$\int_a^b f'(s)ds = f(b) - f(a).$$

Finalmente, damos un breve repaso sobre la tería de las mapeos multivaluados, sus propiedades y la continuidad superior, que es de suma importancia para garantizar la existencia de soluciones para inclusiones diferenciales, estudiada en el capítulo 2. Ver por ejemplo [**18**] y [**29**].

Cuando el campo f de (1) no es continuo en el punto inicial x_0, no podemos garantizar la existencia de soluciones, y mucho menos la unicidad de soluciones, de hecho, si el campo f es continuo en una vecindad de la condición inicial, se puede garantizar la existencia de soluciones pero no la unicidad, como lo muestra el Teorema de Peano(véase [**22**]). En el Capítulo 2 estudiamos precisamente la situación en que el campo f de (1) es discontinuo en un conjunto numerable de puntos D. Vemos algunos ejemplos en los que no es posible construir soluciones en tales puntos, y por lo tanto pueden carecer de soluciones en el sentido usual, lo que nos motiva a buscar una manera de definir una solución en tales puntos, de la siguiente manera:

1. Si f tiene discontinuidades en D, consideramos soluciones a la inclusión diferencial
$$x' \in F(x) \quad x(0) = x_0$$
donde
$$F(x) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{co(f(B_\epsilon(x) \setminus D))}.$$
Donde $co(A)$ es la envolvente convexa del conjunto A.
2. En vista de que para cada x, $F(x)$ es no vacío, cerrado y convexo, definimos un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales
$$x' = m(F(x)), \quad x(0) = x_0,$$
donde m es la selección de norma mínima, por lo que
$$m(F(x)) \in F(x).$$

En consecuencia, si $x(t)$ es una función absolutamente continua que satisface la ecuación diferencial $x'(t) = m(F(x(t)))$, para casi todo t y $x(0) = x_0$, entonces $x' \in F(x)$ casi en todas partes.

A las funciones que cumplen con esta última propiedad, las vamos a definir como soluciones de Filippov para el problema de valores iniciales planteado. Hacemos notar, que si f es una función continua, las soluciones de Filippov coinciden con las soluciones usuales. Todos estos conceptos se definen en la sección 2.2.

Cuando el mapeo multivaluado F es semicontinuo superiormente a valores o imágenes convexas, se puede construir una sucesión de funciones continuas que aproximan a una selección para este mapeo. Particularmente, cuando el campo f es acotado casi en todas partes, se tiene que el mapeo multivaluado F aplicado a esta función, es semicontinuo superiormente. De esta manera cada función multivaluada F es aproximada por esta sucesión de funciones.

Para finalizar este capítulo, se muestra que bajo estas condiciones y bajo el supuesto de que la selección de norma mínima $m(F)$ es localmente compacta, se garantiza la existencia de soluciones para la inclusión diferencial asociada al campo f y, por lo tanto, existencia de soluciones para nuestro problema de valores iniciales.

En el capítulo 3, estudiamos las propiedades de un flujo generalizado, que como se mencionó antes, los flujos generalizados son una abstracción de sistemas dinámicos autónomos para los cuales puede haber más de una solución correspondiente a cada condición inicial dada. Por ejemplo la ecuación de reacción difusión, analizada en [**13**]. Uno de los ejemplos vistos en este capítulo, es cuando consideramos el espacio de todas las trayectorias $\mathcal{D}(x_0)$ que pasan por x_0. Es decir, consideramos las trayectorias $x(t) \in \mathcal{D}(x_0)$, con $t \geq 0$, y definimos un flujo generalizado $G \colon X \times \mathbb{R} \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$, por

$$G(x_0, t) = \{x(t) \in \mathcal{D}(x_0)\} \tag{2}$$

que representa la evolución de las soluciones que partieron de x_0, y que están en un tiempo determinado t. En la sección 3.6 se estudian las propiedades de este flujo generalizado.

Uno de los conceptos más importantes para analizar la dinámica del flujo G es el de conjunto $\omega -$ *límite*, el cual podemos pensar que es donde “mueren”las órbitas que parten de un cierto conjunto dado. Este concepto se estudia en la sección 3.2. Otros conjuntos importantes en el desarrollo de este capítulo son los conjuntos absorbentes y conjuntos atrayentes. En los conjuntos absorbentes, si las órbitas del semiflujo G empiezan de un conjunto acotado $B \subset X$, resulta que cuando $t \to \infty$, estas órbitas terminan dentro del conjunto absorbente. Mientras que en el conjunto atrayente las órbitas no necesariamente terminan dentro, si no que se aproximan infinitamente a este, como se hace notar en la sección 3.3. A partir de esto, definimos los flujos disipativos y puntualmente disipativos.

Con estos conceptos, definimos el concepto de atractor global [**30**]. Estudiamos las condiciones que debe satisfacer el flujo multivaluado G para que se pueda garantizar la existencia de un atractor.

Existe una variedad de sistemas en las que se estudia la existencia y la dinámica de los atractores, como por ejemplo, las ecuaciones parabolicas sin singularidades [**21**], la ecuación reacción-difusión [**13**]. Los atractores globales para las ecuaciones de Navier-Stokes en tres dimensiones se caracterizan en [**6**] y [**14**].

La teoría del estudio sobre atractores trata principalmente de describir el comportamiento asintótico de las trayectorias de soluciones de las ecuaciones diferenciales. Un atractor global es un conjunto que atrae a todos los conjuntos acotados, y cumple la propiedad de ser negativamente invariante o invariante del espacio fase. Es decir, cada trayectoria que empieza en el interior del atractor permanecerá allí en todo tiempo, por lo que este conjunto juega un papel muy importante para estudiar la dinámica o evolución de las trayectorias cuando el tiempo $|t| >> 1$.

En la sección 3.5, se estudian algunas condiciones para la existencia de atractores globales de un flujo multivaluado G. Las que estudiamos son las más generales, como son la propiedad de la semicompacidad superior asintótica y las propiedades de desipatividad global y puntual. También se presenta la prueba para garantizar la existencia de un atractor global bajo la condición de un conjunto atrayente compacto. Hacemos notar en este apartado que aquí los atractores no son necesariamente compactos ni conexos como se muestra en el capítulo 3, ejemplo 3.29. A partir de una ecuación diferencial con campo discontinuo, se consideran las trayectorias o soluciones de ésta, y a partir de estas soluciones definimos el semiflujo multivaluado dado por (2).

A partir de las trayectorias recuperamos un sistema semidinámico, dado por

$$S(t)\phi = \phi^t \;\; t \geq 0$$

donde

$$\phi^t(s) = \phi(t+s) \;\; s \geq 0$$

es el operador traslación.

Se muestra que este semiflujo, tiene un conjunto que atrae a todas las órbitas y es invariante. De acuerdo a la teoría para sistemas dinámicos [**9**], resulta que este conjunto es un atractor global.

Por último, damos un ejemplo en el que se muestra que a partir de un sistema semidinámico $(\varphi_t, \mathbb{R}^n)$ podemos generar un semiflujo multivaluado $F\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$. Un resultado importante es que si φ_t es un semiflujo disipativo, entonces el semiflujo multivaluado F tiene un atractor global y éste coincide con el atractor global del semiflujo φ_t.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias

En este capítulo se mostrarán algunos resultados clásicos sobre la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Comúnmente se habla de la existencia y unicidad de soluciones para una ecuación diferencial dada, sin embargo aquí lo más interesante es cuando aparecen más de una solución, lo que nos motivará a estudiar los mapeos multivaluados más adelante.

Consideremos el problema de valores iniciales

$$x' = f(x), \qquad x(0) = x_0 \tag{3}$$

donde $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua, y $x_0 \in D$.

Proposición 1.1. *Una función $\phi(t)$ es solución de* (3) *si y sólo si $\phi(t)$ es solución de la ecuación integral*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds.$$

Demostración: Supongamos que $\phi(t)$ es solución de (3), entonces

$$\phi'(t) = f(\phi(t)), \qquad \phi(0) = x_0.$$

Integrando desde t_0 a t y usando el teorema fundamental del cálculo se obtiene

$$\phi(t) - \phi(0) = \int_0^t \phi'(s)ds = \int_{t_0}^t f(\phi(s))ds = \phi(t) - x_0,$$

por lo tanto

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\phi(s))ds.$$

Ahora supongamos que

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\phi(s))ds,$$

evaluando en t_0 se tiene $\phi(t_0) = x_0$. Derivando $\phi(t)$ con respecto a t y una vez más usando el teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$\phi'(t) = f(\phi(t)).$$

Así $\phi(t)$ es solución de (3).
□

Es bien conocido que el teorema de Peano garantiza la existencia de soluciones para el problema de valores iniciales (3) si f es continua en un entorno de la condición inicial

$x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pero esto no es suficiente para garantizar que esta solución sea única como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.

Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x_1, x_2) = (3{x_1}^{2/3}, x_1 + x_2)$ y consideremos el problema de valores iniciales

$$x' = f(x) \qquad\qquad (x_1(0), x_2(0)) = (0,0).$$

El problema de valores iniciales tiene dos soluciones, a saber

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (t^3, -t^3 - 3t^2 - 6t - 6 + 6e^t) \;\; y \;\; x(t) = (0,0) \;\; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Es fácil verificar que estas funciones satisfacen la ecuación diferencial y que $x(0) = (x_1(0), x_2(0)) = (0,0)$. Note que $f(x)$ es continua en $(0,0)$ pero no es diferenciable ahí.

El teorema de existencia y unicidad da condiciones sobre la función f para garantizar la unicidad de la solución al problema de valores iniciales planteado. Antes de enunciar el teorema recurrimos primero a la siguiente definición.

Definición 1.3. *Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que la función $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ es de Lipschitz en E si existe una constante $\lambda \geq 0$, tal que para toda y, $z \in E$*

$$\|f(y) - f(z)\| \leq \lambda \|y - z\|.$$

Donde $\|\cdot\|$ es la norma usual en $\mathbb{R}^n$.

El siguiente teorema garantiza la unicidad de soluciones cuando el campo f es Lipschitz. La demostración puede consultarse en cualquier libro de teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Teorema 1.4. *(Teorema de existencia y unicidad)*
Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ una función localmente Lipschitz , entonces existe $\alpha > 0$ tal que el problema de valores iniciales

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

tiene una única solución $\phi(t)$ en el intervalo $[-\alpha, \alpha]$.

Cuando el campo f es una función de clase $C^1(E)$ y E abierto, la función f resulta ser localmente Lipschitz, y en este caso podemos garantizar la existencia y unicidad de soluciones.

Proposición 1.5. *Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f\colon E \to \mathbb{R}^n$. Si $f \in C^1(E)$, entonces es localmente Lipschitz en E.*

Demostración: Ver lema de la página 71 de [**22**].
□

1.2. Conjuntos precompactos y relativamente compactos

Algunos conceptos de gran importancia y utilidad que se usarán durante este trabajo, son los conjuntos precompactos y conjuntos relativamente compactos.

Definición 1.6. *Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un conjunto no vacío. Decimos que A es precompacto, si dado $\epsilon > 0$ existe un número finito de puntos $x_1, x_2, ..., x_n \in A$ tal que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i, \epsilon).$$

Donde $N(x, \epsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$.

Algo que nos resulta obvio o por lo menos claro, es que si tomamos cualquier subconjunto en un conjunto precompacto, éste también será un conjunto precompacto.

Teorema 1.7. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A \subset X$ es un conjunto precompacto y $A_1 \subset A$ es cualquier conjunto no vacío, entonces A_1 también es precompacto.*

Definición 1.8. *Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ no vacío es relativamente compacto si $\overline{A}$ es compacto.*

Existe una relación estrecha entre los conjuntos precompactos y los conjuntos relativamente compactos. Los siguientes resultados muestran que para que un conjunto precompacto sea relativamente compacto o viceversa, depende del espacio en el que están estos conjuntos.

Teorema 1.9. *En cualquier espacio métrico (X, d), todo conjunto relativamente compacto A es precompacto.*

Es natural preguntarnos si el recíproco de este teorema también es cierto, o de manera equivalente, si cualquier conjunto precompacto y cerrado es compacto. Por lo general no es así, pero la respuesta es afirmativa en espacios métricos completos.

Teorema 1.10. *Todo conjunto precompacto A en un espacio métrico completo es relativamente compacto.*

Estos resultados pueden consultarse en [**10**].

1.3. Funciones absolutamente continuas y el Teorema de Arzelá- Ascoli

En los cursos básicos de análisis es bien conocida las relaciones existentes entre las operaciones de diferenciación e integración. Precisamente, dos resultados básicos conocidos expresan dicha relación: El Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de Barrow. Es decir, si f es una función continua, y F es una función con derivada continua, entonces

$$\frac{d}{dx}[\int_a^x f(x)dx] = f(x)$$

y

$$\int_a^b F'(s)ds = F(b) - F(a).$$

Nos preguntamos aquí para qué clase de funciones es posible extender el Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de Barrow, o al menos si el conjunto en donde no se cumple es muy pequeño en medida. Lo que nos lleva a pensar en derivación casi en todas partes. Con ese objetivo se introduce el concepto de funciones absolutamente continuas.

Definición 1.11. *Una función* $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *se llama absolutamente continua si para todo número* $\epsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que para toda familia finita* $\{(a_i, b_i)\}$ *de intervalos disjuntos en* $[a,b]$ *tales que* $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \delta$ *se cumple que*

$$\sum_{i=1}^{n} \|x(b_i) - x(a_i)\| \leq \epsilon.$$

En el caso de que esta familia finita conste de un único intervalo, caemos en la definición de continuidad de la función f en $[a,b]$. Por lo tanto cada función absolutamente continua es continua.

Proposición 1.12. *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *una función Lipschitz en el intervalo cerrado* $[a,b]$*, entonces* f *es absolutamente continua en* $[a,b]$*.*

Demostración: Como f es Lipschitz en $[a,b]$, existe una constante $L \geq 0$, tal que,

$$\|f(u) - f(v)\| \leq L|u - v| \;\; \forall\, u, v \in [a,b].$$

Si $L = 0$, el resultado es obvio. Ahora supongamos que $L \neq 0$. De acuerdo a la definición de continuidad absoluta sobre $[a,b]$, es claro que tomando $\delta = \epsilon/L$ se tiene que f es absolutamente continua.
$\square$.

El siguente teorema lo podrá consultar en [**23**].

Teorema 1.13. *Si* f *es una función continua en un intervalo* $[a,b]$ *y la derivada de* f *existe y es acotada en* (a,b)*, entonces* f *es absolutamente continua en* $[a,b]$*.*

En el estudio del cálculo, las integrales indefinidas se definen con respecto a la integral de Riemann. Aquí vamos a decir que una función f en un intervalo cerrado $[a,b]$ es la integral indefinida de g sobre $[a,b]$ siempre que g sea Lebesgue integrable sobre $[a,b]$ y

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(s)ds \qquad\qquad \forall x \in [a,b].$$

Otro resultado muy interesante es que precisamente cuando la función f es absolutamente continua, entonces se cumple la regla de Barrow.

Teorema 1.14. *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua. Entonces f es derivable casi en todas partes en (a,b), su derivada f' es integrable en $[a,b]$ y además*

$$\int_a^b f'(s)ds = f(b) - f(a)$$

Demostración: Ver teorema 10 de [**8**].
□

Cabe destacar que hasta aquí aún no se tiene alguna representación para la función f en términos de integrales como nos gustaría. El siguiente teorema da una representación por medio de la integral.

Teorema 1.15. *Una función f definida sobre un intervalo cerrado $[a,b]$ es absolutamente continua si y sólo si*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

Demostración: Ver teorema 11 de [**8**].
□

Recordemos que si una función f es identicamente cero, esto implica que su integral será también cero. Sin embargo si la integral es cero no necesariamente la función es cero, como lo muestra el siguiente lema. Su demostración puede consultarse en el lema 13 de [**8**].

Lema 1.16. *Sea f una función integrable en el intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces $f(x) = 0$ para casi todo $x \in [a,b]$ si y solamente si*

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = 0 \ \ (\forall x_1, x_2 \in [a,b]).$$

Por último vamos a demostrar el teorema fundamental del cálculo, con ayuda de las funciones absolutamente continuas.

Teorema 1.17. *Sea f una función integrable sobre el intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces para casi todo $x \in [a,b]$ se tiene*

$$\frac{d}{dx}[\int_a^x f(x)dx] = f(x).$$

Demostración: Definamos la función F en $[a,b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx \ \ \forall x \in [a,b].$$

El teorema 1.15 nos dice que, como F es una integral indefinida, es absolutamente continua. Por lo tanto, por el teorema 1.14, F es diferenciable casi donde sea en (a,b) y su derivada F' es integrable. Según el lema precedente, para demostrar que la función integrable $F' - f$ es igual a cero casi en todas partes en $[a,b]$, basta con demostrar que su integral sobre cada subintervalo cerrado de $[a,b]$ es cero.
Sea $[x_1, x_2] \subset [a,b]$. En el teorema 1.14, reemplazamos $[a,b]$ por $[x_l, x_2]$, y así

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}(F'(x)-f(x))dx &= F(x_2)-F(x_1)-\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\\ &= F(x_2)-F(x_1)+\int_a^{x_1}f(x)dx-\int_a^{x_2}f(x)dx\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo que

$$\frac{d}{dx}[\int_a^x f(x)dx]=F'(x)=f(x)$$

casi donde sea.
□

En el estudio del análisis, la convergencia de sucesiones de funciones es muy importante, principalmente en el estudio del teorema de Arzelá - Ascolli.

Definición 1.18. *Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función f sobre un conjunto A si para cada $\epsilon > 0$ existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y para cada $x \in A$*

$$\|f_n(x)-f(x)\| \leq \epsilon.$$

Es importante notar que cuando se habla de convergencia uniforme el número N solamente depende de ϵ, y no del punto que tomemos.

Definición 1.19. *Una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es llamada localmente compacta (respectivamente localmente acotada) si para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe una vecindad U_x de x, tal que $f(U_x)$ es compacta (respectivamente acotado).*

Definición 1.20. *Una familia de funciones $\{f_\epsilon\}$, donde $f_\epsilon\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, es llamada equicompacta (respectivamente equiacotada) si para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe un subconjunto compacto (respectivamente acotado) $K \subset \mathbb{R}^m$, una vecindad U_x de x, y un número $\epsilon_0 > 0$ tales que*

$$f_\epsilon(U_x) \subset K, \quad \forall \epsilon < \epsilon_0.$$

Ahora estamos listos para enunciar el teorema de Arzelá - Ascoli. Para su demostración véase el teorema 4 de [**18**].

Teorema 1.21. *(Teorema de Arzelá- Ascoli)*
Sea $I \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y acotado, $x_k(\cdot)$ una sucesión de funciones absolutamente continuas. Donde $x_k\colon I \subset \mathbb{R} \to X$, con X un espacio de Banach, tales que satisfacen:

I) *Para cada $t \in I$, $\{x_k(t)\}$ es un subconjunto relativamente compacto en X.*
II) *Existe una función positiva $C(\cdot) \in L(I)$, tal que para casi todo $t \in I$, $\|x_k(t)\| \leq C(t)$.*

Entonces existe una subsucesión (otra vez denotada por) $x_k(\cdot)$, que converge a una función absolutamente continua $x(\cdot)$, también definida en I, y toma valores en X. La convergencia es en siguiente sentido.

I) *$x_k(\cdot)$ converge uniformemente a $x(\cdot)$, sobre subconjuntos compactos de I.*
II) *$x_k'(\cdot)$ converge débilmente a $x'(\cdot)$ en $L^1(I,X)$.*

1.4. Mapeos Multivaluados

De aquí en adelante, denotaremos por $2^X \setminus \{\emptyset\} = \mathcal{P}(X)$ el conjunto que tiene como elementos a los subconjuntos de X distintos del conjunto vacío.

Definición 1.22. *Sean X y Y dos conjuntos. Un mapeo multivaluado $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ es un mapeo que asocia a cada $x \in X$ un subconjunto $F(x)$ de Y. Al subconjunto $F(x)$ se le llama imagen o valor de F en X.*

El subconjunto

$$Dom(F) := \{x \in X : F(x) \in \mathcal{P}(X)\}$$

es llamado el dominio de F.

Comúnmente es conveniente caracterizar a F por su gráfica $graf$. La gráfica de F es el subconjunto de pares (x, y) donde $y \in F(x)$:

$$graf(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

A continuación se ilustra el concepto de función multivaluada, con algunos ejemplos.

Ejemplo 1.23. *Sean $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ una función continua y $K \subset Y$ un conjunto compacto. Definimos*

$$F_K(x) = \left\{ y \in K : f(x, y) = \min_{z \in K} f(x, z) \right\}.$$

Note que para cada $x \in X$, $F(x)$ es no vacío.

Ejemplo 1.24. *Dada $f\colon X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, el mapeo $G\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(X)$ definido por*

$$G(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$$

es una función multivaluada.

Note que $G(x) = \{x\}$ si f es inyectiva, y multivaluada si f no es inyectiva. Notar también que si f no es continua entonces $G(x)$ puede ser vacío.

1.4.1. Mapeos multivaluados semicontinuos superiormente

Las funciones multivaluadas semicontinuas superiormente son de suma importancia para las ecuaciones que se estudiarán más adelante. A continuación se enuncia la definición de estas funciones.

Definición 1.25. *Sea $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$. Decimos que F es semicontinua superiormente en $x_0 \in X$, si para cada conjunto abierto N de Y tal que $F(x_0) \subset N$, existe un conjunto abierto M de X que contiene a x_0 tal que $F(x) \subset N$ para cada $x \in M$.*

Decimos que F es semicontinua superiormente si lo es para cada $x \in X$.

Note que este concepto coincide con la definición de continuidad en el caso de funciones univaluadas.

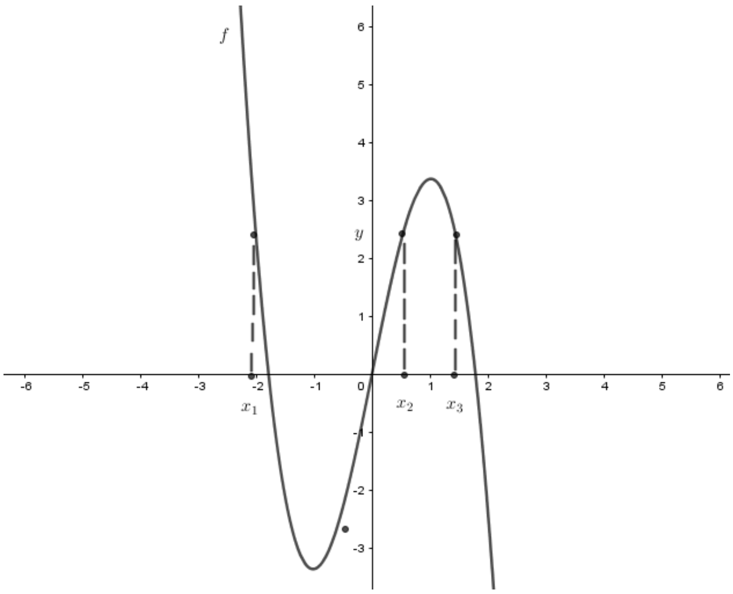

FIGURA 1. De acuerdo al ejemplo 1.24, podemos ver claramente que $G(y) = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Ejemplo 1.26. *La función multivaluada* $F\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *definida como*

$$F(x) = \begin{cases} \{-1\} & si \quad x < 0 \\ [-1,1] & si \quad x = 0 \\ \{1\} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

es semicontinua superiormente.

Demostración: Sea $x_0 \in R$. Si $x_0 < 0$, entonces $F(x_0) = \{-1\}$. Luego para cada abierto N tal que $\{-1\} \subset N$, pongamos el conjunto abierto $M = (2x_0, 0)$. Claramente $F(x) \subset N$ para cada $x \in M$.
Si $x_0 > 0$, entonces $F(x_0) = \{1\}$, luego si N es un abierto tal que $\{1\} \subset N$, el conjunto abierto $M = (0, 2x_0)$ satisface que $F(x) \subset N$ para cada $x \in M$.
Finalmente si $x_0 = 0$ y si N es un abierto tal que $[-1,1] \subset N$, para cada $\epsilon > 0$ tomamos el conjunto $M = (-\epsilon, \epsilon)$ y entonces $F(x) \subset N$ para cada $x \in M$.

El concepto de estos mapeos está dado de manera general para cualquier conjunto X. En el caso de que se trate de un espacio métrico (X, d), denotaremos por

$$N(K, \zeta) = \{y \in X : d(y, K) < \zeta\}$$

a la bola abierta de radio ζ alrededor del conjunto $K \subset X$. Si X es un espacio normado, podemos escribir $N(K, \zeta) = K + N(0, \zeta)$. Donde $N(0, \zeta)$ es la bola en el sentido usual.

Definición 1.27. *Sea* $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$. *Decimos que* F *es semicontinua en* x_0 *con respecto a* $\epsilon > 0$*, si existe un* $\delta > 0$ *tal que,* $F(y) \subset F(x_0) + N(0, \epsilon)$ *para todo* $y \in N(x_0, \delta)$.

Claramente en un espacio normado, si $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ es semicontinua superiormente, es semicontinua superiormente con respecto a ϵ. En efecto $F(x_0) + N(0, \zeta)$ y $N(x_0, \delta)$, son vecindades particulares. El recíproco no es cierto, es decir un mapeo que es semicontinuo superiormente con respecto a ϵ, no es necesariamente semicontinuo superiormente.

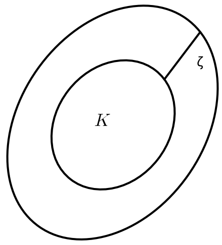

Figura 2. Bola de radio ζ alrededor del conjunto K

Consideremos el mapeo multivaluado $F\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, definido por

$$F(a) = \{(x, y) : x = a\}.$$

El mapeo F es semicontinuo superiormente con respecto a ϵ, basta con tomar $\delta = \epsilon$ de la definición 1.27. Pero no es semicontinua superiormente. En efecto; consideremos $x_0 = 0$ y $N = \{(x, y) : |y| < 1/|x|\}$, es claro que $F(0) \subset N$, pero si $x \neq 0$ entonces, $F(x) \not\subset N$.

En el caso, cuando las imágenes $F(x)$ son compactas, las dos definiciones coinciden (Ver página 45 de [**18**]). En este contexto entendemos por imágenes compactas(cerradas, conexas), si para cada $x \in X$, el conjunto $F(x)$ es un subconjunto compacto (cerrado, conexo) de Y.

En la práctica algunas veces resulta más sencillo verificar las propiedades de mapeos multivaluados en términos de sucesiones o de su gráfica, como lo muestra el siguiente resultado. Su demostración puede consultarse en la página 11 de [**19**].

Lema 1.28. *Sean (U, d_1) y (V, d_2) espacios métricos y $F\colon U \to \mathcal{P}(V)$ un mapeo multivaluado tal que $F(x)$ es un conjunto compacto de V, para cada $x \in U$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) F es semicontinua superiormente en $x_0 \in U$
b) Si $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son sucesiones tales que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0, y \lim_{n\to+\infty} y_n = y_0$$

con $y_n \in F(x_n)$, entonces $y_0 \in F(x_0)$.

Cabe notar, que el enunciado del lema es equivalente a decir que F es semicontinua superiormente si y solamente si, la gráfica de F es cerrada, con la condición de que para cada $x \in U$, $F(x)$ sea compacto. Otro resultado similar es el siguiente.

Teorema 1.29. *Sea $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ un mapeo multivaluado con imágenes cerradas. Supongamos que para cada $x \in Dom(F)$ el conjunto*

$$M := \overline{\bigcup_{y\in N(x,\delta)} F(y)}$$

es compacto, para algún $\delta > 0$. Entonces, F es semicontinua superiormente si y solamente si la gráfica de F es cerrada.

Demostración: Ver teorema 1.4.1 de [**29**].
□

Veamos algunos de los resultados más importantes para mapeos multivaluados semicontinuos.

Teorema 1.30. *Sea $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ un mapeo multivaluado semicontinuo superiormente con imágenes compactas. Si $K \subset X$ es compacto, entonces $F(K)$ es compacto.*

Demostración: Ver teorema 1.4.2 de [**29**].
□

Otro de los resultados interesantes es cuando el conjunto K es conexo. La imagen de K bajo F resulta también conexa.

Teorema 1.31. *Sea $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ un mapeo semicontinuo superiormente con imágenes conexas. Si $K \subset X$ es un conjunto conexo, entonces $F(K)$ también es conexo.*

Demostración: Demostremos esto por contradicción. Sea $K \subset X$ un conjunto conexo, tal que $F(K)$ no es conexo. Entonces, existen conjuntos abiertos no vacíos A_1 y A_2 en $F(K)$, tales que $F(K) = A_1 \cup A_2$, y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Definamos los siguientes conjuntos

$$A = \{x \in K : F(x) \subset A_1\} \ \ y \ \ B = \{x \in K : F(x) \subset A_2\}$$

Es claro que estos conjuntos son disjuntos, ya que si $x \in A \cap B$, entonces $F(x) \subset A_1 \cap A_2$, lo cual no es posible. La demostración de que A y B son abiertos en K, es una consecuencia directa de que F es semicontinua superiormente.

Tomemos un elemento $x \in K$, luego, por ser $F(x)$ conexo, resulta que $F(x) \subset A_1$ o $F(x) \subset A_2$. Por lo tanto, $K = A \cup B$. Ya que K es conexo, se tiene que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. Si $A = \emptyset$ entonces $F(K) = A_2$ y en consecuencia $A_1 = \emptyset$, lo cual no es posible. De igual manera si $B = \emptyset$, se tiene que $A_2 = \emptyset$, en cualquiera de los dos casos se llega a una contradicción. Esto muestra que $F(K)$ es conexo.
□

1.5. Selecciones

En la teoría de mapeos multivaluados, el concepto de selección es de fundamental importancia. En el mismo las selecciones juegan un papel muy importante a la hora de garantizar las soluciones para la inclusión diferencial, que se abordará con más detalle en el próximo capítulo.

Definición 1.32. *Dada una función multivaluada $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$, una selección para F es una función univaluada $f\colon X \to Y$ tal que $f(x) \in F(x)$, para cada $x \in X$.*

Notemos que como no le pedimos condiciones a la función f, la existencia de esta función es consecuencia directa del axioma de elección. Ver por ejemplo el libro [**29**]. Una forma de calcular una selección para una función multivaluada F, es con ayuda de proyecciones ortogonales.

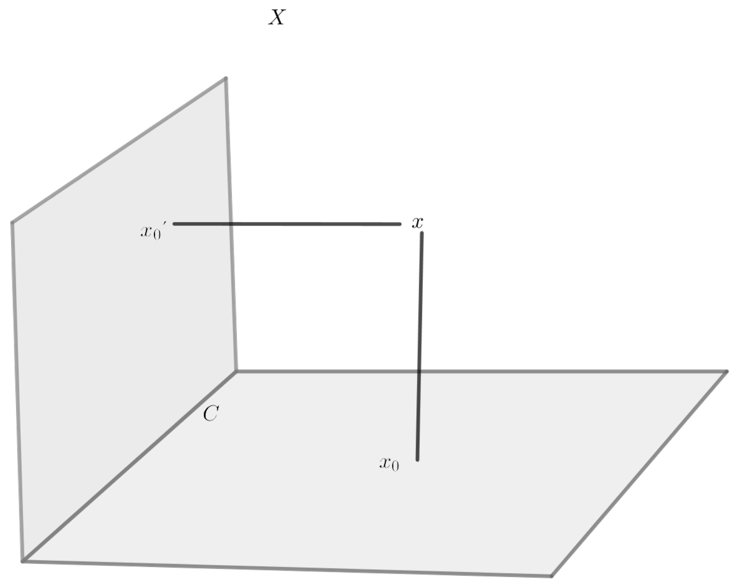

FIGURA 3. Proyección de x sobre el conjunto C que no es convexo.

En cursos básicos de análisis funcional se prueba que dado un espacio de Hilbert X con producto interno $< \cdot, \cdot >$ se le puede asociar una norma $\|x\| =< x, x >^{1/2}$, véase por ejemplo [**4**].

Definición 1.33. *Sea X un espacio de Hilbert, tomemos $x \in X$ y $C \subset X$. Definimos la proyección de x sobre C a través de*

$$\pi_C(x) = \{y \in C : \|x - y\| = d(x, C)\} .$$

En donde $d(x, C) = \text{ínf}_{z \in C} \|x - z\|$. En el caso en que x sea igual a cero, pondremos $\pi_C(0) = m(C)$, luego para cada $x \in m(C)$, diremos que x es un elemento de norma mínima del conjunto C.

Teorema 1.34. *Sea $(X, < \cdot, \cdot >)$ un espacio de Hilbert y sea $C \subset X$ un subconjunto cerrado y convexo. Para todo $x \in X$ el conjunto $\pi_C(x)$ consta de un único punto.*

Demostración: Véase el corolario 1 de [**18**] página 21.
□

Teorema 1.35. *(Selección de norma mínima)*
Sea $F \colon X \to \mathcal{P}(Y)$ un función multivaluada con imágenes cerradas y convexas. Entonces, la función definida como $f(x) := m(F(x))$, para cada $x \in X$ es una selección para F.

Demostración: Ya que $F(x)$ es cerrado y convexo, por el teorema 1.34 $f(x) := m(F(x))$ está bien definida como función. Luego, claramente $f(x) \in F(x)$ para cada $x \in X$ por definición. Es decir, f es una selección para F.
$\square$

El concepto de partición de la unidad, es de los temas más involucrados en inclusiones diferenciales como la planteada, que juega un papel muy importante en la teoría de selecciones, el cual se explicará de manera breve.

Sea $K \subset X$ y sea $\{\mathcal{V}_j\}_{j\in J}$ un cubrimiento abierto para K, es decir, $K \subset \bigcup_{j\in J} \mathcal{V}_j$, donde $\mathcal{V}_j$ es abierto para cada $j \in J$. Diremos que una colección de conjuntos $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ en X es un refinamiento para $\{\mathcal{V}_j\}_{j\in J}$, si para cada $i \in I$ existe $j_i \in J$ tal que $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}_{j_i}$. La colección $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ se dice localmente finita, si para cada $i \in I$ el conjunto $\{r \in I : \mathcal{U}_r \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset\}$ es finito. Una familia de funciones $\{p_i(\cdot)\}_{i\in I}$ definidas sobre K se llama partición de la unidad subordinada a $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$, si satisfacen las siguientes propiedades.

a) $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto localmente finito para K.
b) $p_i(\cdot)$ es localmente Lipschitz, para cada $i \in I$.
c) $p_i(x) > 0$ si $x \in \mathcal{U}_i \cap K$ y $p_i(x) = 0$ si $x \in K \setminus \mathcal{U}_i$.
d) para cada $x \in K$, $\sum_{i\in I} p_i(x) = 1$.

Notemos que para una partición de la unidad, su correspondiente cubrimiento es localmente finito, entonces la suma en la condición d) contiene sólo un número finito de términos, y por lo tanto está bien definida. Véase también [**18**].

La existencia de un refinamiento y de la partición de la unidad para espacios métricos son consecuencia de los teoremas 41.4 y 41.7 de la referencia [**16**].

Capítulo 2

Soluciones Generalizadas

2.1. Motivación

Ahora se discutirá cómo hallar una solución para el problema de valor inicial

$$x'(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0 \qquad t \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

donde $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función acotada y discontinua a lo más en un conjunto numerable $D \subset \mathbb{R}^n$. Empecemos por analizar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1. *Consideremos el problema de valores iniciales*

$$x' = \begin{cases} -1 & si \quad x < 0 \\ 2 & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases} \qquad\qquad x(0) = x_0. \tag{5}$$

Analicemos los siguientes casos:

a) Si $x_0 > 0$ la solución de este sistema está dada por $x(t) = t + x_0$, la cual es única para todo $t \geq -x_0$.

b) Si $x_0 < 0$ la solución está dada por $x(t) = -t + x_0$, la cual es única para todo $t \geq x_0$.

c) Si $x_0 = 0$, no es claro cómo construir una solución para la ecuación diferencial. Véase el campo vectorial asociado a la ecuación diferencial.

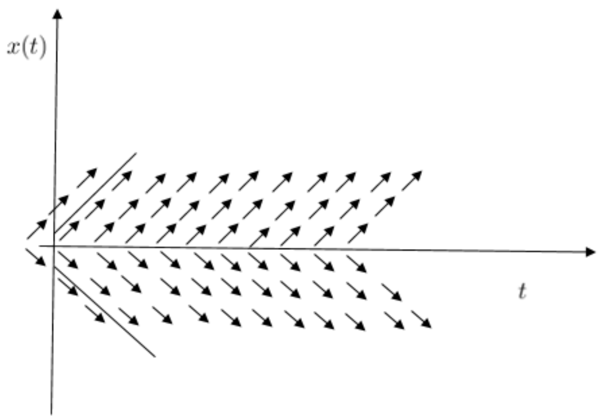

Figura 1. Campo direccional de la función $sign(x)$

El ejemplo anterior ilustra una situación en la que el problema de valores iniciales (4), puede carecer de soluciones en el sentido usual. El origen es una singularidad del campo que no se puede eliminar. Más aún, para el tipo de solución encontrada pueden existir valores en el intervalo de definición, en donde la derivada de dicha solución no exista, tal como lo muestra el ejemplo 1.9 de [**23**]. Esta observación nos motiva a considerar el problema de existencia de soluciones de (4) dentro de una clase más amplia de funciones. Claro que los resultados que se obtengan dentro de esta clase deben ser compatibles con los disponibles en la teoría de ecuaciones cuando la función f es continua.

En este capítulo, se estudia a detalle un método que puede garantizar los requisitos anteriores.

Dada una función f, como en (4), se considera alguna de las soluciones de la inclusión diferencial

$$x' \in F(x), \qquad x(0) = x_0. \tag{6}$$

Aquí F se define como

$$F(x) = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{co(f(N(x,\epsilon)) \setminus D))}, \tag{7}$$

donde $co(A)$ denota la envolvente convexa del conjunto A y $\overline{A}$ la cerradura del conjunto A.

Notemos que para cada $x \in Dom(f)$, $F(x)$ puede ser un conjunto que contenga más de un punto. Es decir, F es una función multivaluada. Más aún si f es localmente acotada para cada $x \in X$, entonces $F(x)$ es un conjunto cerrado, acotado y convexo. Véase la referencia [**18**]. Entendemos como soluciones de la inclusión diferencial (6) de la siguiente manera.

Definición 2.2. *Una función $x(t)$ absolutamente continua es solución de la inclusión diferencial* (6) *si $x'(t) \in F(x(t))$ para casi todo t.*

A la función multivaluada dada por (7) se le conoce como el operador de Filippov. Antes de continuar con el método que nos permita encontrar las soluciones al problema de valores iniciales (5), necesitamos algunos resultados.

Proposición 2.3. *Si x es un punto donde f es continua, entonces $F(x) = \{f(x)\}$.*

Demostración: Consideremos $\epsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n \setminus D$, por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se cumple $\epsilon > 1/N$. Para cada $k \geq N$, elijamos $x_k \in N(x,\epsilon) \setminus D$. Por construcción $x_k \to x$, y por la continuidad de la función f en x, $f(x_k) \to f(x)$. Por lo tanto,

$$f(x) \in \overline{f(N(x,\epsilon) \setminus D)} \subset \overline{co(f(N(x,\epsilon) \setminus D))}.$$

Pero esto es válido para todo $\epsilon > 0$, en consecuencia

$$f(x) \in \bigcap_{\epsilon>0} \overline{co(f(N(x,\epsilon) \setminus D)}$$

es decir, $f(x) \in F(x)$.

Ahora probemos que $F(x) \subset \{f(x)\}$. Ya que f es continua en x, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta_\epsilon > 0$, tal que

$$f(N(x,\delta_\epsilon)) \subset N(f(x),\epsilon)$$

Usando esto, y las propiedades de envolvente convexa, se tiene

$$\overline{co(f(N(x,\delta_\epsilon) \setminus D))} \subset \overline{co(N(f(x),\epsilon))}$$

tomando intersección para todo $\epsilon > 0$

$$\bigcap_{\epsilon>0} \overline{co(f(N(x,\delta_\epsilon) \setminus D))} \subset \bigcap_{\epsilon>0} \overline{co(N(f(x),\epsilon))} = \{f(x)\}$$

□

Ejemplo 2.4. *Veamos el efecto de aplicar el operador de Filippov a la función discontinua del ejemplo 2.1.*

Ya que f es continua para todo $x \neq 0$, se tiene que $F(x) = \{1\}$ si $x > 0$, y $F(x) = \{-1\}$ si $x < 0$. Luego si $x = 0$, que es donde f es dicontinua, consideremos $\epsilon > 0$, entonces

$$f(N(0,\epsilon) \setminus \{0\}) = \{-1, 1\}.$$

Entonces, tomando la envolvente convexa a ambos conjuntos se tiene

$$co(f(N(0,\epsilon) \setminus \{0\})) = [-1, 1]$$

y por lo tanto, tomando cerradura

$$\overline{co(f(N(0,\epsilon) \setminus \{0\}))} = [-1, 1].$$

En resumen

$$F(x) = \begin{cases} \{-1\} & si \quad x < 0 \\ [-1,1] & si \quad x = 0 \\ \{1\} & si \quad x > 0 \end{cases} \tag{8}$$

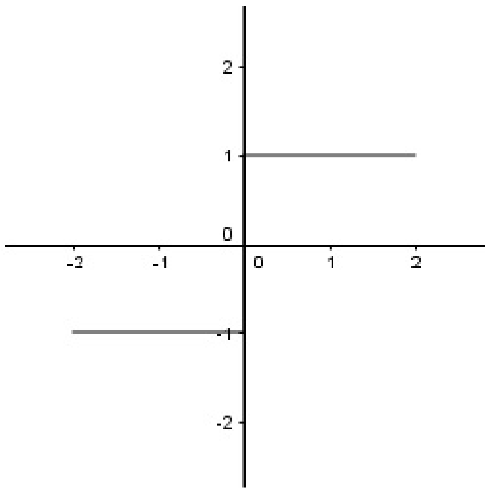

FIGURA 2. Gráfica del operador de Filippov, asociada a la función *sign*.

Esta función es semicontinua superiormente como se muestra en el ejemplo 1.26. Ahora pasemos a encontrar soluciones a nuestro problema.

Observación 1. *Note que el operador de Filippov aplicado a este ejemplo no depende del valor que tiene la función en la discontinuidad $x = 0$. Es decir, podemos definir la función en $x = 0$ como se quiera, y F nunca va a cambiar. Por tal motivo, en los siguientes ejemplos no definiremos la función en sus discontinuidades.*

2.2. Soluciones en el sentido de Filippov

Hasta ahora no sabemos qué significa una solución para nuestro sistema. Con ayuda de los operadores de Filippov vamos a cumplir con este propósito.

A partir de la noción de solución para la inclusión diferencial (6), se define una solución para el problema de valores iniciales (4).

Definición 2.5. *Decimos que una función* $x\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ *es una solución de Filippov para el problema de valores iniciales* (4) *si* $x(t)$ *es una solución para la inclusión diferencial correspondiente.*

Ejemplo 2.6. *La solución a la inclusión diferencial del ejemplo 2.1 resulta ser una solución de Filippov para* (5). *Es decir, si* $x(t) = t + x_0$ *entonces,* $x'(t) \in F(x(t))$ *para casi todo* t*, donde* F *está dada por* (8)*.*

Hasta ahora, lo único que hemos hecho es dar una definición de solución para el problema de valores iniciales (5), pero no una manera de encontrar dichas soluciones. Veamos una forma de encontrar una solución de Filippov.

Es claro, que si f es una función continua, la solución de Filippov para (4), resulta ser una solución en el sentido usual, ya que en este caso $\{f(x)\} = F(x)$. Así que nuestro problema está en encontrar una solución de Filipov en donde f no sea continua.

Para encontrar tal solución, reemplacemos el problema de valores iniciales (4) por otro problema de valores iniciales, satisfaciendo lo siguiente:

a) Considérese otro problema de valores iniciales
$$x' = \tilde{m}(x) \quad x(0) = x_0.$$
Donde $\tilde{m}$ debe ser una función univaluada y debe estar definida para todo x en el dominio de f.

b) La solución de este nuevo problema debe ser también solución de la inclusión diferencial, asociada a f.

Notemos lo siguiente:

Como $F(x)$ es un subconjunto cerrado y convexo, entonces $m(F(x))$ está bien definida, y por el teorema 1.35 $m(F)$ es una selección para F. Así que basta con con tomar $\tilde{m} = m$, es decir, considerar el sistema

$$x' = m(F(x)) \qquad x(0) = x_0 \tag{9}$$

para cumplir con los requisitos anteriores.

Antes de seguir con este método, apliquemos esta selección a la función del ejemplo 2.1. Vimos que el operador de Filippov aplicado a esta función está dado por

$$F(x) = \begin{cases} \{-1\} & si \quad x < 0 \\ [-1, 1] & si \quad x = 0 \\ \{1\} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

y por lo tanto, la selección de norma mínima está dada por

$$m(F(x)) = \begin{cases} -1 & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad x > 0. \end{cases}$$

Notemos que el emplear la selección de norma mínima, es equivalente a redefinir la función en $x = 0$, precisamente por cero. Ahora consideremos el nuevo problema de valores iniciales

$$x' = m(F(x)), \quad x(0) = x_0 \tag{10}$$

Estudiemos los siguientes casos:

a) Si $x_0 > 0$, entonces $x(t) = t + x_0$, la cual está definida para todo $t \geq 0$.

b) Si $x_0 = 0$, entonces podemos construir varias soluciones continuas; la solución idénticamente cero $x(t) = 0$.
La familia de soluciones

$$x_{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq t_0 \\ t - t_0 & si \quad t > t_0 \end{cases} \tag{11}$$

y

$$x_{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq t_0 \\ -t + t_0 & si \quad t > t_0, \end{cases} \tag{12}$$

en donde $t_0 \geq 0$ es cualquier número.

c) Si $x_0 < 0$, entonces la solución está dada por $x(t) = -t + x_0$.

Nuevamente las soluciones de esta ecuación en los puntos de $D = \{0\}$, no son derivables, pero sí continuas. Es decir, cada función $x(t)$ satisface el nuevo problema de valores iniciales (10) casi donde sea. En otras palabras, cada solución $x(t)$, es también solución a la inclusión diferencial (6). En donde $F(x)$ está dado por (8).

Queda pendiente cómo construir una solución para la ecuación diferencial (9). Un método que nos permite hacer esto, es aproximar el lado derecho de dicha ecuación, por medio de una familia de ecuaciones diferenciales cuyo lado derecho son funciones continuas.

Particularmente, cuando la función multivaluada es semicontinua superiormente, se puede obtener dicha familia de ecuaciones diferenciales cuyo lado derecho converge puntualmente a la correspondiente función multivaluada y las soluciones de dicha familia convergen uniformemente a la solución de la ecuación diferencial cuyo lado derecho es la selección de norma mínima. Esto es gracias al teorema mostrado más adelante. Cabe señalar que lo anterior sucede cuando la función multivaluada es semicontinua superiormente, así que verificaremos que el operador de Filippov lo es.

Proposición 2.7. *Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función acotada casi en todas partes. Entonces la función multivaluada que resulta al aplicar el operador de Filippov a la función f es semicontinua superiormente.*

Demostración: Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, dos sucesiones tales que $x_n \to x_0$ y $y_n \to y_0$, con $y_n \in F(x_n)$. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in N(x_0, \epsilon)$ para toda $n > N$. Sea $\epsilon_n = \|x_n - x_0\|$, entonces para toda $n > N$ se cumple que

$$N(x_n, \frac{\epsilon - \epsilon_n}{2}) \subset N(x_0, \epsilon)$$

ya que si $y \in N(x_n, \frac{\epsilon-\epsilon_n}{2})$, se cumple

$$\begin{aligned} \|y - x_0\| \leq \|x_n - x_0\| + \|x_n - y\| &\leq \|x_n - x_0\| + \frac{\epsilon - \epsilon_n}{2} \\ &= \|x_n - x_0\| + \frac{\epsilon - \|x_n - x_0\|}{2} \\ &= \frac{\|x_n - x_0\| + \epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$f(N(x_n, \frac{\epsilon - \epsilon_n}{2}) \setminus D) \subset f(N(\epsilon, x_0) \setminus D).$$

Por lo tanto, a esta inclusión se le calcula la envolvente convexa y después la cerradura.

$$y_n \in \overline{co(f(N(x_n, \frac{\epsilon - \epsilon_n}{2}) \setminus D))} \subset \overline{co(f(N(\epsilon, x_0) \setminus D))}.$$

Ya que por hipótesis $y_n \in F(x_n)$. Luego la última contención es válida para toda $n > N$, por lo tanto $y_0 \in F(x_0)$, y aplicando el lema 1.28 se tiene lo deseado.
□

Algo que podríamos cuestionarnos es lo siguiente:
Si tenemos una función con un número finito de discontinuidades, removibles, ¿ existirá alguna relación entre el operador de Filippov aplicado a esta función y el operador de Filippov aplicado a la nueva función que se ha hecho continua?. De hecho los operadores son los mismos, como se muestra en seguida.

Proposición 2.8. *Sea $\tilde{f}\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función con discontinuidades removibles $D = \{x_1, x_2, ...x_k\}$. Definamos*

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & si \quad x \neq x_i \\ \lim_{x \to x_i} \tilde{f}(x) & si \quad x = x_i. \end{cases}$$

Entonces $\tilde{F}(x) = F(x)$ para cada $x \in A$. En donde , $\tilde{F}$ y F, son los operadores de Filippov de $\tilde{f}$ y f respectivamente.

Demostración: Es claro que si $x \in A \backslash D$, entonces $\tilde{f}(x) = f(x)$. Puesto que f es continua en A,

$$F(x) = \{f(x)\} = \{\tilde{f}(x)\} = \tilde{F}(x).$$

Ahora bien, tomemos $x_i \in D$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios, entonces

$$\tilde{f}(N(x_i, \epsilon) \setminus D) = f(N(x_i, \epsilon) \setminus D)$$

por lo que, para todo $x_i \in D$

$$\tilde{F}(x_i) = F(x_i).$$

En consecuencia $\tilde{F}(x) = F(x)$ para todo $x \in A$.
□

Para finalizar con este método, veamos los siguientes resultados.

2.3. Teorema de la selección aproximada

Para funciones multivaluadas semicontinuas superiormente, el siguiente teorema propone una construcción de funciones continuas, bajo ciertas condiciones que aproximan una selección para la función multivaluada.

Teorema 2.9. *(Teorema de la selección aproximada).*
Sea $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una función multivaluada semicontinua superiormente, tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $F(x)$ es un subconjunto convexo. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un mapeo localmente Lipschitz $\boldsymbol{f}_\epsilon\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que su imagen está contenida en la envolvente convexa de la imagen de F y

$$graf(\boldsymbol{f}_\epsilon) \subset N(graf(F), \epsilon).$$

Si además para cada $x \in \mathbb{R}^n$ la selección de norma mínima $m(F(x))$ es localmente compacta (respectivamente localmente acotada). Entonces la familia $\{\boldsymbol{f}_\epsilon\}$ es localmente equicompacta(respectivamente localmente equiacotada).

Demostración: Fijemos $\epsilon > 0$. Como $F(x)$ es semicontinua superiormente, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe $\delta(x) > 0$ tal que para cualquier $y \in N(x, \delta(x))$, se tiene que $F(y) \subset F(x) + N(0, \epsilon/2)$ con $\delta(x) < \epsilon/2$.

Claramente la familia de bolas $\{N(x, \delta(x)/4)\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ es una cubierta abierta para $\mathbb{R}^n$. Sea $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ un refinamiento localmente finito para esta cubierta y $\{p_i(\cdot)\}_{i \in I}$ una partición de la unidad subordinada al mismo. Luego para cada $i \in I$ seleccionamos un elemento $y_i \in \Omega_i$. Definamos

$$\mathbf{f}_\epsilon(x) := \sum_{i \in I} p_i(x) m(F(y_i)).$$

Por ser $F(y_i)$ convexo, entonces $m(F(y_i)) \in \mathbb{R}^n$ consta de un solo elemento. Por otro, lado tenemos una suma finita de funciones localmente Lipschitz, así que $\mathbf{f}_\epsilon$ es localmente Lipschitz. También es claro que la imagen de $\mathbf{f}_\epsilon$ está contenida en la envolvente convexa de la imagen de F.

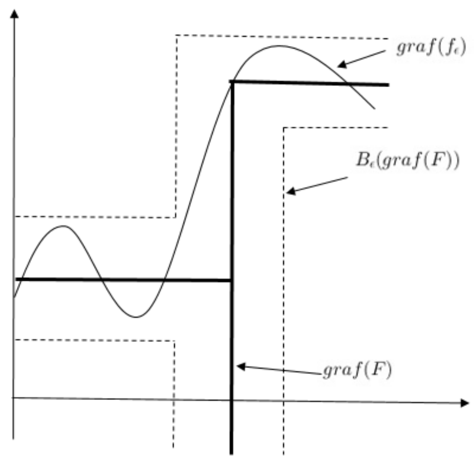

FIGURA 3. Aproximación de selección para la función multivaluada F

Para x fijo, definamos $I(x) = \{i \in I : p_i(x) > 0\}$ que es un conjunto finito. Por la definición de refinamiento, para cada $i \in I(x)$ existe $x_i \in X$ tal que

$$\Omega_i \subset N(x_i, \delta(x_i)/4), \;\; i \in I(x), \tag{13}$$

En vista de que el conjunto $I(x)$ es un conjunto finito, sea $j \in I(x)$ tal que $\delta(x_j) = max\,\{\delta(x_i) : i \in I(x)\}$. Por la definición de partición de la unidad, es claro que $x \in \Omega_i \subset N(x_i, \delta(x_i)/4)$ para cada $i \in I(x)$. Así para cualquier $i \in I(x)$ se tiene

$$\|x_i - x_j\| \leq \|x_i - x\| + \|x_j - x\| < \delta(x_i)/4 + \delta(x_j)/4 < \delta(x_j)/2,$$

es decir, $x_i \in N(x_j, \delta(x_j)/2)$. Luego, usando (13) y una vez más la desigualdad del triángulo, se obtiene $\Omega_i \subset N(x_j, \delta(x_j))$. Por lo tanto, para cada $i \in I(x)$,

$$m(F(y_i)) \in F(\Omega_i) \subset F(N(x_j, \delta(x_j))) \subset F(x_j) + N(0, \epsilon/2).$$

Como el último conjunto es convexo, y la definición de $\mathbf{f}_\epsilon$ implica que $\mathbf{f}_\epsilon(x) \in F(x_j) + N(0, \epsilon/2)$. Así, existe $x_j^* \in F(x_j)$ tal que $\|\mathbf{f}_\epsilon(x) - x_j^*\| < \epsilon/2$. En consecuencia

$$\|(x, \mathbf{f}_\epsilon(x)) - (x_j, x_j^*)\| < \|x - x_j\| + \|\mathbf{f}_\epsilon(x) - x_j^*\| < \epsilon,$$

ya que $(x_j, x_j^*) \in graf(F)$ y la desigualdad anterior implica que

$$graf(f_\epsilon) \subset graf(F) + N(0, \epsilon).$$

Donde $N(0, \epsilon)$, es la bola en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Para probar que la familia $\{f_\epsilon\}$ es equicompacta(respectivamente equiacotada), fijemos $x \in \mathbb{R}^n$. Por hipótesis m es localmente compacta (respectivamente localmente acotada), entonces existe $\zeta > 0$ y un conjunto convexo compacto (respectivamente acotado) K, tal que para cada $y \in N(x, \zeta)$ se tiene que $m(F(y)) \in K$. Véase la definición 1.19.

De la definición 1.20, sea $\epsilon_0 = \zeta/4$ y $U_x = \bigcap_{i \in I(x)} \Omega_i$. Para $\epsilon < \epsilon_0$, y para cada $i \in I(x)$ la construcción anterior muestra

$$\begin{aligned} U_x \subset \Omega_i &\subset N(x_i, \delta(x_i)/4) \\ &\subset N(x_j, \delta(x_j)) \\ &\subset N(x_j, \epsilon/2) \\ &\subset N(x_j, \zeta/8). \end{aligned}$$

Por otro lado, $N(x_j, \zeta/8) \subset N(x, \zeta)$. En efecto, sea $z \in N(x_j, \zeta/8)$, entonces

$$\begin{aligned} \|z - x\| = \|z - x_j\| + \|x_j - x\| &< \zeta/8 + \delta(x_j) \\ &< \zeta/8 + \epsilon/2 \\ &< \zeta, \end{aligned}$$

por lo que $U_x \subset N(x, \zeta)$. Así, para cualquier $z \in U_x$, se tiene que $f_\epsilon(z)$, es combinación convexa de imágenes $m(F)$ de puntos en U_x. Estas imágenes están en K y por lo tanto su combinación convexa $f_\epsilon(z)$.

□

2.4. Teorema de existencia de soluciones para inclusiones diferenciales

Antes de enunciar el teorema de existencia de soluciones para inclusiones diferenciales, vamos a demostrar el siguiente lema.

Lema 2.10. *Sea $f\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ una función integrable. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto convexo, tal que $f(t) \in K$ para todo $t \in [0,T]$. Entonces*

$$\int_0^T f(t)dt \in TK.$$

Demostración: Sea $\pi = \{t_0 = 0, t_1, ..., t_n = T\}$ una partición del intervalo $[0,T]$. Dado que $f(t) \in K$ para todo $t \in [0,T]$, entonces $\sum_{i=1}^n f(t_i)\frac{(t_i - t_{i-1})}{T}$ es un elemento de la envolvente convexa de K. Y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)(t_i - t_{i-1}) = T\sum_{i=1}^n f(t_i)\frac{(t_i - t_{i-1})}{T} \in Tco(K) = TK.$$

Por último haciendo tender a n al infinito y usando que K es compacto

$$\int_0^T f(t)dt \in TK.$$

□

Teorema 2.11. *(Existencia de soluciones para inclusiones diferenciales)*
Sea $F\colon U \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una función multivaluada semicontinua superiormente en U, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto que contiene a x_0, y $F(x)$ es un subconjunto cerrado convexo en $\mathbb{R}^n$, para cada $x \in U$. Si además para cada $x \in U$ la selección de norma mínima $m(F(x))$ es localmente compacta. Entonces existe $T > 0$ y una función absolutamente continua $x(\cdot)$ definida en $[0,T]$, la cual es una solución a la inclusión diferencial (6)*.*

Demostración: Como $m(F)$ es localmente compacta, existe un subconjunto compacto convexo K y escalares $a, b > 0$ tales que

$$D = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times U : |t| < a, \|x - x_0\| < b\} \subset \mathbb{R} \times U$$

y $m(F(x)) \in K$ para todo $x \in U$. Sea $T = min\{a, b/\|K\|\}$, donde

$$\|K\| = sup\{\|x\| : x \in K\}.$$

Por otro lado, por el teorema 2.9 existe una familia de funciones $f_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz que aproximan a una selección para F. Consideremos la familia de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$x_k' = f_k(x_k) \qquad x_k(0) = x_0, \tag{14}$$

cuyas soluciones existen por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias. Sean $x_k \colon [0,T] \to U$, dichas soluciones. Usando nuevamente el teorema se selección aproximada, resulta que $\{f_k(x_k)\}$ es equicompacta. Es decir, para cada $(t, x_k) \in D$, existe una vecindad $N(x_k)$ de x_k tal que $t \times N(x_k) \subset D$ y $f_k(N(x_k)) \subset K$, en consecuencia $f_k(x_k) \in K$, y por lo tanto $\|f_k(x_k)\| \leq \|K\|$. Además cada $x_k(t)$ toma valores en el conjunto compacto $x_0 + TK$. Probemos este hecho. Dado que $f_k(x_k(t)) \in K$, por el lema 2.10, se tiene

$$\int_0^T f_k(x_k(t))dt \in TK$$

y por lo tanto

$$x_0 + \int_0^T f_k(x_k(t))dt \in x_0 + TK.$$

Por último, usando el teorema de Arzelá-Ascoli existe una subsucesión $\left\{x_{k_j}(t)\right\}$ de $\{x_k(t)\}$ tal que $x_{k_j}(t)$ converge uniformemente a $x(t)$ y $x_{k_j}'(t)$ converge puntualmente a $x'(t)$ en $[0,T]$. Además, es claro que $\|K\| \in L^1[0,T]$,y como esta norma domina a la norma de $x_k'(t)$, aplicando en Teorema de Lebesgue de la convergencia dominada (Véase por ejemplo [**11**]), se tiene que

$$\|x_{k_j}'(t) - x'(t)\|_{L^1} \to 0$$

y por lo tanto $x_{k_j}'(t) \to x'(t)$ débilmente.
Luego, como $f_k(x_k)$ es una aproximación para una selección de F, se tiene que

$$d((x_{k_j}(t), x_{k_j}'(t)), graf(F)) = d((x_{k_j}(t), f_{k_j}(x_{k_j}(t))), graf(F)) \to 0$$

y aplicando el teorema 1 de [**18**] de la página 60 , implica que $x'(t) \in F(x(t))$ para casi todo $t \in [0,T]$.
□

2.5. Ejemplo

Ejemplo 2.12. *Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y consideremos el problema de valor inicial*

$$x' = f(x), \qquad x(0) = (x_0, y_0)$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} -y & si \quad \|x\| < a \\ by & si \quad \|x\| = a \\ y & si \quad \|x\| > a. \end{cases}$$

Aquí $y \in \mathbb{R}^2$ y $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes. Denotemos $S^a = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = a\}$.

Claramente f es discontinua en S^a y continua en cualquier otro caso. Sea $x \in \mathbb{R}^2$. Si $\|x\| < a$ entonces $F(x) = \{f(x)\} = \{-y\}$. De igual forma si $\|x\| > a$ entonces $F(x) = \{y\}$. Luego si $\|x\| = 0$ entonces

$$f(N(0,\epsilon) \setminus \{S^a\}) = \{-y, y\},$$

tomando la envolvente convexa se tiene

$$co(f(N(0,\epsilon) \setminus \{S^a\})) = [-y, y]\,,$$

es decir,

$$F(x) = [-y, y]\,.$$

En este caso $[-y, y]$ es el segmento de recta que va desde $-y$ hasta y. En resumen

$$F(x) = \begin{cases} \{-y\} & si \quad \|x\| < a \\ [-y, y] & si \quad \|x\| = a \\ \{y\} & si \quad \|x\| > a \end{cases}$$

aplicando la selección de norma mínima se tiene

$$m(F(x)) = \begin{cases} -y & si \quad \|x\| < a \\ 0 & si \quad \|x\| = a \\ y & si \quad \|x\| > a. \end{cases}$$

Puesto que $f(x)$ es acotada, de la proposición 2.7 se tiene que $F(x)$ es semicontinua superiormente. Por otro lado m es localmente compacta, pues si $U(x)$ es una vecindad cualquiera de x, entonces $m(F(U(x))) \in \{\{-y\}, \{y\}, \{-y, 0, y\}\}$, es decir, $m(F(U(x)))$ es compacto. El teorema 2.11 garantiza la existencia de soluciones para la inclusión diferencial

$$x' \in F(x) \qquad x(0) = (x_0, y_0).$$

Capítulo 3

Flujos generalizados

Motivados en las soluciones de la inclusión diferencial (6), podemos hablar de flujos o semiflujos generalizados. Que como ya se ha señalado antes, es una generalización de los sistemas semidinámicos.
Sea X un espacio métrico completo, con métrica μ.

Definición 3.1. *La función multivaluada $G\colon \mathbb{R} \times X \to \mathcal{P}(X)$ se llama un flujo multivaluado si satisface las siguientes propiedades:*
a) $G(0, \cdot) = I$, en donde I es la función identidad.
b) $G(t_1 + t_2, x) \subset G(t_1, G(t_2, x))$ para cualquier $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ y cada $x \in X$,
donde $G(t, B) = \bigcup_{x \in B} G(t, x)$, $B \subset X$.

La función multivaluada $G\colon \mathbb{R}^+ \times X \to \mathcal{P}(X)$ se llama un semiflujo si las condiciones a) y b) se cumplen para cada $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$.

Definición 3.2. *La función $x\colon \mathbb{R}^+ \to X$ es una trayectoria del semiflujo G correspondiente a la condición inicial $x_0 \in X$, si $x(t_1 + t_2) \subset G(t_1, x(t_2))$ para cada $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ y $x(0) = x_0$.*

Denotemos por $\mathcal{D}(x_0)$ al conjunto de todas las trayectorias correspondientes a x_0. Para $A, B \subset X$, la distancia del conjunto A al conjunto B se define con la métrica de Hausdorff,

$$d(A, B) = sup_{x \in A} dist(x, B)$$

en donde

$$dist(x, A) = inf_{a \in A} \mu(x, a).$$

3.1. Conjunto asintóticamente superior y atracción

En esta sección trataremos el concepto de conjunto asintóticamente superior y conjuntos de atracción para un semiflujo multivaluado.

El concepto de conjunto atrayente será de suma importancia en lo que resta de este capítulo, el cual garantiza que todas las órbitas que empiezan en un cierto conjunto B, se acercan a otro conjunto A. En este caso se dice que A atrae a B.

Definición 3.3. *Sean A y B subconjuntos de X. Diremos que A atrae a B por medio del semiflujo G si*

$$d(G(t, B), A) \to 0 \ \ (t \to \infty),$$

o de manera equivalente, para todo $\epsilon > 0$ existe un tiempo $T = T(B, \epsilon)$ tal que

$$G(t, x) \subset N(A, \epsilon), \quad (\forall t \geq T), \quad (x \in B).$$

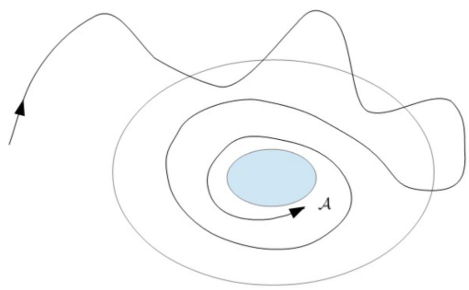

FIGURA 1. Figura de un conjunto atrayente

El conjunto $A \subset X$, se dice un atrayente para el semiflujo G, si atrae a cada conjunto acotado $B \subset X$.

Definición 3.4. *El conjunto M es llamado negativamente semi-invariante si $M \subset G(t, M)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Es llamado invariante si $M = G(t, M)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.*

Los conjuntos invariantes son de suma importancia, ya que dentro de ellos tenemos definidas órbitas para todo tiempo, es decir, que tanto para tiempos pequeños como para tiempos que tienden a infinito, las órbitas siguen estando dentro. En consecuencia, la dinámica del semiflujo está dentro del conjunto invariante.

Lema 3.5. *Sea M un conjunto acotado negativamente semi-invariante con respecto al semiflujo G, que tiene un conjunto atrayente A. Entonces $M \subset \overline{A}$.*

Demostración: Como A es un conjunto atrayente y M es acotado, existe $\epsilon > 0$ y $T_M \in \mathbb{R}^+$ tal que $G(t, M) \subset N(A, \epsilon)$ para todo $t \geq T_M$, en consecuencia

$$M \subset G(t, M) \subset B(A, \epsilon) \;\; (\forall t \geq T_M)$$

ya que M es negativamente semi-invariante. Luego ϵ es arbitrario, y por lo tanto $M \subset \overline{A}$. $\square$

Antes de dar la definición de ω-límite, como es costumbre para sistemas dinámicos, se define las órbitas y semi-órbitas. En nuestro caso solo trabajaremos con las órbitas positivas.

Sea $M \subset X$, denotemos por

$$\gamma_t^+(M) = \bigcup_{\tau \geq t} G(\tau, M) \quad y \quad \gamma^+(M) = \gamma_0^+(M)$$

Definición 3.6. *El semiflujo G es llamado asintóticamente semicompacto superior, si para cada conjunto acotado $M \subset X$, tal que para algún $T_M \in \mathbb{R}^+$, $\gamma_{T_M}^+(M)$ es acotado, de esta forma cada sucesión $\xi_n \in G(t_n, M)$ con $t_n \to \infty$ es precompacta en X.*

3.2. Conjuntos ω-límite

Como se mencionó antes, el ω-límite de un conjunto juega un papel muy importante a la hora de garantizar la existencia de atractores globales para el semiflujo G, el cual nos proporciona una importante información sobre la estructura del atractor que veremos más adelante.

Definición 3.7. *Dado un conjunto $B \subset X$, se define el ω-límite de este conjunto como*

$$\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

Lema 3.8. *El conjunto $\omega(B)$ consiste de todos los límites de sucesiones convergentes $\psi_n \in G(t_n, B)$ con $t_n \to \infty$.*

Demostración: Es claro que $\overline{\gamma_{t_1}^+(B)} \subset \overline{\gamma_{t_2}^+(B)}$ si $t_1 \geq t_2$.
Por [**20**] página 18 se tiene

$$\lim_{t \to \infty} \overline{\gamma_t^+(B)} = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)} = \omega(B).$$

□

Teorema 3.9. *Sea $G\colon \mathbb{R}^+ \times X \to \mathcal{P}(X)$ un semiflujo asintóticamente semicompacto superior.*

1) *Si para cada conjunto acotado $B \subset X$, tal que para algún $T_B \in \mathbb{R}^+$, $\gamma_{T_B}^+(B)$ es acotado. Entonces $\omega(B) \neq \emptyset$ y es compacto en X.*

2) *Si además, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $G(t, \cdot)\colon X \to \mathcal{P}(X)$ es semicontinua superiormente, con valores cerrados. Entonces $\omega(B)$ es negativamente semi-invariante y es el cerrado más pequeño que atrae a B.*

3) *Más aún, si $\omega(B)$ atrae a algún conjunto conexo acotado $B_1 \supset \omega(B)$ y $G(t, x)$ es conexo, $\forall t \geq t_0$, y $\forall x \in X$. Entonces $\omega(B)$ es conexo.*

Demostración: 1) Sea B un conjunto acotado tal que para algún $T_B \in \mathbb{R}^+$, $\gamma_{T_B}^+(B)$ es acotado.
Luego, de la definición de ω-límite se sigue que $\omega(B)$ es acotado y cerrado.

Veamos que no es vacío. Sea $x_n \in G(t_n, B)$ y $t_n \to \infty$ una sucesión arbitraria. Esta sucesión es precompacta en X ya que G es asintóticamente semicompacto superior, por el lema 3.8 $\omega(B) \neq \emptyset$.

Para ver que es compacto, veamos que cada sucesión $\{v_n\} \subset \omega(B)$ tiene una subsucesión convergente. En este caso se tiene que existe una sucesión $u_n \in G(t_n, B)$, con $t_n \to \infty$, tal que $\mu(v_n, u_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Al ser G asintóticamente semicompacto superior, podemos tomar una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$, tal que $\{u_{n_k}\} \to u_0$ cuando $k \to \infty$ y por el lema 3.8 $u_0 \in \omega(B)$, además $\mu(v_{n_k}, u_{n_k}) \to 0$, cuando $k \to \infty$. Así existe una subsucesión $\{v_{n_k}\}$ de $\{v_n\}$ convergente, de hecho $v_{n_k} \to u_0$ cuando $k \to \infty$, por lo que $\omega(B)$ es compacto.

2) Para probar que $\omega(B)$ es negativamente semi-invariante, sea $y \in \omega(B)$, entonces existe una sucesión $y_n \in G(t_n, B)$ tal que, $y_n \to y$ cuando $t_n \to \infty$. Para $t_n \geq t$ se tiene

$$G(t_n, B) \subset G(t, G(t_n - t, B))$$

y así,

$$y_n \in G(t, z_n) \quad con \quad z_n \in G(t_n - t, B).$$

Como G es asintóticamente semicompacto superior y $t_n - t \to \infty$ cuando $n \to \infty$, existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ de $\{z_n\}$ tal que, $z_{n_k} \to z \in \omega(B)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existen sucesiones $y_n \to y$ y $z_n \to z$ en X.

Como $G(t, \cdot)$ es semicontinua superiormente con valores cerrados, y $\omega(B)$ es cerrado por definición, se tiene que $G(t, \omega(B))$ es cerrado (ver página 42 de la referencia [**18**]). Por lo que $y \in G(t, \omega(B))$, y como t fue tomado de manera arbitraria se tiene

$$\omega(B) \subset G(t, \omega(B)) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Probemos que $\omega(B)$ atrae a B. Supongamos que no es así, entonces podemos encontrar una sucesión de puntos $y_n \in G(t_n, B)$ con $t_n \to \infty$, tal que $dist(y_n, \omega(B)) > \epsilon$, para algún $\epsilon > 0$. Como G es asintóticamente semicompacto superior, entonces existe una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ se $\{y_n\}$, tal que $y_{n_k} \to y \in \omega(B)$, lo cual es una contradicción. Esto prueba que $\omega(B)$ atrae a B.

Solo falta ver que es el cerrado más pequeño con esta característica. Demostremos esto también por contradicción. Es decir, supongamos que existe un conjunto F cerrado que atrae a B, y $\omega(B) \not\subset F$. Entonces existe $x \in \omega(B)$, tal que $x \notin F$ y bolas $N(x, \epsilon), N(F, \epsilon)$, tales que

$$N(x, \epsilon) \cap N(F, \epsilon) \neq \emptyset$$

por otro lado, por el lema 3.8, existe una sucesión $y_n \in G(t_n, B)$, con $t_n \to \infty$, tal que $y_n \to x$. Luego, como F atrae a B existe $T_B \in \mathbb{R}^+$, tal que $\forall t \geq T_B$, $y_n \in F$, lo cual no es posible. Por lo tanto $\omega(B) \subset F$.

3) Supongamos que $\omega(B)$ atrae a un conjunto conexo $B_1 \supset \omega(B)$ y que $\omega(B)$ no es conexo. Entonces, podemos encontrar conjuntos cerrados disjuntos ω_1 y ω_2, tales que $\omega(B) = \omega_1 \cup \omega_2$. Tomemos $\epsilon > 0$, tan pequeño como se quiera, tal que

$$N(\omega_1, \epsilon) \cap N(\omega_2, \epsilon) \neq \emptyset$$

luego $N(\omega_1, \epsilon) \cup N(\omega_2, \epsilon)$ es una vecindad de $\omega(B)$, como $\omega(B)$ atrae a B_1 existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que,

$$G(t, B_1) \subset N(\omega(B), \epsilon), \quad \forall t \geq t_0.$$

En vista de que $G(t, \cdot)$ es semicontinua superiormente con valores conexos, manda conjuntos conexos en conjuntos conexos (ver el teorema 1.31), y así $G(t_0, B_1)$ es conexo, y por lo tanto, $G(t_0, B_1)$ está contenido solamente en alguno de los conjuntos $N(\omega_i, \epsilon)$ para algún $i = 1, 2$. Por 2) $\omega(B)$ es negativamente semi-invariante y por lo tanto

$$\omega(B) \subset G(t_0, \omega(B)) \subset G(t_0, B_1),$$

lo cual es una contradicción, ya que $\omega(B)$ no es conexo. Por lo tanto $\omega(B)$ es conexo.
□

Note que 2) del teorema precedente sigue siendo válido, si en lugar de tener un semiflujo G semicontinuo superiormente, se tiene un semiflujo con gráfica cerrada.

Lema 3.10. *Sea* $G\colon \mathbb{R}^+ \times X \to \mathcal{P}(X)$ *un semiflujo asintóticamente semicompacto superior. Supongamos que se cumple* 1) *del Teorema 3.9. Si además, la gráfica del semiflujo* G *es cerrada, entonces* $\omega(B)$ *es negativamente semi-invariante.*

Demostración: Sea $y \in \omega(B)$, con el mismo razonamiento de antes podemos suponer sin pérdida de generalidad, que existen sucesiones

$$y_n \in G(t, \zeta_n), \quad \zeta_n \in G(t_n - t, B) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

tales que

$$y_n \to y, \quad \zeta_n \to \zeta, \quad con \quad y, \zeta \in \omega(B).$$

Es claro que $(\zeta_n, y_n) \in graf(G(t,\cdot))$. Puesto que G tiene gráfica cerrada, resulta que

$$(\zeta, y) \in graf(G(t,\cdot)),$$

es decir, $y \in G(t,\zeta) \subset G(t, \omega(B)$, por lo que

$$\omega(B) \subset G(t, \omega(B)) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

□

Veamos algunos resultados para ver cuándo un semiflujo G es semicompacto asintóticamente superior. Antes de dar estos resultados, definamos un semiflujo compacto.

Definición 3.11. *Sea* $G(t,\cdot)\colon X \to \mathcal{P}(X)$ *un semiflujo multivaluado. Decimos que* G *es compacto si existe* $t_0 \in \mathbb{R}^+$ *tal que para todo conjunto acotado* $B \subset X$, $G(t_0, B)$ *es precompacto en* X.

Proposición 3.12. *Sea* $G(t,\cdot)\colon X \to \mathcal{P}(X)$ *un semiflujo compacto para algún* t_0. *Entonces el semiflujo* G *es asintóticamente semicompacto superior.*

Demostración: Sea B un conjunto acotado, de tal manera que $\gamma^+_{T_B}(B)$ es acotado para algún $T_B \in \mathbb{R}^+$. Sea $y_n \in G(t_n, B)$, con $t_n \to \infty$, una sucesión arbitraria. Es claro que

$$\gamma^+_{t_1}(B) \subset \gamma^+_{t_2}(B) \quad si \quad t_1 \geq t_2$$

en consecuencia $\gamma^+_\tau(B)$ es acotado para todo $\tau \geq T_B$, usando las propiedades de semiflujo se tiene

$$\gamma^+_{t_0+\tau}(B) = \bigcup_{s\geq\tau} G(s + t_0, B) \subset \bigcup_{s\geq\tau} G(t_0, G(s, B)) = G(t_0, \gamma^+_\tau(B)).$$

En la última igualdad se uso simplemente las propiedades para funciones (Ver página 36, de la referencia [**20**]). Ya que $\gamma^+_\tau(B)$ es acotado, si $\tau \geq T_B$ se tiene que $G(t_0, \gamma^+_\tau(B))$ es precompacto en X, y como $\gamma^+_{t_0+\tau}(B) \subset G(t_0, \gamma^+_\tau(B))$ y usando el teorema 1.7 también es precompacto. En consecuencia, para cada n tal que $t_n \geq \tau + t_0$

$$y_n \in G(t_n, B) \subset G(\tau + t_0, B) \subset \bigcup_{s\geq\tau+t_0} G(s, B) = \gamma^+_{t_0+\tau}(B),$$

es decir, $y_n \in \gamma^+_{t_0+\tau}(B)$ que es precompacto. Por lo que a y_n se le puede extraer una subsucesión convergente.

□

Lema 3.13. *Sea $G(t,\cdot)\colon X \to \mathcal{P}(X)$ un semiflujo semicontinuo superiormente con valores compactos para cada $t \in \mathbb{R}^+$. Si para algún $t_0 \in \mathbb{R}^+$ el mapeo $G(t_0,\cdot)$ es compacto, entonces el mapeo $G(t_0+t,\cdot)$ también en compacto para cada $t \in \mathbb{R}^+$.*

Demostración: Sea $B \subset X$ un conjunto acotado. Como $G(t_0,B)$ es precompacto, entonces $\overline{G(t_0,B)}$ es compacto (ver teorema 1.10). Dado $t \in \mathbb{R}^+$, es claro que

$$G(t_0+t,B) \subset G(t,G(t_0,B)) \subset G(t,\overline{G(t_0,B)}).$$

Como $G(t,\cdot)$ es semicontinua superiormente con valores compactos, entonces $G(t,\overline{G(t_0,B)})$ es compacto en X(ver el teorema 1.30). Por otro lado, por el teorema 1.7, $G(t_0+t,B)$ es precompacto para cada $t \in \mathbb{R}^+$.
$\square$

Otro de los resultados que nos permite garantizar cuándo un semiflujo G es asintóticamente superior, es el hecho que podamos descomponer al semiflujo G con ciertas características.

Proposición 3.14. *Sea X un espacio de Banach, y sea $G(t,\cdot)\colon X \to \mathcal{P}(X)$ un semiflujo multivaluado. Supongamos que $G(t,\cdot)$ se puede descomponer de la forma $G(t,\cdot) = W(t,\cdot)+ U(t,\cdot)$ donde:*

1. *$W(t,\cdot)\colon X \to \mathcal{P}(X)$ es una contracción sobre conjuntos acotados, es decir, para cada conjunto acotado $B \subset X$*

$$dist(W(t,x),W(t,y)) \leq m_1(t)m_2(\|x-y\|), \quad \forall x,y \in B, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

con $m_2\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continua y creciente, y $\lim_{t\to\infty} m_1(t) = 0$.

2. *$U(t,\cdot)\colon X \to \mathcal{P}(X)$ es un semiflujo semicontinuo superiormente con valores compactos, tal que para algún $t_0 \in \mathbb{R}^+$ el semiflujo $G(t_o,\cdot)$ es compacto.*

Entonces, el semiflujo G es asintóticamente semicompacto superior.

Demostración: Sea $B \subset X$ un conjunto acotado, tal que $\gamma^+_{T_B}(B)$ es acotado para algún $T_B \in \mathbb{R}^+$. Consideremos una sucesión arbitraria

$$N = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in G(t_n,B), \quad t_n \to \infty,$$

dado $\epsilon > 0$, tomemos $t_1 = t_1(\epsilon) \leq t_0$, tal que

$$m_1(t_1) \leq \frac{\epsilon}{2m_2(diam(\gamma^+_{T_B}(B)))},$$

esto se puede hacer ya que $m_1(t)$ tiende a cero cuando el tiempo va a infinito. Descompongamos a N como $N = N_1 \cup N_2$, donde

$$N_1 = \{y_n\}_{n=1}^{n_1}, \quad para \quad t_n < t_1 + T_B$$

y

$$N_2 = \{y_n\}_{n=n_1}^{\infty}, \quad para \quad t_n \geq t_1 + T_B.$$

Por otro lado, observe que

$$\gamma^+_{t_1+T_B}(B) = \bigcup_{s\geq t_B} G(s+t_1,B) \subset \bigcup_{s\geq t_B} G(t_1,G(s,B)) = G(t_1,\gamma^+_{T_B}(B))$$

pero precisamente

$$N_2 \subset \gamma^+_{t_1+T_B}(B),$$

por lo tanto

$$N_2 \subset G(t_1, \gamma^+_{T_B}(B)).$$

Por otro lado, por el lema 3.13 $U(t_1, \gamma^+_{T_B}(B))$ es precompacto, y por lo tanto relativamente compacto, y entonces podemos cubrirlo con una $\frac{\epsilon}{2}$- maya finita. Usando la desigualdad de la parte 1

$$\begin{aligned} dist(W(t_1,u), W(t_1,v)) &\leq m_1(t_1)m_2(\|u-v\|),\ \forall u,v \in \gamma^+_{T_B}(B),\ \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ &\leq \frac{\epsilon}{2m_2(diam(\gamma^+_{T_B}(B)))} m_2(diam(\gamma^+_{T_B}(B))) = \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

y usando la descomposición de G, se tiene que

$$N_2 \subset G(t_1, \gamma^+_{T_B}(B)) = U(t_1, \gamma^+_{T_B}(B)) + W(t_1, \gamma^+_{T_B}(B))$$

por lo que N_2 se puede cubrir con una ϵ-maya finita, y por lo tanto, también a N_1. Y en consecuencia N es precompacto.
□

Claramente si el semiflujo G satisface la parte 1 de esta proposición, resulta que el semiflujo es asintóticamente semicompacto superior.

Corolario 3.15. *Sea X un espacio métrico completo, y sea $G(t,\cdot)\colon X \to \mathcal{P}(X)$ un semiflujo multivaluado que satisface la propiedad 1 de la proposición 3.14. Entonces el semiflujo G es asintóticamente semicompacto superior.*

3.3. Flujos disipativos y puntualmente disipativos

Es importante tener acotaciones globales de las soluciones para definirlas globalmente en el tiempo. Motivados en estas cotas vamos a definir lo que es un semiflujo disipativo, pero antes dos definiciones, una puntual y otra conjuntista.

Definición 3.16. *Diremos que el semiflujo G es disipativo puntual si existe un conjunto acotado $B_0 \subset X$, que atrae a cada $x \in X$.*

Definición 3.17. *Diremos que el semiflujo G es disipativo si existe un conjunto acotado $B_0 \subset X$ tal que para cada conjunto acotado $B \subset X$, existe $T_B \in \mathbb{R}^+$ tal que $G(t,B) \subset B_0$ para todo $t \geq T_B$.*

Esta definición nos dice que existe una cota común a todas las trayectorias. Es claro que para cada trayectoria existirá un tiempo, para el cual esta trayectoria está en esa cota.

3.4. Atractores globales

Definición 3.18. *Sea* $G\colon \mathbb{R}^+ \times X \to \mathcal{P}(X)$ *un semiflujo multivaluado. Sea* $\mathcal{A} \subset X$*. Diremos que* $\mathcal{A}$ *es un atractor global para el semiflujo* G*, si satisface las siguientes condiciones:*

1) $\mathcal{A}$ *atrae a cada conjunto acotado* $B \subset X$*.*
2) $\mathcal{A}$ *es negativamente semi-invariante.*

Note que en el caso de sistemas semidinámicos se le pide la condición que este conjunto atractor sea un conjunto cerrado y acotado, en nuestro caso no le pedimos estas condiciones ya que en esta teoría pueden existir atractores que no sean acotados.

Lema 3.19. *Sea* $G\colon \mathbb{R}^+ \times X \to \mathcal{P}(X)$ *un semiflujo multivaluado y* $\mathcal{A} \subset X$ *un atractor global.*

a) Si A *es un conjunto acotado negativamente semi-invariante, entonces* $A \subset \overline{\mathcal{A}}$*.*
b) Si $\mathcal{A}$ *es acotado y* A *es un conjunto cerrado que atrae a cada conjunto acotado* $B \subset X$*, entonces* $\mathcal{A} \subset A$*. En consecuencia, si* $\mathcal{A}$ *es cerrado, entonces* $\mathcal{A}$ *es el cerrado más pequeño que atrae a cada conjunto acotado* $B \subset X$*.*

Demostración: *a*) Como A es un conjunto acotado, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $T_A \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$G(t, A) \subset N(\mathcal{A}, \epsilon), \quad \forall t \geq T_A$$

luego, por ser A negativamente semi-invariante

$$A \subset G(t, A) \subset N(\mathcal{A}, \epsilon) \quad \forall t \geq T_A.$$

Y como ϵ es arbitrario, se tiene que $A \subset \overline{\mathcal{A}}$.

b) Como $\mathcal{A}$ es acotado y A es un atrayente para G, para cada $\epsilon > 0$ existe $T_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^+$, tal que

$$G(t, \mathcal{A}) \subset N(A, \epsilon) \quad \forall t \geq T_{\mathcal{A}},$$

por ser $\mathcal{A}$ un atractor global

$$\mathcal{A} \subset G(t, \mathcal{A}) \subset N(A, \epsilon) \quad \forall t \geq T_{\mathcal{A}}.$$

Nuevamente, como ϵ es arbitrario $\mathcal{A} \subset A$.
Es claro que si el atractor $\mathcal{A}$ es cerrado, entonces es el cerrado más pequeño que atrae a cada conjunto acotado $B \subset X$.
□

3.5. Existencia de atractores

Veamos algunos resultados de existencia de atractores globales para un semiflujo multivaluado.

3.5.1. Conjuntos atrayentes compactos

Teorema 3.20. *Sea $G(t,\cdot)\colon X \to \mathcal{P}(X)$ un semiflujo multivaluado semicontinuo superiormente, con valores cerrados para cada $t \in \mathbb{R}^+$. Si existe un conjunto compacto $K \subset X$ tal que para cada conjunto acotado $B \subset X$*

$$dist(G(t,B),K) \to 0, \quad (t \to \infty). \tag{15}$$

Entonces existe un atractor global cerrado $\mathcal{A} \subset K$, y es el cerrado más pequeño que atrae a cada conjunto acotado $B \subset X$.

Demostración: Antes de dar un candidato para ser un atractor, probemos que para cualquier conjunto acotado $B \subset X$, no vacío, el conjunto $\omega(B)$ es no vacío, compacto y negativamente semi-invariante. Y además $\omega(B) \subset K$. Probemos primero esto último.
Sea $B \subset X$ un conjunto acotado. Por (15), y la definición de $\omega(B)$, se tiene que $\omega(B) \subset K$.

Para probar que $\omega(B)$ es no vacío, tomemos una sucesión $y_n \in G(t_n, B)$, con $t_n \to \infty$, nuevamente por (15), existe una sucesión $\zeta_n \in K$, tal que $\mu(y_n, \zeta_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Siendo K un conjunto compacto, a ζ_n le podemos extraer una subsucesión convergente $\zeta_{n_k} \to \zeta_0 \in K$, pero

$$\mu(y_{n_k}, \zeta_0) \leq \mu(y_{n_k}, \zeta_{n_k}) + \mu(\zeta_{n_k}, \zeta_0) \to 0, \ \ (k \to \infty),$$

es decir, $y_{n_k} \to \zeta_0$ cuando $k \to \infty$, pero $y_{n_k} \in G(t_{n_k}, B)$ y $t_{n_k} \to \infty$, por lo que $\zeta_0 \in \omega(B)$, y por lo tanto $\omega(B)$ es no vacío. Luego, como $\omega(B)$ es cerrado y $\omega(B) \subset K$, se tiene que $\omega(B)$ es compacto.

Probemos ahora que $\omega(B)$ es negativamente semi-invariante. Sea $y \in \omega(B)$, entonces existe una sucesión $y_n \in G(t_n, B)$, con $t_n \to \infty$, tal que $y_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Para $t_n \geq t$ se cumple

$$G(t_n, B) \subset G(t, G(t_n - t, B))$$

y entonces

$$y_n \in G(t_n, \zeta_n), \quad con \quad \zeta_n \in G(t_n - t, B),$$

ya que $t_n - t \to \infty$ y usando nuevamente (15)

$$dist(G(t_n - t, B), K) \to \infty, \ \ (t_n \to \infty),$$

entonces, existe una sucesión $x_n \in K$, tal que $\mu(x_n, \zeta_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como K es compacto, a x_n se le puede extraer una subsucesión convergente $x_{n_k} \to x_0 \in \omega(B)$ cuando $k \to \infty$, obviamente $\zeta_{n_k} \to x_0$.
Sin pérdida de generalidad, podemos tomar sucesiones $y_n \to y$ y $\zeta_n \to \zeta \in \omega(B)$ tales que $y_n \in G(t_n, \zeta_n)$. Usando que G es semicontinua superiormente con valores cerrados, se tiene que $y \in G(t, \zeta)$, como y y t fueron tomados de manera arbitraria, resulta que

$$\omega(B) \subset G(t, \omega(B)), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Sea $\mathcal{A} = \omega(K)$, este conjunto es negativamente semi-invariante como se acaba de mostrar. Supongamos que no cumple la propiedad de atrayente, es decir, existe un conjunto acotado $B \subset X$ y $\epsilon > 0$, tales que

$$dist(G(t, B), \mathcal{A}) = 2\epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

En tal caso, existe una sucesión $y_n \in G(t_n, B)$, con $t_n \to \infty$, tal que

$$dist(y_n, \mathcal{A}) \geq \epsilon, \quad \forall t_n \geq T$$

para algún tiempo $T \in \mathbb{R}^+$. Una ves más, usando (15), existe una sucesión $\zeta_n \in K$, tal que $\mu(y_n, \zeta_n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Siendo K compacto, a ζ_n se le puede extraer una subsucesión convergente $\zeta_{n_k} \to \zeta \in K$ cuando $k \to \infty$, es claro que $y_{n_k} \to \zeta$. De esta manera, sin pérdida de generalidad podemos suponer $y_n \to y \in K$, y así

$$y \in \omega(B) \subset \omega(K)$$

lo cual es una contradicción. Esto último prueba que $\mathcal{A} = \omega(K)$ atrae a cada conjunto acotado $B \subset X$. Y por lo tanto es un atractor. Luego $\mathcal{A}$ es cerrado, y nuevamente por el lema 3.19, inciso *b*) se tiene que $\mathcal{A} = \omega(K)$ es el cerrado más pequeño que atrae a cada conjunto acotado $B \subset X$.
□

Note que nuevamente, si al semiflujo G le quitamos la propiedad de ser asintóticamente superior, pero le agregamos la propiedad de tener gráfica cerrada, entonces el teorema 3.20 se sigue cumpliendo.

Una observación más.

Corolario 3.21. *En el teorema 3.20 si el semiflujo es estricto, es decir, para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, y para todo $x \in X$ se cumple que $G(t_1 + t_2, x) = G(t_1, G(t_2, x))$. Entonces el atractor es invariante.*

Demostración: Sabemos que por ser $\mathcal{A}$ un atractor, se tiene que $\mathcal{A} \subset G(t, \mathcal{A})$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Probemos la otra contención. Sea $x \in \mathcal{A}$, entonces

$$G(t, x) \subset G(t, G(\tau, \mathcal{A})) = G(t + \tau, \mathcal{A}) \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R}^+,$$

tomando unión, sobre los $x \in \mathcal{A}$ se tiene

$$\bigcup_{x \in \mathcal{A}} G(t, x) \subset \bigcup_{x \in \mathcal{A}} G(t + \tau, x)$$

entonces

$$G(t, \mathcal{A}) \subset G(t + \tau, \mathcal{A}) \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R}^+.$$

Por otro lado, para cada $\epsilon > 0$, existe $T \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$G(t + \tau, \mathcal{A}) \subset N(\mathcal{A}, \epsilon), \quad \forall t \geq T,$$

y por lo tanto, por ser ϵ arbitrario,

$$G(t, \mathcal{A}) \subset \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

por lo que, $G(t, \mathcal{A}) = \mathcal{A}$, para cada $t \in \mathbb{R}^+$.
□

3.5.2. Semicompacidad superior

Teorema 3.22. *Sea G un semiflujo asintóticamente semicompacto superior. Supongamos que $G(t,\cdot)\colon X \to \mathcal{P}(X)$ es semicontinua superiormente con valores cerrados para cada $t \in \mathbb{R}^+$. Si para cada conjunto acotado $B \subset X$, existe $T_B \in \mathbb{R}^+$ tal que $\gamma^+_{T_B}(B)$ es acotado. Entonces G tiene un atractor global $\mathcal{A}$ definido por*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \text{ acotado}} \omega(B).$$

Demostración: Por el teorema 3.9 parte 2), $\mathcal{A}$ atrae a cada conjunto acotado $B \subset X$. Falta probar que $\mathcal{A}$ es negativamente semi-invariante. Esto es consecuencia directa de que el ω- límite de un conjunto acotado es negativamente semi-invariente. En efecto:
Dado $B \subset X$, un conjunto acotado, como

$$\omega(B) \subset G(t, \omega(B)), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

tomando unión sobre todos los conjuntos acotados

$$\bigcup_{B \text{ acotado}} \omega(B) \subset \bigcup_{B \text{ acotado}} G(t, \omega(B)) \subset G(t, \mathcal{A}), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

y por lo tanto

$$\mathcal{A} \subset G(t, \mathcal{A}), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

□

3.5.3. Disipatividad puntual

Teorema 3.23. *Sea G un semiflujo multivaluado que satisface las siguientes propiedades*

1. *G es puntualmente disipativo y asintóticamente semicompacto superior.*
2. *$G(t,\cdot)\colon X \to \mathcal{P}(X)$ es semicontinua superiormente con valores cerrados $\forall t \in \mathbb{R}^+$.*
3. *Para cada conjunto acotado $B \subset X$, existe $T_B \in \mathbb{R}^+$ tal que $\gamma^+_{T_B}(B)$ es acotado.*

Entonces existe un atractor global $\mathcal{A}$ para el semiflujo G, y es el cerrado más pequeño que atrae a cada conjunto acotado $B \subset X$.

Demostración: Sabemos que por el teorema 3.9, para cualquier conjunto acotado $B \subset X$, $\omega(B)$ es no vacío, compacto, semi-invariante y el cerrado más pequeño que atrae a B.

Como G es puntualmente disipativo, existe un conjunto acotado $B_0 \subset X$ que atrae a cada $x \in X$.
Sean $B_1 = N(B_0, \epsilon_1)$ con $\epsilon_1 > 0$ fijo, y $\mathcal{A} = \omega(B_1)$. Probemos que $\mathcal{A}$ es un atractor global. Como se mencionó antes, $\mathcal{A} = \omega(B_1)$ es negativamente semi-invariante.

Sea $B \subset X$ un conjunto acotado, y $x \in \omega(B_1)$. Es claro que existe $T_x \in \mathbb{R}^+$ tal que $G(T_x, x) \subset B_1$. Por otro lado, G es semicontinua superiormente , entonces existe una vecindad U_x de x tal que $G(T_x, U_x) \subset B_1$.
Es claro que $\bigcup_{x \in \omega(B)} U_x$ es una cubierta abierta de $\omega(B)$ que es compacto, y por lo tanto podemos extraer una subcubierta finita $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$, con $x_i \in \omega(B)$. Luego, para cada $x_i \in \omega(B)$ se cumple que

$$G(t + T_{x_i}, U_{x_i}) \subset G(t, G(T_{x_i}, U_{x_i})) \subset G(t, B_1) \subset N(\omega(B_1), \epsilon_2) \quad \forall t \geq T_{\epsilon_2, B_1}$$

y por lo tanto

$$G(t, \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}) \subset N(\omega(B_1), \epsilon_2) \quad \forall t \geq T_{\epsilon_2, B_1} + T$$

donde $T = max\{T_{x_i}\}$. Además para cualquier $\epsilon > 0$, existe $T_{\epsilon,B} \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$G(t, B) \subset N(\omega(B), \epsilon) \quad \forall t \geq T_{\epsilon,B} \in \mathbb{R}^+$$

y $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ contiene una bola $N(\omega(B), \epsilon_B)$ y en consecuencia

$$G(t, B) \subset N(\omega(B), \epsilon_B) \subset N(\omega(B), \epsilon) \quad \forall t \geq T_{\epsilon_B, B}$$

y por lo tanto

$$G(t, B) \subset N(\omega(B_1), \epsilon_2) \forall t \geq T_{\epsilon_2, B_1} + T + T_{\epsilon_B, B}.$$

Esto último prueba que $\mathcal{A}$ atrae a cada conjunto acotado. Por último, como $\mathcal{A}$ es cerrado, por el lema 3.19 parte *b*), se tiene que $\mathcal{A}$ es el cerrado más pequeño que atrae a cada conjunto acotado $B \subset X$.
□

Como se hizo notar en el teorema 3.9, si al semiflujo G se le quita la propiedad de semicontinuidad superior, pero se le agrega la propiedad de tener gráfica cerrada, resulta que si B es cualquier conjunto acotado, entonces el ω-límite de este conjunto, es negativamente semi-invariante. De modo que este último teorema sigue siendo válido, si al semiflujo se le quita la propiedad de semicontinuidad superior, pero se le agrega la propiedad de tener gráfica cerrada, y además sea un semiflujo estricto, es decir,

$$G(t_1 + t_2, x) = G(t_1, G(t_2, x)) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X.$$

Lema 3.24. *La afirmación del teorema 3.23 sigue siendo válida si el semiflujo $G(t, \cdot) \colon X \to \mathcal{P}(X)$ no es semicontinua superiormente, pero tiene gráfica cerrada y es un semiflujo estricto.*

Demostración: En vista del lema 3.10, para cualquier conjunto acotado $B \subset X$, el conjunto $\omega(B)$ es no vacío, compacto, negativamente semi-invariante y es el cerrado más pequeño que atrae a B.
Como G es puntualmente disipativo, existe un conjunto acotado $B_1 \subset X$ que atrae a cada $x \in X$. Sea $B_0 = N(B_1, \epsilon)$, con $\epsilon > 0$.

Si probamos que $\omega(B) \subset \omega(B_0)$ para cualquier conjunto acotado $B \subset X$, entonces $\mathcal{A} = \omega(B_0)$ es un atractor global. Ya que en este caso

$$G(t, B) \subset N(\omega(B), \epsilon) \subset N(\omega(B_0), \epsilon) \quad \forall t \geq T$$

para algún tiempo $T \in \mathbb{R}^+$. De esta manera, resulta que $\mathcal{A} = \omega(B_0)$ atrae a cada conjunto acotado, y por lo tanto es un atractor global.
Procedamos a demostrar esta contención. Supongamos que no es así, es decir, que existe $y \in \omega(B)$ tal que $y \notin \omega(B_0)$. Luego, existe $y_n \in G(t_n, B)$ con $t_n \to \infty$ tal que $y_n \to y$, como

$$G(t_n, B) \subset G(\frac{t_n}{2}, G(\frac{t_n}{2}, B))$$

entonces, existe una sucesión $\zeta_n \in G(\frac{t_n}{2}, B)$ tal que $y_n \in G(\frac{t_n}{2}, \zeta_n)$.
Sin pérdida de generalidad podemos tomar la sucesión ζ_n tal que $\zeta_n \to \zeta \in \omega(B)$, ya que G es asintóticamente semicompacto superior. Luego, existe $T \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$G(t, Z) \subset B_0 \quad \forall t \geq T$$

tomando en cuenta este tiempo, resulta que

$$G(\frac{t_n}{2}, \zeta_n) = G(\frac{t_n}{2} - T + T, \zeta_n) = G(\frac{t_n}{2} - T, G(T, \zeta_n))$$

la última igualdad se da ya que G es un semiflujo estricto y en consecuencia,

$$y_n \in G(\frac{t_n}{2} - T, x_n), \quad con \quad x_n \in G(T, \zeta_n).$$

Como antes, sin pérdida de generalidad podemos tomar una sucesión de puntos x_n tal que $x_n \to x \in \omega(B)$. Es claro que $(\zeta_n, x_n) \in graf(G(T, \cdot))$, y dado que la gráfica de G es cerrada, resulta que $(\zeta, x) \in graph(G(T, \cdot))$, es decir, $x \in G(T, \zeta) \subset B_0$, y como $x_n \to x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in B_0$. Pero, $y_n \to y$ y

$$y_n \in G(\frac{t_n}{2} - T, x_n) \subset G(\frac{t_n}{2} - T, B_0)$$

por lo que $y \in \omega(B_0)$, lo cual es una contradicción. Esta contradicción muestra que $\omega(B) \subset \omega(B_0)$, que es lo que se quería.
□

Otro de los resultados interesantes se da cuando en el teorema 3.23 igual que en el caso anterior, si el semiflujo G no es semicontinua superiormente pero tiene gráfica cerrada, y si el semiflujo en lugar de ser disipativo puntual es disipativo, se garantiza la existencia del atractor.

Corolario 3.25. *El teorema 3.23 sigue siendo válido si el semiflujo $G(t, \cdot)\colon X \to \mathcal{P}(X)$ no es semicontinuo superiormente, pero tiene gráfica cerrada y G es disipativo.*

Demostración: Como G es disipativo, existe un conjunto acotado absorbente $B_0 \subset X$. Sea $\mathcal{A} = \omega(B_0)$, probemos que este conjunto es un atractor global.

En vista del teorema 3.9 y 3.10 el conjunto $\omega(B_0)$ es no vacío, compacto, negativamente semi-invariante y es el cerrado más pequeño que atrae a B_0. Entonces, sólo basta probar que $\mathcal{A} = \omega(B_0)$ atrae a cada conjunto acotado $B \subset X$ para que sea un atractor. Además por ser cerrado, y por el lema 3.19 $\mathcal{A} = \omega(B_0)$ es el cerrado más pequeño que atrae a cada conjunto acotado $B \subset X$.

Sea $B \subset X$ un conjunto acotado, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $T_{\epsilon,B} \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$G(t, B) \subset G(t - T_{\epsilon,B}, G(T_{\epsilon,B}, B)) \subset G(t - T_{\epsilon,B}, B_0) \subset N(\omega(B_0), \epsilon) \quad \forall t \geq T_{\epsilon,B}.$$

Esto último prueba que $\mathcal{A} = \omega(B_0)$ atrae a cada conjunto acotado $B \subset X$, que es lo que se quería.
□

Algo que es natural preguntarse es que, si el semiflujo multivaludo G tiene un atractor global $\mathcal{A}$, qué relación existe con el ω-límite. Precisamente el ω-límite del atractor $\mathcal{A}$ coincide con el atractor $\mathcal{A}$.

Proposición 3.26. *Sea $G\colon \mathbb{R}^+ \times X \to \mathcal{P}(X)$ un semiflujo multivaluado asintóticamente superior y supongamos que se cumplen las condiciones* 1) *y* 2) *del teorema 3.9. Si G tiene un atractor global $\mathcal{A}$ cerrado en X, entonces $\omega(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.*

Demostración: En vista de que $\omega(\mathcal{A})$ es un conjunto cerrado negativamente semi-invariante, por el lema 3.5

$$\omega(\mathcal{A}) \subset \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}.$$

Probemos la otra contención. Por ser $\mathcal{A}$ negativamente semi-invariante y usando la parte 2) del teorema 3.9

$$\mathcal{A} \subset G(t, \mathcal{A}) \subset N(\omega(\mathcal{A}), \epsilon) \ \ (\forall t \geq T_{\mathcal{A}})$$

para algún $\epsilon > 0$ arbitrario. Por lo que

$$\mathcal{A} \subset \overline{\omega(\mathcal{A})} = \omega(\mathcal{A}).$$

Ésto prueba que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{A})$.
□

3.6. Conexidad de un atractor

Antes de enunciar el teorema para garantizar la existencia de atractores conexos, pasemos primero a la definición de un semiflujo de tiempo continuo.

Consideremos el conjunto $\mathcal{D}(x_0)$ de todas las trayectorias continuas que al tiempo cero están en x_0.

Corolario 3.27. *El mapeo multivaluado $G\colon \mathbb{R}^+ \times X \to \mathcal{P}(X)$, definido por*

$$G(t, x_0) = \{x(t) : x(\cdot) \in \mathcal{D}(x_0), x(\cdot) \in C(\mathbb{R}^+, X)\} \quad \forall x_0 \in X$$

es un semiflujo multivaluado.

Demostración: Es claro que $G(0, x_0) = \{x_0\}$. Probemos que

$$G(t_1 + t_2, x_0) \subset G(t_1, G(t_2, x_0)) \ \ \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Sea $y \in G(t_1 + t_2, x_0)$, entonces, existe $x(\cdot) \in \mathcal{D}(x_0)$ tal que $x(t_1 + t_2) = y$. Por ser $x(\cdot)$ una trayectoria resulta que

$$y = x(t_1 + t_2) \subset G(t_1, x(t_2)) \subset G(t_1, G(t_2, x_0))$$

esto último se cumple ya que $x(t_2) \in G(t_2, x_0)$.
□

A este tipo de semiflujos se les llama semiflujos de tiempo continuo.

Teorema 3.28. *Suponga que se cumplen las condiciones del teorema 3.23 o 3.20, y que G es de tiempo continuo con valores conexos tal que $G(t_1 + t_2, x) = G(t_1, G(t_2, x))$, para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ y todo $x \in X$. Si el espacio X es conexo, entonces el atractor global $\mathcal{A}$ también es conexo.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{A}$ no es conexo, entonces existen conjuntos cerrados no vacíos A_1, A_2 tales que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ y $A_1 \cup A_2 = \mathcal{A}$. Luego, existe $\epsilon >$ tal que $N(A_1, \epsilon) \cap N(A_2, \epsilon) = \emptyset$. Definamos los siguientes conjuntos

$$X_i = \{x \in X : G(t, x) \subset N(A_i, \epsilon) \ \ \forall t \geq T_x\}, \quad i = 1, 2.$$

Probemos que el espacio X es disconexo usando estos conjuntos, es decir, que X_1, X_2 son abiertos disjuntos no vacíos, tales que su unión es todo el espacio X, para así obtener una contradicción.

Primero probemos que $X = X_1 \cup X_2$. Sea $x_0 \in X$ un punto arbitrario, entonces existe $T_{x_0} \geq 0$ tal que

$$G(t, x_0) \subset N(\mathcal{A}, \epsilon) \quad \forall t \geq T_{x_0},$$

como G es a valores conexos, necesariamente $G(T, x)$ está contenida en alguna bola $N(A_i, \epsilon)$.
Luego, usando que el semiflujo G es de tiempo continuo se tiene

$$\begin{aligned} G([T_{x_0}, \infty), x_0) &= \bigcup_{t \geq T_{x_0}} G(t, x_0) \\ &= \bigcup_{t \geq T_{x_0}} \{x(t) : x(\cdot) \in \mathcal{D}(x_0), x(\cdot) \in C(\mathbb{R}^+, X)\} \\ &= \bigcup_{x(\cdot) \in \mathcal{D}(x_0)} x([T_{x_0}, \infty)). \end{aligned}$$

Es claro que como cada trayectoria es continua y satisface $x(0) = x_0$, resulta que

$$\bigcup_{x(\cdot) \in \mathcal{D}(x_0)} x([T_{x_0}, \infty))$$

es conexo, y entonces

$$G([T_{x_0}, \infty), x_0) \subset N(A_i, \epsilon)$$

para algún $i = 1, 2$. Es decir $x_0 \in X_i$, y por lo tanto $X = X_1 \cup X_2$.

Probemos ahora que cada conjunto $X_i \neq \emptyset$. Para esto probemos que $A_i \subset X_i$ para $i = 1, 2$.
Sea $x_0 \in A_i$ un punto arbitrario, con los mismos argumentos que antes, tenemos que

$$G([0, \infty), x_0) = \bigcup_{x(\cdot) \in \mathcal{D}} x([0, \infty))$$

este último conjunto es conexo, ya que $x_0 \in \bigcap_{x(\cdot) \in \mathcal{D}} x([0, \infty))$. Por otro lado, por el corolario 3.21 el atractor $\mathcal{A}$ es invariante, y entonces

$$G([0, \infty), x_0) \subset G([0, \infty), A_i) \subset G([0, \infty), \mathcal{A}) = \mathcal{A}$$

y por lo tanto, necesariamente para algún A_i

$$G([0, \infty), x_0) \subset A_i$$

es decir, si lo anterior sucede, entonces $G([0, \infty), x_0)$ no puede estar contenido en A_j para $i \neq j$, ya que si esto pasa, para $t = 0$ $G(0, x_0) = \{x_0\} \in A_j$, pero esto no puede pasar ya

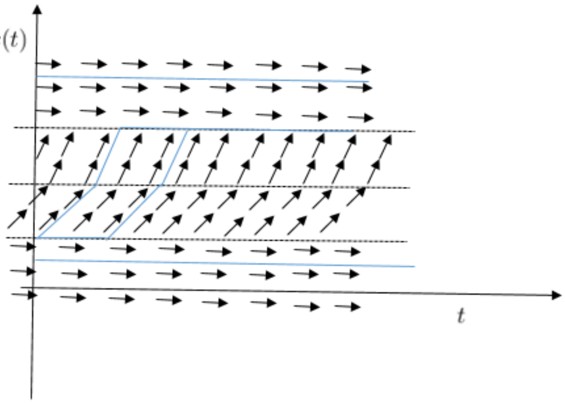

FIGURA 2. Campo direccional del problema de valores iniciales (16)

que A_j y A_i son disjuntos para $i \neq j$. Esto prueba que $A_i \subset X_i$ para $i = 1, 2$, y por lo tanto X_i son no vacíos.

Por último, probemos que cada X_i es abierto. Sea $x \in X_i$ un punto arbitrario, entonces existe $T_x \geq 0$ tal que

$$G(t, x) \subset N(A_i, \epsilon) \quad \forall t \geq T_x$$

como el mapeo $G(T_x, \cdot)$ es semicontinuo superiormente, existe una vecindad U_x de x tal que $G(T_x, U_x) \subset N(A_i, \epsilon)$. Con los mismos argumentos de antes, tenemos que

$$G(t, U_x) \subset N(A_i, \epsilon) \quad \forall t \geq T_x$$

y por lo tanto $U_x \subset X$. Esto último muestra que X_i es abierto para cada $i = 1, 2$.
Esto muestra que X es disconexo, lo cual es una contradicción, y por lo tanto el atractor global $\mathcal{A}$ necesariamente debe ser conexo.
□

3.7. Ejemplos

Ejemplo 3.29. *Consideremos el problema de valores iniciales*

$$x' = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ 1 & si \quad 1 < x < 2 \\ 2 & si \quad 2 < x < 3 \\ 0 & si \quad x > 3 \end{cases} \qquad x(0) = x_0. \tag{16}$$

Encontremos las soluciones de Filippov de este P.V.I. Como ya vimos en el capítulo anterior, para encontrar las soluciones de Filippov basta con encontrar las soluciones de la inclusión diferencial correspondiente. Calculemos $F(x)$, este está dado por

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & si \quad x < 1 \\ [0,1] & si \quad x = 1 \\ \{1\} & si \quad 1 < x < 2 \\ [1,2] & si \quad x = 2 \\ \{2\} & si \quad 2 < x < 3 \\ [0,2] & si \quad x = 3 \\ \{0\} & si \quad x > 3 \end{cases} \tag{17}$$

y apliquemos la selección de norma mínima

$$m(F(x)) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 1 \\ 1 & si \quad 1 < x \leq 2 \\ 2 & si \quad 2 < x < 3 \\ 0 & si \quad x \geq 3. \end{cases} \tag{18}$$

Ahora consideremos el nuevo problema de valores iniciales $x' = m(F(x))$, $x(0) = x_0$.

Para encontrar las soluciones, analicemos los siguientes casos:

a) Si $x_0 < 1$, la solución de este sistema está dada por $\phi_1(t) = x_0$, la cual es única para todo $t \geq 0$.

b) Si $x_0 = 1$, en este caso se tienen infinitas soluciones:

$$\phi_{2,t_0}(t) = \{1, x_{t_0}\}$$

en donde

$$x_{t_0}(t) = \begin{cases} 1 & t \leq t_0 \\ t - (t_0 - 1) & t_0 < t \leq t_0 + 1 \\ 2(t - t_0) & t_0 + 1 < t < 3/2 - t_0 \\ 3 & t \geq 3/2 - t_0 \end{cases}$$

para todo número $t_0 \in [0, \infty)$.

c) si $1 < x_0 \leq 2$, la solución está dada por

$$\phi_3(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 1 - x_0 \\ x_0 + t & 1 - x_0 < t \leq 2 - x_0 \\ 2t + 2(x_0 - 1) & 2 - x_0 < t < 5/2 - x_0 \\ 3 & t \geq 5/2 - x_0. \end{cases}$$

d) Si $2 < x_0 < 3$, la solución al sistema está dado por

$$\phi_4(t) = \begin{cases} 1 & t \leq -x_0/2 \\ \\ t + 1 + x_0/2 & -x_0/2 < t \leq 1 - x_0/2 \\ \\ 2t + x_0 & 1 - x_0/2 < t < 3/2 - x_0/2 \\ \\ 3 & t \geq 3/2 - x_0/2. \end{cases}$$

e) Si $x_0 \geq 3$, la solución al sistema está dada por, $\phi_5(t) = x_0$ la cual es única para todo $t \geq 0$.

Antes de continuar con el ejemplo, veamos que las soluciones del sistema (9) son trayectorias, o mejor dicho el mapeo que consta de estas soluciones forma un semiflujo multivaluado.

Definición 3.30. *Denotemos por $\overline{\mathcal{D}}(x_0)$ al conjunto de todas las soluciones del sistema (9).*

Lema 3.31. *Para todo $t \in \mathbb{R}^+$ y cada $x_0 \in X$, el mapeo multivaluado definido por*

$$G(t, x_0) = \{x(t) : x(\cdot) \in \overline{\mathcal{D}}(x_0)\}$$

es un semiflujo multivaluado estricto.

Demostración: Es claro que $G(0, x_0) = \{x_0\}$. Primero probemos que para cada $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, y $x_0 \in X$ se cumple

$$G(t_1 + t_2, x_0) \subset G(t_1, G(t_2, x_0)).$$

Sea $y \in G(t_1+t_2, x_0)$, entonces existe una función absolutamente continua $u(\cdot) \in \overline{\mathcal{D}}(x_0)$ tal que $u(0) = x_0$ y $u(t_1 + t_2) = y$. Definamos $\tilde{u}(t) = u(t + t_2)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Note que para casi todo $t \in \mathbb{R}^+$

$$\tilde{u}'(t) = u'(t + t_2) = m(F(u(t + t_2))) = m(F(\tilde{u}(t)) \quad \tilde{u}(0) = u(t_2)$$

es decir, $\tilde{u}(\cdot) \in \overline{\mathcal{D}}(u(t_2))$ y por lo tanto

$$y = \tilde{u}(t_1) \in G(t_1, u(t_2)) \subset G(t_1, G(t_2, x_0)).$$

como y fue tomada de manera arbitraria, se tiene lo deseado.

Ahora tomemos $y \in G(t_1, G(t_2, x_0))$, entonces existe $z \in G(t_2, x_0)$ tal que $y \in G(t_1, z)$, además existen funciones absolutamente continuas $u_1(\cdot) \in \overline{\mathcal{D}}(x_0)$ y $u_2(\cdot) \in \overline{\mathcal{D}}(z)$ que satisfacen

$$u_1(t_2) = z, \;\; u_1(0) = x_0 \;\; y \;\; u_2(t_1) = y, \;\; u_2(0) = z.$$

Es fácil observar que $u_1(t_2) = u_2(0)$. Definamos

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & si \quad 0 \leq t < t_2 \\ \\ u_2(t - t_2) & 2 \leq t < \infty \end{cases}$$

note que aquí, u es una función definida sobre $\mathbb{R}^+$ y $u(\cdot) \in \overline{\mathcal{D}}(x_0)$, en efecto

$$u'(t) = u_1'(t) = m(F(u_1(t))) = m(F(u(t)))$$

para casi todo $t \in [0, t_2)$. Y

$$u'(t) = u_2'(t - t_2) = m(F(u_2(t - t_2))) = m(F(u(t))).$$

para casi todo $t \in [t_2, \infty)$. En consecuencia, $y = u(t_1 + t_2) \in G(t_1 + t_2, x_0)$. Nuevamente y fue tomado de forma arbitraria, por lo que $G(t_1, G(t_2, x_0)) \subset G(t_1 + t_2, x_0)$. Y por lo tanto, para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ y $x_0 \in X$

$$G(t_1 + t_2, x_0) = G(t_1, G(t_2, x_0)).$$

□

Notemos que aquí también se ha probado que las soluciones del sistema (9) son trayectorias.

Para que sea más claro cómo se unen las curvas, tomemos de nuevo el problema de valores iniciales (16) con alguna modificación.

Ejemplo 3.32. *Considere el problema de valores iniciales,*

$$x' = \begin{cases} x & si \quad x < 1 \\ 1 & si \quad 1 < x < 2 \\ 2 & si \quad 2 < x < 3 \\ 0 & si \quad x > 3 \end{cases} \qquad x(0) = x_0.$$

Una vez haciendo los cálculos como en el ejemplo anterior resulta que

$$m(F(x)) = \begin{cases} x & si \quad x \leq 1 \\ 1 & si \quad 1 < x \leq 2 \\ 2 & si \quad 2 < x < 3 \\ 0 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

y calculemos las soluciones del sistema $x' = m(F(x))$, $x(0) = x_0$.

Igual que en el caso anterior, las soluciones dependen de la condición inicial x_0.

Sí $x_0 \leq 1$ entonces

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^t & si \quad t \leq \ln(\frac{1}{x_0}) \\ t + 1 - \ln(\frac{1}{x_0}) & si \quad \ln(\frac{1}{x_0}) < t \leq 2 + \ln(\frac{1}{x_0}) \\ 2t - 2 - 2\ln(\frac{1}{x_0}) & si \quad 2 + \ln(\frac{1}{x_0}) < t < \frac{5}{2} + \ln(\frac{1}{x_0}) \\ 3 & si \quad t \geq \frac{5}{2}\ln(\frac{1}{x_0}). \end{cases}$$

Sí $1 < x_0 \leq 2$, entonces

$$x(t) = \begin{cases} e^{t+x_0} & si \quad t \leq -x_0 \\ t + x_0 & si \quad -x_0 < t \leq 2 - x_0 \\ 2t - 2 + 2x_0 & si \quad 2 - x_0 < t < \dfrac{5}{2} - x_0 \\ 3 & si \quad t \geq \dfrac{5}{2} - x_0. \end{cases}$$

Sí $2 < x_0 < 3$, entonces

$$x(t) = \begin{cases} e^{t+\frac{x_0}{2}} & si \quad t \leq -\dfrac{x_0}{2} \\ t + 1 + \dfrac{x_0}{2} & si \quad -\dfrac{x_0}{2} < t \leq 1 - \dfrac{x_0}{2} \\ 2t + x_0 & si \quad 1 - \dfrac{x_0}{2} < t < \dfrac{3}{2} - \dfrac{x_0}{2} \\ 3 & si \quad t \geq \dfrac{3}{2} - \dfrac{x_0}{2}. \end{cases}$$

Sí $x_0 \leq 3$, entonces $x(t) = x_0$ la cual está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Note que hemos encontrado las soluciones de Filippov para el problema de valores iniciales planteado, ya que estas funciones son absolutamente continuas y satisfacen la inclusión diferencial correspondiente para casi todo t.

Ahora consideremos el semiflujo formado por el conjunto de trayectorias encontradas del problema de valores iniciales (16), es decir:

$$G(t, x_0) = \begin{cases} \{\phi_1(t)\} & x_0 < 1 \\ \{\phi_{2,t_0}(t)\} & x_0 = 1 \\ \{\phi_3(t)\} & 1 < x_0 \leq 2 \\ \{\phi_4(t)\} & 2 < x_0 < 3 \\ \{\phi_5(t)\} & x_0 \geq 3. \end{cases}$$

De acuerdo al campo direccional del problema de valores iniciales (16), es fácil observar que un atractor global es $\mathcal{A} = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$. Primero que nada, se puede probar que para cualquier conjunto acotado $B \subset \mathbb{R}$ existe $T_B \in \mathbb{R}^+$ tal que $G(t, B) \in \mathcal{A}$, y cumple

$$G(t, \mathcal{A}) = \mathcal{A} \quad \forall t \geq 0$$

es decir, todas las trayectorias que empiezan en $\mathcal{A}$ se quedan en $\mathcal{A}$ para todo tiempo.

Notamos que aquí el atractor $\mathcal{A}$ no es un conjunto acotado, la pregunta aquí es, contradice a algún teorema. Primero, probemos que el semiflujo satisface lo siguiente:

a) $G(t,\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es semicontinua superiormente con valores cerrados.
b) G es asintóticamente semicompacto superior.

a) Antes que nada, debemos notar que la semicontinuidad equivale a la continuidad usual cuando se trata de una función valuada.
Probemos que G es semicontinua superiormente. Nuevamente analicemos los casos:

Si $x_0 \leq 1$, entonces $G(t, x_0) = \{x_0\}$ que trivialmente es semicontinua superiormente.

Si $x_0 = 1$, se tiene que $G(t, 1) = [1, 3]$. Probemos este hecho.
Obviamente $G(t, 1) \subset [1, 3]$ para todo $t \geq 0$. Sea $y \in [1, 3]$ y $t \in \mathbb{R}^+$ un tiempo arbitrario pero fijo, entonces existe $t_0 \in [0, \infty)$ tal que $x_{t_0}(t) = y$. Por definición de G, resulta que $y = x_{t_0}(t) \in G(t, 1)$, como t fue tomado de manera arbitraria se tiene que $[1, 3] \subset G(t, 1)$, y por lo tanto $G(t, 1) = [1, 3]$. Afirmamos que G es semicontinua superiormente en $x_0 = 1$, en efecto; sea $N([1, 3], \epsilon)$ una vecindad de $G(t, 1)$, luego es claro que tomando $\delta = \epsilon/2$ se tiene que

$$G(t, N(1, \epsilon/2) \subset N([1, 3], \epsilon).$$

Si $1 < x_0 \leq 2$, en este caso $G(t, x_0) = \phi_3(t)$ que es una función continua, y por lo tanto semicontinua superiormente. Lo mismo pasa para cuando $2 < x_0 < 3$ y $x_0 \geq 3$.

Notemos que en el caso cuando $x_0 = 1$, $G(t, 1)$ es un subconjunto cerrado, en los otros casos se trata de funciones univaluadas, y en consecuencia con imágenes cerradas. Esto prueba que $G(t, \mathbb{R})\colon \ \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ es semicontina superiormente con valores cerrados para cada $(t, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

b) Sea $B \subset \mathbb{R}$, un conjunto acotado. Una vez más las trayectorias del semiflujo G dependen del conjunto B que partamos. Los siguientes casos no son difíciles de verificar.

Si $B \subset (-\infty, 1)$, todas trayectorias son constantes. En este caso se tiene que

$$G(t, B) = \bigcup_{x_0 \in B} G(t, x_0) = B,$$

de modo que cada trayectoria que empiece en B permanece en B para todo tiempo.

Si $B \subset (0, 2]$, entonces $G(t, B) \subset (0, 3]$ para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$.

Si $B \subset (1, 3)$, entonces $G(t, B) \subset (1, 3]$ y si $B \subset (2, \infty)$, también es claro que $G(t, B) = B$ para todo tiempo $t \geq 0$.

De manera general, dado un conjunto acotado $B \subset \mathbb{R}$ se puede probar que $G(t, B)$ es también acotado para cualquier $t \geq 0$.

Tomemos una sucesión arbitraria $x_n \in G(t_n, B)$ con $t_n \to \infty$. Por lo mencionado antes, existe un conjunto acotado $M_B \subset \mathbb{R}$ tal que

$$G(t_n, B) \subset M_B$$

y así

$$x_n \in G(t_n, B) \subset \overline{M_B}$$

por lo que a x_n se le puede extraer una subsucesión convergente.

Por otra parte, el teorema 3.22 garantiza la existencia de un atractor, pero no garantiza que este sea cerrado ni acotado. Notemos que el teorema 3.23, nos pide que el semiflujo G sea disipativo para que el atractor sea compacto. En este ejemplo es claro que G no es disipativo ni disipativo puntual, ya que no existe un conjunto acotado que atraiga a todas las trayectorias. Este ejemplo muestra claramente que si al teorema se le quita la propiedad de ser disipativo o disipativo puntual, no garantizamos que el atractor sea compacto.

Ejemplo 3.33.

A partir de las trayectorias encontradas del ejemplo anterior, podemos definir un sistema semidinámico, es decir, considerar el espacio de trayectorias $\phi_i \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. El espacio que consiste de estas trayectorias lo denotamos por $\mathcal{H}^+$, y definimos el correspondiente semiflujo $\{S(t)\}$ por $S(t)\phi = \phi^t$ $t \geq 0$, donde $\phi^t(s) = \phi(t+s)$. Note que $S(t)$ está bien definido, ya que $\mathcal{H}^+$ es traslacionalmente invariante, es decir, si $y \in \mathcal{H}^+$ entonces $y(\cdot + a) \in \mathcal{H}^+$ para cada $a \in \mathbb{R}^+$. Es claro que $\mathcal{H}^+ \subset C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Definamos sobre el espacio $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ la familia de seminormas dependientes del parámetro $i \geq 1$,

$$\|y\|_i = \|y\|_{\infty,i} + \|y'\|_{\infty,i}$$

en donde $\|y\|_{\infty,i}$ es la norma del supremo esencial restringido al intervalo $[0,i]$. En el caso cuando se toma la norma esencial sobre la derivada de y se toma sobre el conjunto donde dicha derivada existe, pues y es derivable casi en todas partes, es decir, el conjunto donde y' no existe tiene medida de Lebesgue cero.

Observación 2. *Si $K \subset \mathbb{R}^+$ es cualquier conjunto compacto, se puede encontrar $N \in \mathbb{N}$, tal que $K \subset [0, N]$.*

Denotemos por $K_i = [0, i]$.

Definición 3.34. *Sea $\{f_n\} \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ una sucesión arbitraria. Decimos que f_n converge a $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uniformemente sobre cada conjunto compacto, si para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^+$ y cada $\epsilon > 0$ existe $N = N(K, \epsilon)$ tal que*

$$\|f_n - f\|_K \leq \epsilon \quad \forall n \geq N,$$

donde

$$\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Notemos que como f es continua no importa que norma tomemos, pues en este caso la norma del supremo esencial y la del supremo usual coinciden, es decir, $\|f\|_{k_i} = \|f\|_{\infty,i}$. Sobre el espacio $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ consideremos la métrica de Fréchet definida de la siguiente manera:

$$d(f,g) = \sum_{j=i}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|f-g\|_j}{1 + \|f-g\|_j}.$$

Proposición 3.35. *Sea $f_n \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ una sucesión arbitraria, entonces $d(f_n, f) \to 0$ cuando $n \to \infty$, si y sólo si $\|f_n - f\|_i \to 0$ cuando $n \to \infty$, para cada $i \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Es claro que si $\|f_n - f\|_i \to 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces $d(f_n, f) \to 0$. Ahora bien, es claro que

$$d(f_n, f) \geq 2^{-m} \frac{\|f_n - f\|_m}{1 + \|f-g\|_m} \quad \forall m \geq 1$$

de aquí se sigue que $\forall m \geq 1$

$$d(f,g) \geq 2^{-m} \|f_n - f\|_m$$

y por lo tanto

$$\|f_n - f\|_m \leq 2^m d(f_n, f), \quad \forall m \geq 1.$$

De aquí, si $d(f_n, f) \to 0$, entonces $\|f_n - f\|_m \to 0$ para toda $m \geq 1$.
□

Ahora consideremos el espacio de trayectorias $\mathcal{H}^+$ con la métrica heredada por $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, es decir consideremos el espacio métrico $(\mathcal{H}^+, d)$.

Teorema 3.36. *El espacio $(\mathcal{H}^+, d)$, es un espacio métrico completo*

Demostración: Antes de dar la demostración, consideremos el siguiente lema. Su demostración puede consultarse en la referencia [**5**] y teorema 264 de [**7**].

Lema 3.37. *Si f es continua y f' existe excepto en un conjunto finito o numerable y si f' es integrable en $[a, b]$, entonces f es absolutamente continua en $[a, b]$.*

Notemos que cada función $f \in \mathcal{H}^+$ es absolutamente continua. Ahora procedamos a demostrar nuestra afirmación.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}^+$, es decir, que dado $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_n, f_m) \leq \epsilon/2^i \quad si \quad m, n \ \geq N_0.$$

En donde $i \geq 1$ se toma de manera arbitrario pero fijo, tal que se cumple también

$$\|f_n - f_m\|_i \leq \epsilon \quad si \quad m, n \ \geq N_0.$$

Por otro lado, por definición, para toda $x \in K_i$ $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^\infty([0, i], \mathbb{R})$ que es de Banach. Así existe una función $f \in L^\infty([0, i], \mathbb{R})$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) := f^i(x)$. Esta función la podemos definir para todo $\mathbb{R}^+$, ya que dado $x \in \mathbb{R}^+$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_j$, podemos definir

$$f(x) := f^i(x) = f^{i+1}(x) = f^{i+2}(x) = ...$$

de esta manera $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Por otro lado, también se cumple que

$$\|f_n' - f_m'\|_{\infty,i} \leq \epsilon \ \ \forall n, m \geq \tilde{N}_0.$$

Nuevamente usando que $L^\infty([0, i], \mathbb{R})$ es de Banach, existe un conjunto A de medida cero tal que $\forall x \in K_i/A$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) := g^i(x)$. Igual como se hizo antes, definamos

$$g(x) := g^i(x) = g^{i+1}(x)...$$

la cual está definida para todo $x \in \mathbb{R}^+$.
Para verificar que nuestro espacio es completo debemos mostrar
a) $d(f_n, f) \to 0$ cuando $n \to \infty$,
b) f es absolutamente continua y
c) f satisface la ecuación diferencial (16).

a) Hay que probar en primer lugar que $\|f_n - f\|_i \to 0$ para cada $i \geq 1$.
Por el lema 3.37, resulta que cada f_n es absolutamente continua y por lo tanto se puede escribir de la siguiente manera

$$f_n(t) - f_n(a) = \int_0^t f_n'(s)ds$$

tomando límite cuando $n \to \infty$ y usando el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada, se tiene que

$$f(t) - f(a) = \int_0^t g(s)ds$$

es decir,

$$f(t) = f(a) + \int_0^t g(s)ds,$$

y por lo tanto, f es absolutamente continua. Además $f'(x) = g(x)$ casi en todas partes. Usando este hecho, se tiene que

$$\|f_n - f\|_i = \|f_n - f\|_{\infty,i} + \|f_n' - f'\|_{\infty,i} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

y como $i \geq 1$ fue tomado de manera arbitraria, por la proposición 3.35 se tiene que $d(f_n, f) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto prueba la parte a) y b).

c) Notemos que si f_n converge a los puntos de discontinuidad de F, en tales puntos no se puede decir nada, pero no hay ningún problema pues en dichos puntos no está definido el campo F, por lo tanto tiene sentido pensar en f_n tal que $f_n(x) \to f(x)$ y F es continua en $f(x)$. Por otro lado, sabemos que $f_n'(t) = F(f_n(t))$ casi en todas partes, entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ F es continua en $f_n(t)$, por lo que $f'(t) = F(f(t))$ para casi todo $t \in \mathbb{R}^+$.
En consecuencia $(\mathcal{H}^+, d)$ es un espacio métrico completo.
□

Hemos construido un nuevo sistema semidinámico $(\mathcal{H}^+, S(t))$, con semiflujo $\{S(t)\}$ y como espacio fase el espacio de trayectorias $\mathcal{H}^+$. Nuestra tarea ahora es ver si el sistema semidinámico construido tiene un atractor global, en este caso el atractor global recibe el nombre de atractor global de trayectorias del semiflujo $\{S(t)\}$ sobre $\mathcal{H}^+$. Antes de dar la definición de atractor, vemos cómo son las bolas abiertas y cerradas en este espacio.

Definición 3.38. *Sea $\phi \in \mathcal{H}^+$, definimos la bola centrada en ϕ de radio $\epsilon > 0$, como*

$$N(\phi, \epsilon) = \{f \in \mathcal{H}^+ | d(\phi, f) < \epsilon\}$$

y la bola cerrada como

$$N(\phi, \epsilon) = \{f \in \mathcal{H}^+ | d(\phi, f) \leq \epsilon\}.$$

También nos preguntamos, cómo son los conjuntos acotados. Como es natural pensarse, diremos que un conjunto de trayectorias $B \in \mathcal{H}^+$ es un conjunto acotado en $\mathcal{H}^+$, si para cada $\phi \in B$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $d(0, \phi) \leq M$. En donde 0, es la función idénticamente cero.
Con la misma idea, definamos lo que es un conjunto atrayente.

Definición 3.39. *Un conjunto $\mathcal{P} \subset \mathcal{H}^+$ es llamado un atrayente (en la topología inducida por la convergencia uniforme) para el semiflujo $\{S(t)\}$, si para cada conjunto $B \subset \mathcal{H}^+$ acotado en $\mathcal{H}^+$, el conjunto $S(t)B$ converge a $\mathcal{P}$ cuando $t \to \infty$, es decir,*

$$dist(S(t)B, \mathcal{P}) \to 0 \quad (t \to \infty).$$

Ahora vamos a dar la definición de atractor de trayectorias del semiflujo $\{S(t)\}$.

Definición 3.40. *Un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}^+$ es llamado un atractor de trayectorias para el semiflujo $\{S(t)\}$ sobre $\mathcal{H}^+$ si*

a) $\mathcal{A}$ es acotado en $C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$, y compacto en la topología inducida por la convergencia uniforme.
b) $\mathcal{A}$ es un atrayendo para el semiflujo $\{S(t)\}$.
c) $\mathcal{A}$ es invariante, es decir, $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $t \geq 0$.

Retomando nuestro ejemplo, consideremos el conjunto de trayectorias

$$\mathcal{A} = \{\phi(t) = 1, \phi_1(t), \phi_5(t)\},$$

en este caso x_0 recorre todo el intervalo $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$.

Si $B \subset \mathcal{A}$ es un conjunto acotado en $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, se tiene que $S(t)B = B \subset \mathcal{A}$ para todo $t \geq 0$.

Si $B = \{\phi_{2,t_0}(t), \forall t \geq 0\}$, es claro que para cada $\epsilon > 0$, podemos encontrar $T_B \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$S(t)B \subset N(\mathcal{A}, \epsilon), \;\; \forall t \geq T_B.$$

De manera general, se puede probar que $\mathcal{A}$ atrae a cualquier conjunto $B \subset \mathcal{H}^+$ acotado en $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Además es claro que $\mathcal{A}$ es invariante respecto al flujo $S(t)$, es decir, $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $t \geq 0$.

Por otro lado, notemos que en este caso $\mathcal{A}$ es un conjunto acotado, ya que $d(0, \phi) < \infty$ para toda $\phi \in \mathcal{A}$. En efecto

$$d(0, \phi) = \sum_{j=i}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|\phi\|_j}{1 + \|\phi\|_j} < \infty.$$

Finalmente, en claro que si tomamos una sucesión de trayectorias $\phi_n \in \mathcal{H}^+$ tal que

$$d(\phi_n, \phi) \to 0, \;\; (n \to \infty)$$

entonces $\phi \in \mathcal{H}^+$.

Por lo que de acuerdo a la definición 3.40, el conjunto $\mathcal{A}$ es un atractor global.

Ejemplo 3.41.

Consideremos un sistema dinámico (φ_s, X), es decir X es el espacio fase y φ_s es el flujo que satisface:

1. $\varphi_0(x) = x$.
2. $\varphi_{t_1+t_2}(x) = \varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(x)) \quad (\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}) \quad (x \in X)$.

Lema 3.42. *Dado un flujo φ_s, entonces la función definida como*

$$F(0, x) = \{x\}$$

$$F(t, x_0) = \varphi_t(N(x_0, \epsilon)) \;\; (\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \;\; (x \in X)$$

es un flujo multivaluado. Donde ϵ es cualquier número positivo, pero fijo.

Demostración: Sea $y \in F(t_1 + t_2, x_0)$, esto implica que existe $x \in N(x_0, \epsilon)$ tal que $\varphi_{t_1+t_2}(x) = y$. Por ser φ un flujo, resulta que $\varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(x)) = y$. Por otro lado, un punto $z \in F(t_1, \varphi_{t_2}(x))$ si existe $\tilde{y} \in N(\varphi_{t_2}(x), \epsilon)$ tal que $\varphi_{t_1}(\tilde{y}) = z$. Es claro que si tomamos $\tilde{y} = \varphi_{t_2}(x) \in N(\varphi_{t_2}(x), \epsilon)$, por lo anterior se tiene $\varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(x)) = y$, esto implica que

$$y \in F(t_1, \varphi_{t_2}(y)) \subset F(t_1, F(t_2, x_0)).$$

Como y fue tomado de manera arbitraria, se tiene lo deseado.
□

Nos gustaría tener una función que sea semicontinua superiormente, sin embargo la función multivaluada así definida no lo es. Para construir una función que satisfaga esta propiedad, recurrimos a la siguiente definición.

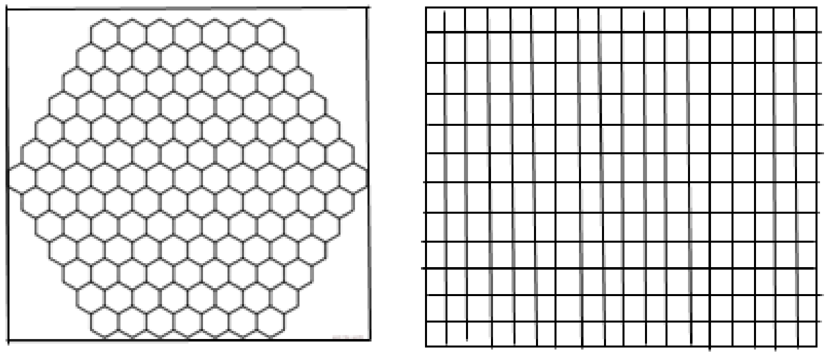

Figura 3. Algunas teselaciones con hexágonos y cuadrados en $\mathbb{R}^2$

Definición 3.43. *Consideremos el espacio $\mathbb{R}^n$, diremos que una familia de polígonos A_i con $i \in \mathbb{N}$ es una teselación para el espacio $\mathbb{R}^n$, si cumple las siguientes condiciones.*

1. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}^n$.
2. *Los conjuntos o polígonos A_i se intersectan sólo en sus fronteras.*

A la figuras o polígonos, para nuestros fines, las vamos a considerar como conjuntos cerrados. Por ejemplo, al espacio $\mathbb{R}^2$ se le pueden dar varias teselaciones, por mencionar algunas los triángulos, cuadrados y pentágonos. Realmente estos polígonos vistos como conjuntos son cerrados y acotados.

Lema 3.44. *Consideremos una teselación $A = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$, entonces la función multivaluada $F(t, \cdot) \colon \mathbb{R}^n \to 2^{R^n}$ definida por*

$$F(0, x) = \{x\}$$

y para $t \neq 0$

$$F(t, x) = \begin{cases} \varphi_t(A_i) & x \in int(A_i) \\ \\ \bigcup_i^k \varphi_t(A_i) & x \in \bigcap_{i=1}^k (A_i) \end{cases}$$

es un flujo semicontinuo superiormente.

Donde $int(A)$ es el interior del conjunto A, y k es tal que x pertenece a la intersección de los conjuntos $A_1, A_2, ...A_k$.

Demostración: Primero probemos que $F(t, x_0)$ es un semiflujo. Sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, elementos arbitrarios.
Tomemos $y \in F(t_1 + t_2, x_0)$.
Si $x_0 \in int(A_i)$ para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$y \in \varphi_{t_1+t_2}(A_i)$$

por lo que existe $x \in A_i$, tal que $\varphi_{t_1+t_2}(x) = \varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(x)) = y$. Analicemos $F(t_1, \varphi_{t_2}(x))$, si $\varphi_{t_2}(x) \in int(A_j)$, para algún $j \in \mathbb{N}$. Entonces $F(t_1, \varphi_{t_2}(x)) = \varphi_{t_1}(A_j)$, obviamente

$$y = \varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(x)) \in \varphi_{t_1}(A_j) = F(t_1, \varphi_{t_2}(x))$$

y en consecuencia

$$y \in F(t_1, \varphi_{t_2}(x)) \subset F(t_1, \varphi_{t_2}(A_i)) = F(t_1, F(t_2, x_0)).$$

Ahora si $\varphi_{t_2}(x) \in \bigcap_{j=1}^{r} A_j$, entonces $F(t_1, \varphi_{t_2}(x)) = \bigcup_{j=1}^{r} \varphi_t(A_j)$, por lo tanto

$$y = \varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(x)) \in \bigcap_{j=1}^{r} \varphi_{t_1}(A_j) \subset \bigcup_{i=1}^{r} \varphi_{t_1}(A_j) = F(t_1, \varphi_{t_2}(x))$$

de aquí se sigue que $y \in F(t_1, F(t_2, x_0))$.
De esta manera se tiene que si $x_0 \in int(A_i)$ para algún $i \in \mathbb{N}$

$$F(t_1 + t_2, x_0) \subset F(t_1, F(t_2, x_0)).$$

De manera similar se prueba para cuando $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{k} A_i$, para algún k finito.

Ahora probemos que $F(t, \cdot)$ es semicontinua superiormente. Sea $x \in X$. Entonces $x \in int(A_i)$ o x está en la frontera de A_i, para algún $i \in \mathbb{N}$.

Si $x \in int(A_i)$, tomemos un abierto $M \subset X$ tal que

$$F(t, x) = \varphi_t(A_i) \subset M$$

por ser $int(A_i)$ abierto existe una vecindad V_x de x tal que $V_x \subset int(A_i)$. Tomemos $V = V_x$, entonces

$$F(t, V) = \bigcup_{v \in V} F(t, v) = \varphi_t(A_i) \subset M$$

esto implica que $F(t, x)$ es semicontinua en $x \in int(A_i)$.

Si $x \in \bigcap_{i=1}^{k} A_i$ para algún $k \in \mathbb{N}$, tomemos un abierto $M \subset X$ tal que

$$F(t, x) = \bigcup_{i}^{k} \varphi_t(A_i) \subset M$$

es claro que $x \in int(\bigcup_{i}^{k} A_i)$, de igual manera este conjunto es abierto, entonces existe una vecindad $V = V_x$ tal que $V_x \subset \bigcup_{i}^{k} A_i$, entonces

$$F(t, V) = \bigcup_{v \in V} F(t, v)$$

note que para los puntos $v \in \bigcap_{i}^{k} A_i$ se tiene que

$$F(t, v) = \bigcup_{i}^{k} \varphi_t(A_i) \subset M.$$

Ahora si $v \notin \bigcap_{i}^{k} A_i$, es claro que

$$F(t, V) \subset \bigcup_{i}^{k} \varphi_t(A_i) \subset M$$

en cualquier caso, $F(t, \cdot)$ es semicontinua superiormente. $\square$

Hay que tomar en cuenta que cuando se dice que un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ está en los conjuntos $A_1, A_2, ...A_k$, no necesariamente quiere decir que lleva ese orden, si no que los conjuntos se reordenan si es necesario.

Lema 3.45. *Sea $\varphi_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un flujo disipativo. Entonces el flujo multivaluado $F(t, \cdot) \colon \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ definido en el lema 3.44 es asintóticamente semicompacto superior y puntualmente disipativo.*

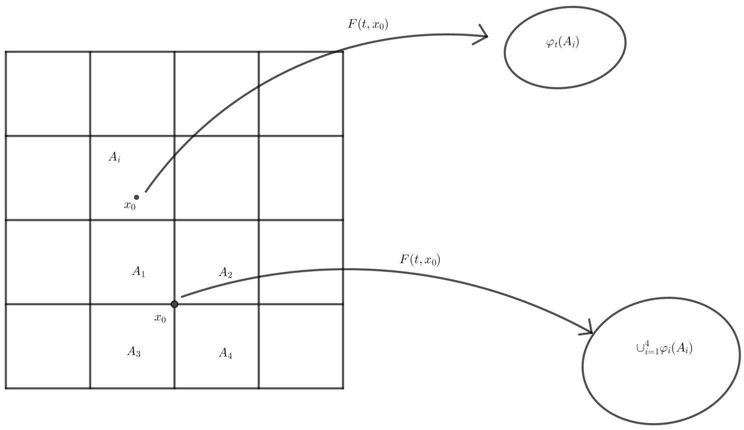

FIGURA 4. Flujo multivaluado definido sobre una teselación A

Demostración: Por ser φ_t disipativo, existe un conjunto acotado $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ tal que para cualquier conjunto acotado $B \subset \mathbb{R}^n$, existe $T_B \in \mathbb{R}^+$ tal que $\varphi_t(B) \subset B_0$ para todo $t \geq T_B$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces si $x \in int(A_i)$ para algún $i \in \mathbb{N}$, claramente

$$F(t, x) = \varphi_t(A_i) \subset B_0 \;\; \forall t \geq T_{A_i}$$

esto se cumple ya que A_i es acotado.

Si $x \in \bigcap_{i=1}^k A_i$, para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$F(t, x) = \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_t(A_i) = \varphi_t(\bigcup_{i=1}^{k} A_i)$$

pero $B = \bigcup_{i=1}^k A_i$ es acotado, esto implica que existe $T_B \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$F(t, x) = \varphi_t(B) \subset B_0 \;\; \forall t \geq T_B$$

en cualquier caso el conjunto acotado B_0 atrae a cada $x \in \mathbb{R}^n$. Lo que muestra que $F(t, \cdot)$ es puntualmente disipativo.

Probemos la propiedad de que para cada conjunto acotado $B \subset \mathbb{R}^n$, existe $T_B \in \mathbb{R}^+$ tal que $\gamma^+_{T_B}(B)$ es acotado.

Sea $B \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado, entonces existen $A_1, A_2, ..., A_r \subset A$ tales que $B \subset \bigcup_{i=1}^r A_i$.

Si $B \subset int(A_1) \bigcup int(A_2) \bigcup ... \bigcup int(A_r)$, entonces

$$F(t, B) \subset F(t, \bigcup_{i=i}^{r} int(A_i)) = \bigcup_{i=1}^{r} F(t, int(A_i)) = \bigcup_{i=1}^{r} \varphi_t(A_i) = \varphi_t(\bigcup_{i=1}^{r} A_i)$$

tomando $M = \bigcup_{i=1}^r A_i$ que es acotado, y siendo φ_t disipativo, se tiene

$$F(t, B) \subset \varphi_t(M) \subset B_0 \;\; \forall t \geq T_{M,B}$$

y en consecuencia

$$F(t, B) \subset B_0 \;\; \forall t \geq T_{M,B}$$

y por lo tanto

$$\gamma^+_{T_{M,B}}(B) = \bigcup_{\tau \geq T_{M,B}} F(\tau, B) \subset B_0$$

lo que muestra que $\gamma^+_{T_{M,B}}(B)$ es acotado.

Ahora pensemos en el conjunto $\tilde{B} = B \setminus \bigcup_{i=1}^r int(A_i)$, entonces

$$F(t, \tilde{B}) \subset \bigcup_{i=1}^{r} \varphi_t(A_i) = \varphi_t(\bigcup_{i=1}^{r} A_i) \subset B_0 \;\; \forall t \geq T_{\tilde{B}}$$

similarmente se tiene que $\gamma^+_{T_{\tilde{B}}}(\tilde{B})$. En cualquier caso se tiene que $\gamma^+_{T_B}(B)$ es acotado para algún $T_B \in \mathbb{R}^n$.

Ahora procedamos a demostrar que $F(t, x)$ es asintóticamente superior. Para esto, tomemos un conjunto acotado $B \subset \mathbb{R}^n$ arbitrario tal que $\gamma^+_{T_B}(B)$ es acotado para algún $T_B \in \mathbb{R}^n$. Sea $\psi_n \in F(t_n, B)$ una subsucesión arbitraria, con $t_n \to \infty$. Se ha probado anteriormente que para t_n suficientemente grande, se tiene que $F(t_n, B) \subset B_0$, entonces $\psi_n \in B_0 \subset \overline{B_0}$ para n suficientemente grande. Por otro lado, $\overline{B_0}$ es cerrado y acotado y por lo tanto compacto. En consecuencia existe una subsucesión ψ_{n_k} de ψ_n convergente en $\mathbb{R}^n$.
□

Teorema 3.46. *Si el flujo $\varphi_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es disipativo, entonces el flujo correspondiente $F(t, \cdot) \colon \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ tiene un atractor global $\mathcal{A}$ y es el cerrado más pequeño que atrae a cada conjunto acotado B $\mathbb{R}^n$.*

Demostración: Para demostrar esta afirmación es suficiente con verificar que el semiflujo F satisface las 3 condiciones del teorema 3.23. Por el lema 3.45 se tiene que $F(t, x)$ es puntualmente disipativo y asintóticamente superior.
Es claro que $F(0, x) = \{x\}$ es cerrado y si $t > 0$ $F(t, x)$ es también cerrado, esto se prueba usando que φ_t define un sistema dinámico. Como φ_t es disipativo, entonces por el lema 3.44 $F(t, \cdot)$ es semicontinua superiormente. Esto prueba la parte 2. La parte 3 también se ha probado en el Lema 3.45. Esto prueba el Teorema.
□

En ecuaciones diferenciales, normalmente se definen los flujos para tiempos positivos $(t > 0)$, ya que a veces no es posible extenderse a todo el eje real, es decir, los flujos definen un sistema semidinámico (φ_s, X). Pensemos ahora en un sistema semidinámico (φ_s, X), nos preguntamos si el teorema 3.46 se sigue cumpliendo. Notemos que aquí la función φ_t ya no tiene inversa, y por lo tanto, ya no podemos asegurar que el mapeo multivaluado así definido sea cerrado, es decir, que mande conjuntos cerrados en conjuntos cerrados. Para garantizar esto, modifiquemos un poco esta función.

Lema 3.47. *Sea $(\varphi_t, \mathbb{R}^n)$ un sistema semidinámico $(t \geq 0)$. Entonces la función multivaluada definida por*

$$F(0, x) = \{x\} \;\; y \;\; \forall t > 0 \;\; F(t, x) = \begin{cases} \overline{\varphi_t(A_i)} & x \in int(A_i) \\ \\ \overline{\bigcup_i^k \varphi_t(A_i)} & x \in \bigcap_{i=1}^k (A_i) \end{cases} \tag{19}$$

es un semiflujo multivaluado.

Demostración: Para $t = 0$ el resultado es obvio. Sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sea $y \in F(t_1 + t_2, x_0)$. Si $x_0 \in int(A_i)$ para algún $A_i \in A$ se tiene que

$$y \in \overline{\varphi_{t_1+t_2}(A_i)}$$

entonces, existen sucesiones $y_n \in \varphi_{t_1+t_2}(A_i)$, y $x_n \in A_i$ tales que

$$y_n \to y, \ \ \varphi_{t_1+t_2}(x_n) = y_n$$

pero A_i es cerrado y acotado, por lo tanto compacto, y entonces podemos tomar una subsucesión x_{n_k} de x_n, tal que $x_{n_k} \to x \in A_i$. En consecuencia $\varphi_{t_1+t_2}(x_{n_k}) = y_{n_k}$, tomando límite se tiene que $\varphi_{t_1+t_2}(x) = y$. Es decir, hemos probado que existe $x \in A_i$ tal que $\varphi_{t_1+t_2}(x) = \varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(x)) = y$. De manera similar que antes, analicemos $F(t, \varphi_{t_2}(x))$.

Si $\varphi_{t_2}(x) \in int(A_j)$ para algún $A_j \in A$, entonces

$$F(t_1, \varphi_{t_2}(x)) = \overline{\varphi_{t_1}(A_j)}$$

es claro que $\varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(x)) \in \varphi_{t_1}(A_j)$, y por lo tanto

$$y \in \varphi_{t_1}(A_j) \subset \overline{\varphi_{t_1}(A_j)} \subset F(t_1, \varphi_{t_2}(x))$$

y así

$$y \in F(t_1, \varphi_{t_2}(x)) \subset F(t_1, \varphi_{t_2}(A_i)) \subset F(t_1, \overline{\varphi_{t_2}(A_i)}) = F(t_1, \varphi_{t_2}(x_0)).$$

Si $\varphi_{t_2}(x) \in \bigcap_{j=1}^r A_j$, entonces $F(t_1, \varphi_{t_2}(x)) = \overline{\bigcup_{j=1}^r \varphi_t(A_j)}$, luego

$$y = \varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(x)) \in \bigcap_{j=1}^r \varphi_{t_1}(A_j) \subset \bigcup_{i=1}^r \varphi_{t_1}(A_j) \subset \overline{\bigcup_{i=1}^r \varphi_{t_1}(A_j)} = F(t_1, \varphi_{t_2}(x)),$$

de aquí se sigue que $y \in F(t_1, F(t_2, x_0))$. De esta manera se tiene que si $x_0 \in int(A_i)$ para algún $i \in \mathbb{N}$

$$F(t_1 + t_2, x_0) \subset F(t_1, F(t_2, x_0)).$$

Si $x_0 \in \bigcap_{i=1}^r A_i$ para algún $r \in \mathbb{N}$ entonces,

$$F(t, x_0) = \overline{\bigcup_{i}^{r} \varphi_t(A_i)}$$

Sea $y \in F(t_1 + t_2, x_0)$, ya hemos probado al principio de esta demostración que podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe $x \in \bigcup_i^r A_i$ tal que $\varphi_{t_1+t_2}(x) = y$. Igual que antes, analicemos $F(t_1, \varphi_{t_2}(x))$.
Si $\varphi_{t_2}(x) \in int(A_j)$, para algún $A_j \in A$, entonces

$$F(t_1, \varphi_{t_2}(x)) = \overline{\varphi_{t_1}(A_j)}$$

es claro que

$$y \in \varphi_{t_1}(A_j) \subset \overline{\varphi_{t_1}(A_j)} = F(t_1, \varphi_{t_2}(x))$$

y por lo tanto

$$y \in F(t_1, \varphi_{t_2}(x)) \subset F(t_1, \varphi_{t_2}(\bigcup_{i=1}^r A_i)) \subset F(t_1, \overline{\bigcup_{i=1}^r \varphi_{t_2}(A_i)}) = F(t_1, F(t_2, x_0))$$

y por último, si $\varphi_{t_2}(x) \in \bigcap_{i=1}^k A_i$, entonces

$$F(t, \varphi_{t_2}(x)) = \overline{\bigcup_{i=1}^k \varphi_{t_1}(A_i)}$$

de esta manera

$$y \in \bigcap_{i=1}^k \varphi_{t_1}(A_i) \subset \overline{\bigcup_{i=1}^k \varphi_{t_1} A_i} = F(t_1, \varphi_{t_2}(x))$$

y por lo tanto

$$y \in F(t_1, \varphi_{t_2}(x)) \subset F(t_1, \varphi_{t_2}(\bigcup_{i=1}^{r} A_i)) \subset F(t_1, \overline{\bigcup_{i=1}^{r} \varphi_{t_2}(A_i)}) = F(t_1, F(t_2, x_0)).$$

Hemos probado que para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ elementos arbitrarios, se tiene que

$$F(t_1 + t_2, x_0) \subset F(t_1, F(t_2, x_0)).$$

□

Corolario 3.48. *El teorema 3.46 se sigue cumpliendo si en lugar de tener un sistema dinámico, se tiene un sistema semidinámico* $(\varphi_t, \mathbb{R}^n)$*, y*

$F(0, x) = \{x\}$

$\forall t > 0$

$$F(t, x) = \begin{cases} \overline{\varphi_t(A_i)} & x \in int(A_i) \\ \overline{\bigcup_i^k \varphi_t(A_i)} & x \in \bigcap_{i=1}^k (A_i). \end{cases}$$

Demostración: En el lema previo se ha probado que $F(t, \cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ es un flujo multivaluado para cada $t \geq 0$. Note que este flujo también satisface las condiciones del teorema 3.23, la demostración es similar que en teorema anterior.
□

Observe que si $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ es cualquier conjunto acotado que absorbe a cada conjunto acotado respecto al semiflujo φ_t, entonces $\overline{B_0}$ es el conjunto tal que

$$F(t, x) \subset \overline{B_0} \ \ (t \geq T_B), \ \ (x \in \mathbb{R}^n).$$

Para evitar confusiones de los conjuntos ω-límite para el flujo φ_t y el semiflujo multivaluado F, los denotaremos por $\omega_\varphi(B)$ y $\omega_F(B)$ respectivamente.

Observación 3. *Note que si el semiflujo F es puntualmente disipativo, el teorema 3.23 muestra que $\mathcal{A} = \omega(B_1)$. En donde B_1 es una vecindad del conjunto atrayente $\overline{B_0}$. Luego, B_1 es acotado y por el teorema 3.9 parte* 2) *se tiene que $\omega(B_1) = \mathcal{A}$ es compacto.*

Algo que resulta natural preguntarnos es, si F y φ_t tienen atractores $\mathcal{A}$ y $\tilde{\mathcal{A}}$ respectivamente, qué relación hay entre ellos. Resulta que estos atractores son iguales.

Teorema 3.49. *Sea $(\varphi_t, \mathbb{R}^n)$ un sistema semidinámico, y $F(t, \cdot)\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ el semiflujo multivaluado correspondiente. Entonces existen atractores $\mathcal{A}$ y $\tilde{\mathcal{A}}$ del semiflujo multivaluado F y φ_t respectivamente. Y además $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$.*

Demostración: Sea $B_0 \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto absorbente para el semiflujo φ_t. Por el teorema 5.1 de [**9**], el flujo φ_t tiene un atractor global definido por $\tilde{\mathcal{A}} = \omega_\varphi(B_0)$. Por otro lado, la observación 3 afirma que el atractor de F está dado por $\mathcal{A} = \omega_F(B_1)$, en donde $B_1 = N(\overline{B_0}, \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$.

En el lema 3.45 se ha probado que para cualquier conjunto acotado $B \subset \mathbb{R}^n$, y $t \in \mathbb{R}^+$

$$F(t, B) \subset \overline{\varphi_t(\bigcup_{i=1}^{r} A_i)}$$

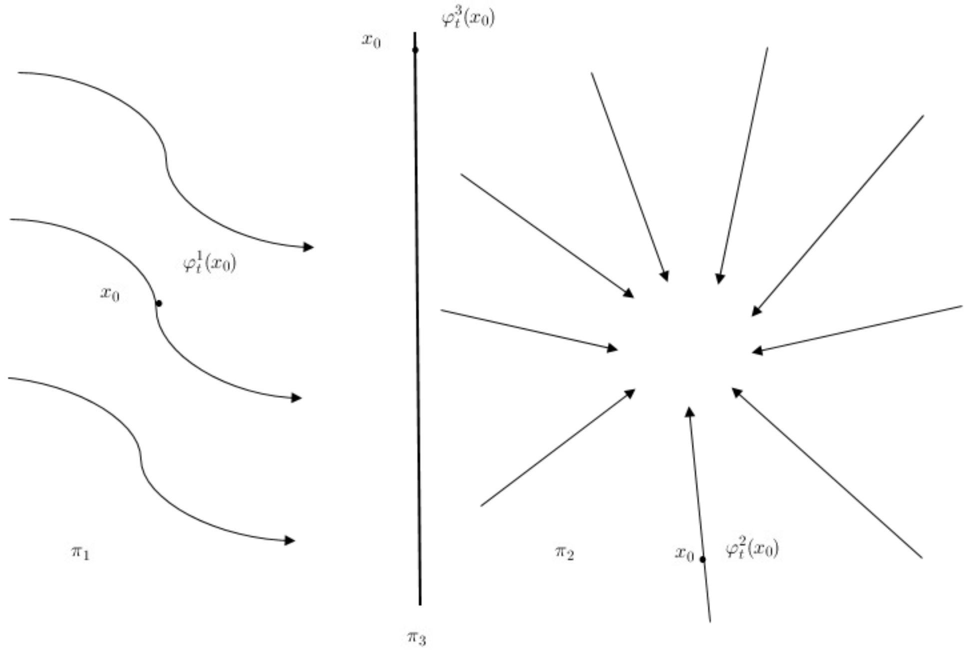

FIGURA 5. Flujo discontinuo

donde $B \subset \bigcup_{i=1}^r A_i$. Por otro lado, como $M = \bigcup_{i=1}^r A_i$ es acotado y como $\tilde{\mathcal{A}}$ es atractor de φ_t, se tiene que para toda vecindad $N(\tilde{\mathcal{A}}, \epsilon)$, existe un tiempo $T_B \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\overline{\varphi_t(M)} \subset N(\tilde{\mathcal{A}}, \epsilon) \;\; \forall t \geq T_B$$

por lo que

$$F(t, B) \subset \overline{\varphi_t(M)} \subset N(\tilde{\mathcal{A}}, \epsilon) \;\; \forall t \geq T_B$$

es decir, $\tilde{\mathcal{A}}$ es un conjunto atrayente cerrado para el semiflujo multivaluado F. Por otro lado, por el lema 3.19 inciso b) se tiene que $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$.

Ahora probemos la otra contención. Note que $\tilde{\mathcal{A}} = \omega_\varphi(B_0)$ es un conjunto negativamente invariante, es decir

$$\omega_\varphi(B_0) \subset \varphi_t(\omega_\varphi(B_0)) \;\; \forall t \in \mathbb{R}^+$$

luego, de la definición de F

$$\omega_\varphi(B_0) \subset \varphi_t(\omega_\varphi(B_0)) \subset F(t, \omega_\varphi(B_0)) \;\; \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

es decir, el conjunto $\omega_\varphi(B_0)$ es un conjunto cerrado negativamente invariante respecto al semiflujo F. Usando el Lema 3.19 inciso a), se tiene que $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$. Por lo que $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.
□

Note que siempre se trabaja con la condición de que el flujo φ_t sea continuo, resulta que el flujo multivaluado es semicontinuo superiormente como lo muestra el lema 3.44. Esto nos lleva a cuestionarnos si existen flujos discontinuos tales que se sigue cumpliendo el lema 3.44.

Para esto vamos a considerar el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ y lo vamos a partir en dos conjuntos

$$\pi_1 = \{(x, y) : x \leq 0\} \;\; y \;\; \pi_2 = \{(x, y) : x \geq 0\}.$$

Con teselasiones $T_1 = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ y $T_2 = \{\tilde{A}_i : i \in \mathbb{N}\}$ respectivamente, y pongamos $\pi_3 = \pi_1 \cap \pi_2$. Consideremos los flujos

$$\varphi_t^i(x) \in \mathbb{R}^2, \quad x \in \pi_i \setminus \pi_j, \;\; (i, j = 1, 2, \;\; i \neq j).$$

Y definamos $\varphi_t(x) = x$, si $x \in \pi_3$. Supongamos que los conjuntos $\pi_1 \setminus \pi_2$ y $\pi_2 \setminus \pi_1$ son invariantes respecto a los flujos φ_t^1 y φ_t^2 respectivamente. Ahora definamos el flujo $\varphi_t \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como

$$\varphi_t(x_0) = \begin{cases} \varphi_t^1(x_0) & x_0 \in \pi_1 \setminus \pi_2 \\ x_0 & x_0 \in \pi_3 \\ \varphi_t^2(x_0) & x_0 \in \pi_2 \setminus \pi_1. \end{cases}$$

Así el flujo definido resulta ser discontinuo en el eje $X = 0$, o mejor dicho sobre π_3. Por la definición del operador F se tiene

$$F(0, x_0) = \{x_0\}$$

y si $t > 0$

$$F(t, x_0) = \bigcup_{A \in T_1 \cup T_2, \; x_0 \in A} \varphi_t(A).$$

Observación 4. *El operador F aplicado al flujo discontinuo es un semiflujo multivaluado semicontinuo superiormente.*

Demostración: La prueba se va hacer por casos, el primero trabajaremos cuando estemos en el conjunto $\pi_1 \setminus \pi_2$, segundo cuando estemos en el conjunto $\pi_2 \setminus \pi_1$ y por último en π_3.

Sean $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ y $x_0 \in \mathbb{R}^2$ elementos arbitrarios. Y tomemos $y \in F(t_1 + t_2, x_0)$

1) Si $x_0 \in \pi_1 \setminus \pi_2$ y $x_0 \in A_i$, para algún $A_i \in T_1$, se tiene

$$F(t_1 + t_2, x_0) = \varphi_{t_1+t_2}^1(A_i \setminus \pi_2) \cup \varphi_{t_1+t_2}^3(A_i \cap \pi_3).$$

a). Si $y \in \varphi_{t_1+t_2}^1(A_i \setminus \pi_2)$, entonces existe $x \in A_i \setminus \pi_2$, tal que $y = \varphi_{t_1+t_2}^1(x)$. Note que como $\pi_1 \setminus \pi_2$ es invariante respecto al semiflujo φ_t^1, se tiene que $\varphi_{t_2}^1(x) \in int(A_j)$, para algún $A_j \in T_1$ o $\varphi_{t_2}^1(x) \in \bigcap_{i=1}^r A_i$. Si $\varphi_{t_2}^1(x) \in int(A_j)$, entonces

$$F(t_1, \varphi_{t_2}^1(x)) = \varphi_{t_1}^1(A_j \setminus \pi_2) \cup \varphi_{t_1}^3(A_j \cap \pi_3)$$

es claro que

$$y = \varphi_{t_1}^1(\varphi_{t_2}^1(x)) \in \varphi_{t_1}^1(A_j \setminus \pi_2) \subset F(t_1, \varphi_{t_2}^1(x))$$

por lo que

$$y \in F(t_1, \varphi_{t_2}^1(x)) \subset F(t_1, \varphi_{t_2}^1(A_i \setminus \pi_2)) \subset F(t_1, F(t_2, x_0)).$$

Si $\varphi_{t_2}^1(x) \in \bigcap_{i=1}^r A_i$, entonces

$$F(t_1, \varphi_{t_2}^1(x)) = \bigcup_{i=1}^r \varphi_{t_1}^1(A_i \setminus \pi_2) \cup \varphi_{t_1}^3((\cup_{i=1}^r A_j) \cap \pi_3)$$

y

$$y \in \varphi_{t_1}^1(\cap_{i=1}^r A_i) = \bigcap_{i=1}^r \varphi_{t_1}^1(A_i) \subset \bigcup_{i=1}^r \varphi_{t_1}^1(A_i) \subset F(t_1, \varphi_{t_2}^1(x))$$

por lo tanto

$$y \in F(t_1, \varphi^1_{t_2}(x)) \subset F(t_1, \varphi^1_{t_2}(A_1 \setminus \pi_3)) \subset F(t_1, F(t_2, x_0)).$$

b). Si $y \in \varphi^3_{t_1+t_2}(A_1 \bigcap \pi_3)$ obviamente se cumple la contención.

2) Si $x_0 \in \bigcap_{i=1}^k A_i$, entonces

$$F(t, x_0) = \bigcup_{i=1}^{k} \varphi^1_t(A_i \setminus \pi_2) \bigcup \varphi^3_t((\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \cap \pi_3).$$

Si $y \in \bigcup_{i=1}^k \varphi^1_{t_1+t_2}(A_i \setminus \pi_2)$, necesariamente $y \in \varphi^1_t(A_r \setminus \pi_2)$ para algún $1 \leq r \leq k$, que es justamente como en el caso 1, por lo que con argumentos similares se tiene que

$$y \in F(t_1, \varphi^1_{t_2}(A_r \setminus \pi_3)) \subset F(t_1, \bigcup_{i=1}^{k} \varphi^1_{t_2}(A_i \setminus \pi_3)) \subset F(t_1, F(t_2, x_0)).$$

Si $y \in \varphi^3_t((\cup_{i=1}^k A_i) \cap \pi_3)$, obviamente se tiene la desigualdad.

3) La prueba es similar para cuando $x_0 \in \pi_2 \setminus \pi_3$.

4) Ahora procedamos a demostrar la contención, si $x_0 \in \pi_3$. Si $x_0 \in \pi_3$, entonces existen $A_1, A_2, ..., A_k \in T_1$ y $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_s \in T_2$, tal que $x_0 \in \bigcap_{i=1}^k A_i$ y $x_0 \in \bigcap_{i=1}^s \tilde{A}_i$. Por la definición de F, se tiene

$$F(t, x_0) = \bigcup_{i=1}^{k} \varphi^1_t(A_i \setminus \pi_3) \bigcup (\bigcup_{i=1}^{s} \varphi^2_t(\tilde{A}_i \setminus \pi_3)) \bigcup \varphi^3_t(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \cap \pi_3) \bigcup \varphi^3_t(\bigcup_{i=1}^{s} \tilde{A}_i) \bigcap \pi_3).$$

Notemos que si $y \in \bigcup_{i=1}^k \varphi^1_t(A_i \setminus \pi_3)$ o $(\bigcup_{i=1}^s \varphi^2_t(\tilde{A}_i \setminus \pi_3))$, caemos en los casos anteriores. El caso en el que $y \in \varphi^3_t(\bigcup_{i=1}^k A_i) \bigcap \pi_3)$ o $\varphi^3_t(\bigcup_{i=1}^s \tilde{A}_i) \bigcap \pi_3)$, también es obvio.

Esto prueba que F es un semiflujo multivaluado.

Ahora demostremos que F es semicontinua superiormente. Si $x \in \pi_1 \setminus \pi_2$, entonces $x \in int(A_i)$ para algún $A_i \in T_1$, o $x \in \bigcap_{i=1}^k A_i$. Si $x \in int(A_i)$, tomemos un abierto $M \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(t, x) = \varphi_t(A_i) = \varphi^1_t(A_i \setminus \pi_2) \bigcup \varphi^3_t(A_i \bigcap \pi_3) \subset M \ \ (\forall t > 0).$$

Por otro lado, siendo $int(A_i)$ abierto, existe una vecindad $V = V_x$ de x tal que $V \subset int(A_i)$, y por definición de F, es claro que

$$F(t, V) \subset M \ \ \forall t > 0.$$

Si $x \in \bigcap_{i=1}^k A_i$, tomemos un abierto $M \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(t, x) = \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_t(A_i) = \bigcup_{i=1}^{k} \varphi^1_t(A_i \setminus \pi_3) \bigcup \varphi^3_t(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \subset M \ \ (\forall t > 0).$$

Es claro que $x \in int(\bigcup_{i=1}^k A_i)$ y por lo tanto, por ser este conjunto un conjunto abierto, existe una vecindad $V = V_x$, tal que $V \subset int(\bigcup_{i=1}^k A_i)$. Nuevamente de la definición de F, es claro que

$$F(t, V) \subset M \ \ (\forall t > 0).$$

La prueba es similar para cuando $x \in \pi_2 \setminus \pi_1$.

Si $x \in \pi_3$, tomemos un abierto $M \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(t,x_0) = \bigcup_{i=1}^{k} \varphi_t^1(A_i \setminus \pi_3) \bigcup (\bigcup_{i=1}^{s} \varphi_t^2(\tilde{A}_i \setminus \pi_3)) \bigcup \varphi_t^3(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \bigcap \pi_3) \bigcup \varphi_t^3(\bigcup_{i=1}^{s} \tilde{A}_i) \bigcap \pi_3) \subset M.$$

Nuevamente usando que $int((\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \bigcup (\bigcup_{i=1}^{s} \tilde{A}_i))$ es abierto, existe un abierto $V = V_x$ de x con $V \subset M$.
Analicemos

$$F(t,V) = \bigcup_{x \in V} F(t,x) \ \ (\forall t > 0).$$

Note que para los elementos $x \in V$, se tienen varios casos. En el primero x está en algunos A_i para $1 \leq i \leq k$, segundo x está en algunos $\tilde{A}_i$, para $1 \leq i \leq s$, o bien en la intersección de algunos A_i con algunos $\tilde{A}_j$. En cualquiera de los casos, es claro que

$$F(t,x) \subset M \ \ (\forall t > 0).$$

Por lo que

$$F(t,V) \subset M \ \ (\forall t > 0).$$

□

Ejemplo 3.50. *Consideremos el sistema acoplado.*

(20) $$u_t = u_{xx}, \quad v_t = v_{xx} + uv$$

con condiciones iniciales

(21) $$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0,$$

y

(22) $$u(x,0) = \varphi(x), \quad v(x,0) = \phi(x).$$

El problema está bien definido en $X = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, donde

$\mathcal{H}_1$=$\{ \ \psi \in L^2[0,1] \mid \psi$ es absolutamente continua, $\psi' \in L^2[0,1]$ y $\psi(0) = \psi(1) = 0\}$, y

$\mathcal{H}_1$=$\{ \ \psi \in L^2[0,1] \mid \psi, \psi'$ son absolutamente continuas, $\psi'' \in L^2[0,1]$ y $\psi'(0) = \psi'(1) = 0\}$.

El espacio X es normado, con norma

$$\|(\phi,\psi)\|_X = \|\phi\|_{\mathcal{H}_1} + \|\psi\|_{L^2},$$

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}_1} = \|\phi\|_{L^2} + \|\phi''\|_{L^2},$$

y $\|.\|_{L^2}$ es la norma usual en $L^2[0,1]$. La solución del sistema está dada por

$$u = e^{-tA_1}\phi, \quad v = e^{-tA_2}\psi + \int_0^t e^{-(t-\tau)A_2}(Kv)(\tau)d\tau,$$

$$(Kv) = (uv)(\tau);$$
$$u(x,0) = \phi(x) \in \mathcal{H}_1,$$
$$v(y,0) = \psi(y) \in \mathcal{H}_2,$$

donde,

$$A_1 = -\frac{d^2}{dx^2}; \;\; D(A_1) = \mathcal{H}_1;$$

$$A_2 = -\frac{d^2}{dx^2}; \;\; D(A_2) = \mathcal{H}_2;$$

Por lo que este sistema define un sistema semidinámico (S_t, X), con flujo

$$S_t(u_0, v_0) = (u, v), \quad (u_0, v_0) = (\phi, \psi).$$

Notemos que el espacio X es de dimensión infinita, por lo que si tratamos de definir a partir de este flujo un semiflujo generalizado F, dado por (19) necesitamos definir una teselación en este espacio, cosa que hasta el momento no se tiene conocimiento, es decir, no podemos garantizar la existencia de teselaciones en espacios cualesquiera por el momento. El problema de definir un sistema semidinámico generalizado a partir de uno no generalizado en espacios de dimensión infinita, se puede reducir a probar existencia de teselaciones en cualquier espacio arbitrario.

Conclusiones

A continuación se resume lo más destacado de este trabajo de tesis.

1. En el capítulo 2, empezamos preguntándonos si existirían funciones o soluciones que satisfagan el problema de valores iniciales

   $$\dot{x} = f(x) \quad x(0) = x_0$$

   donde f es discontinua en un conjunto numerable D.

   Mediante la técnica de soluciones a inclusiones diferenciales y la teoría se selecciones pudimos dar soluciones a este problema, estas soluciones resultan ser absolutamente continuas.

2. Motivados en la existencia de varias soluciones de sistemas estudiados en el capítulo 2, damos paso a la teoría de flujos generalizados. De hecho, a partir de estas soluciones que llamamos trayectorias, probamos que el conjunto que consta de estas trayectorias es un semiflujo generalizado.

3. Los semiflujos generalizados F generados a partir de sistemas semidinámicos φ, definidos en la ecuación (19) del capítulo 3, se hizo cuando el flujo φ es continuo. No obstante, probamos que aunque el semiflujo φ fuera discontinuo, el semiflujo generalizado F dado por (19), resulta ser semicontinuo superiormente igual que en el caso continuo, dando un paso muy importante, ya que existe mucha teoría para flujos generalizados semicontinuos superiormente.

   Cabe notar que estos semiflujos generalizados se generaron a partir de uno no generalizado definido en el espacio $\mathbb{R}^n$. La pregunta que nos hacemos aquí es, si es posible generar un semiflujo generalizado F, a partir de un sistema semidinánico (φ_t, X), en un espacio de dimensión infinita X. A continuación se dan algunas ideas.

   a) Una primera respuesta sería definir el flujo generalizado como en (19), el único problema es que necesitamos de alguna teselación A para el espacio X. Si es posible esto, se tendría lo deseado. Por lo que en este caso el problema se reduce a garantizar teselaciones en cualquier espacio arbitrario X.
   b) Ver si es posible definir un semiflujo generalizado a partir de un sistema semidinámico de manera análoga que (19). Es decir, involucrar el semiflujo que define el sistema semidinámico para generar uno generalizado.

Por lo que queda abierto el problema de definir un sistema semidinámico generalizado a partir de uno no generalizado, en espacios de dimensión infinita. La solución al problema queda resuelto si es posible encontrar teselaciones en este espacio.

Bibliografía

[1] A. F. Filippov. *Differential Ecuations with Discontinuous Righthand Sides.* Mathematics and its applications (Soviet series). Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1988.

[2] A. V. Babin. *Global attractors in PDE. Handbook of Dynamical Systems.* Volume IB, Chapter 14. Editors B. Hasselblatt and A. Katok. Elsevier B. V. 2006.

[3] A. V. Borisovich, B. I. Gelman, A. D. Myskis and V. V. Obuhovsky, *Introduction to the Theory of Multivalued Maps.* VGU, Voronezh, 1986.

[4] A. Wawrzynczyk. *Introducción al análisis funcional.* Primera edición, 1993, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa

[5] D. E. Varberg. *On Absolutely Continuous Functions.* The American Mathematical Monthly, 831-841 (1965).

[6] G. R. Sell. *Global Attractors for the Three-Dimensional Navier-Stokes Equations.* University of Minnesota, Plenum Publishing Corporation 1996.

[7] H. Kestelman, M. Sc. *Modern Theories of Integration.* University College, London 1937.

[8] H. L. Royden, P.M. Fitzpatrick. *Real Analysis.* Pearson Education Asia Limited and China Machine Press, 2010.

[9] I. D. Chueshov. *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems.* from the Russian edition («ACTA», 1999).

[10] I. L. Iribarren. *Topología de espacios métricos.* Universidad Simón Bolívar, Caracas, Limusa Noriega editores, 2008.

[11] J. H. Arredondo and A. Wawrzyñczyk. *Medidas e Integrales.* Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, México (2010).

[12] J. K. Hale. *Asymtotic Behavior of Dissipative System.* American Mathematical Society (1989).

[13] J. M. Arrieta, A. Rodríguez-Bernal, J. Valero. *Dinámica de una ecuación de reacción-difusión con discontinuidades.* Sevilla, 2007.

[14] J. M. Ball. *Continuity Properties and Global Attractors of Generalized Semiflows and the Navier-Stokes Equations.* New York, 475–502, Springer-Verlag 1998.

[15] J. M. Ball. *Global Attractors for Damped Semilinear Wave Equations. Discrete and continuous dynamical systems.* 31-52, (2004).

[16] J. Munkres. *Topology.* Prentice Hall, New Jersey, 2000.

[17] J. P. Aubin. *Viability theory.* Birkhauser Boston 1991.

[18] J. P. Aubin and A. Cellina. *Set-Valued Maps and Viability Theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[19] J. P. Aubin and H. Frankowska. *Set-Valued Analysis.* Birkauser, Boston, 1990.

[20] J. P. Aubin and H. Frankowska. *Set-Valued Analysis.* Universidad de Paris-Dauphine and CNRS.

[21] J. Valero. *Attractors of Parabolic Equations Without Uniqueness.* Plenum Publishing Corporation (2001).

[22] L. Perko. *Differential equations and dynamical systems.* Springer, New York, 2001.

[23] L. S. Flores. *Estabilidad robusta y síntesis de ciclos límite en sistemas controlables de orden n.* Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Pachuca Hidalgo, 2015.

[24] M. I. Vishik and V. V. Chepyzhov. *Trajectory attractors of equations of mathematical physics.* 637–731 (2011).

[25] O. Ladyzhenskaya. *Attractor for semigroups and evolution equations.* Cambridge Univertity Press (1991).

[26] P. Seibert, J. H. Arredondo R. and L. Aguirre C. *Attractors for semiflows in metric spaces.* Universidad Autónoma Metropolitana, I. 2010.

[27] R. Rossi, A. Segatti, U. Stefanelli. *Global attractors for gradient flows in metric spaces.* J. Math. Pures Appl. 95 (2011) 205-244.

[28] R. Teman. *Infinite-Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics.* Springer-Verlag (1988).

[29] V. R. Rios. *Curso introductorio sobre Inclusiones Diferenciales.* Universidad del Zulia, Venezuela.

[30] V. S. Melnik and J. Valero. *On Attractors of Multivalued Semi-Flows and Differential Inclusions.* 88-111 (1998).

[31] V. V. Fedorchuk and V. V. Filippov. *General Topology.* MGU, Moscow, 1988.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00181
Matrícula: 2153805784

SISTEMAS DINÁMICOS GENERALIZADOS

En la Ciudad de México, se presentaron a las 13:00 horas del día 27 del mes de julio del año 2018 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. JOSE ANTONIO GARCIA RODRIGUEZ
DR. FRANCISCO JAVIER MENDOZA TORRES
DR. JUAN HECTOR ARREDONDO RUIZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: GENARO MONTAÑO MORALES

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

GENARO MONTAÑO MORALES
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. JOSE ANTONIO GARCIA RODRIGUEZ

VOCAL

DR. FRANCISCO JAVIER MENDOZA TORRES

SECRETARIO

DR. JUAN HECTOR ARREDONDO RUIZ