UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Casa abierta al tiempo

Unidad Iztapalapa

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

POSGRADO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

SUBESPACIOS DENSOS DE PSEUDOCARÁCTER NUMERABLE EN ESPACIOS DE FUNCIONES

Tesis que presenta

Joel Alberto Aguilar Velázquez

para obtener el grado académico de

Doctor en Ciencias (Matemáticas)

dirigida por

Dr. Vladimir Tkachuk Vladimirovich

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Richard Gordon Wilson Roberts

Secretario: Dr. Mikhail Tkachenko Gelievich

Vocal: Dr. Ángel Tamariz Mascarúa

Vocal: Dr. Reynaldo Rojas Hernández

Iztapalapa, Ciudad de México, Octubre 2019

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa
Casa abierta al tiempo

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
POSGRADO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

SUBESPACIOS DENSOS DE PSEUDOCARÁCTER NUMERABLE EN ESPACIOS DE FUNCIONES

Tesis que presenta
Joel Alberto Aguilar Velázquez
para obtener el grado académico de
Doctor en Ciencias (Matemáticas)
dirigida por
Dr. Vladimir Tkachuk Vladimirovich

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Richard Gordon Wilson Roberts

Secretario: Dr. Mikhail Tkachenko Gelievich

Vocal: Dr. Ángel Tamariz Mascarúa

Vocal: Dr. Reynaldo Rojas Hernández

Iztapalapa, Ciudad de México, Octubre 2019

Índice general

Resumen

La tesis es un trabajo sobre subespacios densos y uniformemente densos de pseudocarácter numerable en espacios de funciones con la topología de convergencia puntual.
El primer capítulo contiene los preliminares necesarios: los hechos básicos de C_p-teoría y una introducción breve a la teoría de invariantes cardinales.
El segundo capítulo presenta los avances obtenidos. Los resultados principales incluyen una amplia generalización de un teorema de Amirdzhanov publicado en 1985 y una solución completa de un problema abierto publicado en 2003.
Los resultados de la tesis fueron publicados en dos artículos: uno en Topology and Its Applications y otro en Journal of Mathematical Analysis and Applications.

Introducción

Este trabajo se enmarca dentro de la C_p-teoría, es decir, es un estudio de espacios de funciones reales con la topología de la convergencia puntual. La C_p-teoría surgió en los años 70 del siglo pasado cuando Arhangel'skii obtuvo resultados cruciales para unir y clasificar muchos teoremas dispersos de Topología General, Análisis Funcional y Teoría Descriptiva de Conjuntos. Desde entonces la C_p-teoría es un área establecida de Álgebra Topológica con mucha actividad tanto en México como internacionalmente. Entre los matemáticos que contribuyeron de manera importante en su desarrollo, se encuentran, Arhangel'skii, Pytkeev, Gul'ko, Sipacheva, Reznichenko, Baturov, Gruenhage, Tamariz, Tkachuk, Uspensky, Okunev y Rojas Hernández.

En esta tesis estudiamos las condiciones bajo las cuales los espacios de funciones continuas tienen subespacios densos de pseudocarácter numerable. Es común obtener información sobre un espacio topológico a través de sus subespacios densos. En muchos casos el que una propiedad esté presente en un subespacio denso Y de un espacio X, implica que X tenga la misma propiedad. Por ejemplo, si Y tiene una π-base numerable, entonces X también tiene una π-base numerable; si Y es pseudocompacto, entonces X es pseudocompacto y si Y tiene la propiedad de Souslin, entonces X también tiene la propiedad de Souslin. Sin embargo, es más común que Y tenga una propiedad $\mathcal{P}$ mientras que X solo tenga una versión más débil de $\mathcal{P}$. Entre otros casos, si X tiene un subespacio denso Čech-completo, entonces X no necesariamente es Čech-completo, pero tiene la propiedad de Baire. Si Y en numerablemente compacto, entonces X no necesariamente es numerablemente compacto, pero es pseudocompacto.

En los espacios de funciones $C_p(X)$ hay una estructura algebraica compatible con su topología, lo que sugiere que la existencia de un subespacio denso de $C_p(X)$ con una propiedad $\mathcal{P}$ implica que $C_p(X)$ también tiene esta propiedad con más frecuencia que en espacios arbitrarios. Por ejemplo, si

$C_p(X)$ tiene un subespacio denso metrizable, entonces $C_p(X)$ también es metrizable; si X es compacto y $C_p(X)$ tiene un subespacio denso Lindelöf Σ, entonces también es Lindelöf Σ.

Los espacios X tales que $\psi(Y) \leq \omega$ para algún subespacio denso $Y \subset X$ fueron estudiados sistematicamente por Amirdzhanov en [3] y [4]; él los llamó ψ-separables. El estudio de dichos espacios es interesante porque todavía no está resuelto en ZFC el siguiente problema: ¿existe un espacio Lindelöf de pseudocarácter numerable de cardinalidad mayor que $\mathfrak{c}$? Evidentemente, la ψ-separabilidad también es una generalización de la separabilidad. Amirdzhanov demostró, entre otras cosas, que cualquier producto de espacios ψ-separables es ψ-separable y la existencia de un subespacio $Y \subset X$ tal que $|Y| = |X|$ y $\psi(Y) \leq \omega$ implica que $C_p(X)$ es ψ-separable.

La tesis consta de dos capítulos, de los cuales el primero es de preliminares, en el que se formulan y explican algunos resultados clásicos de Topología General y C_p-teoría, como el resultado que muestra que la teoría de espacios de Tychonoff es suficiente para el estudio de C_p-teoría y el teorema de Nagata, que estipula que dos espacios X y Y son homeomorfos si y sólo si las álgebras $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son topológicamente isomorfas.

El segundo capítulo de esta tesis se divide en dos secciones. La primera sección está enfocada en la ψ-separabilidad de espacios de funciones. Diremos que un espacio X es F_σ-discreto si X se puede representar como una unión numerable de subespacios cerrados y discretos de X. Todo espacio F_σ-discreto es un σ-espacio y por consiguiente también es de pseudocarácter numerable. Demostraremos que todos los espacios iterados de funciones $C_{p,n}(X)$ tienen un subespacio denso F_σ-discreto si X es metrizable o un compacto de Corson. Si X es un espacio de Gul'ko, es decir, si $C_p(X)$ es Lindelöf Σ, entonces $C_p(X)$ es ψ-separable. Además, si X es Lindelöf Σ, entonces $C_pC_p(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto. El espacio $C_p(X)$ tiene un subespacio denso de i-peso numerable si y sólo si X se condensa en algún espacio de peso menor o igual que $\mathfrak{c}$. Uno de los resultados principales de esta tesis es el Teorema 2.1.21 que dice que la existencia en $X \times X$ de un subespacio Y tal que $\psi(Y) \leq \omega$ y $|Y| \geq iw(X)$ implica que $C_p(X)$ es ψ-separable. Es fácil ver que dicho teorema es una generalización del resultado de Amirdzhanov citado arriba.

Existen muchas propiedades que no están presentes en los espacios de funciones, pero sí en sus subespacios densos. Por ejemplo, si X es discreto, entonces

$C_p(X) = \mathbb{R}^X$ tiene un subespacio denso Fréchet-Urysohn y σ-compacto denso, mientras que la estrechez de $C_p(X)$ puede ser arbitrariamente grande. Este ejemplo también muestra que no necesariamente está presente cualquier propiedad de compacidad en X dado que exista un subespacio denso σ-compacto en $C_p(X)$. Ésta fue una de las motivaciones de Tkachuk para estudiar en [28] las propiedades cuya presencia en subespacios uniformemente densos de $C_p(X)$ implica que también estén presentes en $C_p(X)$.
Un conjunto $A \subset C_p(X)$ es *uniformemente denso* en $C_p(X)$ si para cada $f \in C_p(X)$ y $\varepsilon > 0$ existe $g \in A$ tal que $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Este concepto surge de manera natural si se consideran las topologías uniformes o compacto-abiertas en espacios de funciones, así como también en el contexto de aplicaciones del teorema de Stone-Weierstrass.
En [28], Tkachuk demostró que si $C_p(X)$ tiene un subespacio Lindelöf Σ uniformemente denso, entonces $C_p(X)$ también es Lindelöf Σ. Lo mismo es cierto para la K-analiticidad, analiticidad y la propiedad de Fréchet-Urysohn. Sin embargo, la existencia de un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable en $C_p(X)$ no implica que $\psi(C_p(X)) \leq \omega$; esto también fue establecido en [28]. En el mismo artículo Tkachuk preguntó si la existencia en $C_p(X)$ de un subespacio uniformemente denso de i-peso numerable implica que $C_p(X)$ tiene i-peso numerable.

En la segunda sección del segundo capítulo de esta tesis se demuestra que $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de i-peso numerable si y sólo si la cardinalidad de $C_p(X)$ no excede $\mathfrak{c}$. Este criterio permite encontrar un ejemplo que muestra que la respuesta a la pregunta de Tkachuk es negativa.
También se prueba, para cualquier cardinal infinito κ, que $\mathbb{R}^\kappa$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable si y sólo si $2^\kappa = \kappa^\omega$. Como consecuencia, el espacio $\mathbb{R}^{\omega_1}$ tiene un subespacio uniformemente denso de i-peso numerable si y sólo si tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable y lo último sucede si y sólo si $2^{\omega_1} = \mathfrak{c}$.
Resulta que la clase $\mathcal{K}$ de espacios compactos X tales que $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable es bastante amplia. Se demuestra, en particular, que un compacto X pertenece a $\mathcal{K}$ si $w(X) = \kappa$ y la compactificación unipuntual $A(\kappa)$ de un espacio discreto de cardinalidad κ se encaja en X. También pertenecen a $\mathcal{K}$ todos los compactos cero-dimensionales X que tienen un subespacio discreto D tal que $|D| = w(X)$. Todos los cubos de Cantor así como los compactos diádicos cuyo peso es un cardinal sucesor, también pertenecen a la clase $\mathcal{K}$.
Recuérdese que los espacios iterados de funciones sobre un espacio X se

definen de la siguiente manera: $C_{p,0}(X) = X$ y $C_{p,n+1}(X) = C_p(C_{p,n}(X))$ para todo $n \in \omega$. El último resultado principal de esta tesis establece que si X es un compacto de Gul'ko, entonces cada espacio iterado $C_{p,n}(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable. Este teorema es nuevo incluso para compactos de Eberlein.

Los resultados de la tesis fueron publicados en los artículos [1] y [2].

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo consta de seis secciones. En la primera sección presentamos las definiciones y conceptos básicos de C_p-teoría, así como dos resultados fundamentales: el teorema que muestra que la teoría de espacios de Tychonoff es suficiente para el estudio de C_p-teoría y el teorema de Nagata, que estipula que dos espacios X y Y son homeomorfos si y sólo si las álgebras $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son topológicamente isomorfas.
En la segunda sección se habla de funciones cardinales clásicas en espacios generales y de funciones, haciendo énfasis en los resultados sobre funciones cardinales duales en C_p-teoría, como el teorema de Arhangel'skii-Pytkeev.
La propiedad Lindelöf Σ es el tema de la tercera sección de este capítulo; se presentan resultados que muestran la importancia de esta propiedad en C_p-teoría, tales como el teorema de Okunev sobre t-invarianza, el teorema de Baturov sobre subespacios Lindelöf en espacios de funciones y el teorema de Tkachuk sobre la distribución de la propiedad Lindelöf Σ en espacios iterados de funciones.
En la cuarta sección se caracterizan tres clases importantes de espacios compactos íntimamente relacionadas con la C_p-teoría y el Ánalisis Funcional: se trata de los compactos de Corson, Gul'ko y Eberlein.
En la quinta sección se presentan los resultados obtenidos por Amirdzhanov en sus artículos seminales sobre ψ-separabilidad.
Finalmente, en la sexta sección se exponen los resultados obtenidos por Tkachuk en el estudio sistemático que realizó sobre subespacios uniformemente densos en espacios de funciones.

1.1. Espacios $C_p(X)$: información básica

Todos los espacios tratados en esta tesis se considerarán de Tychonoff, lo cual se justificará con el Teorema 1.1.6. Dado un espacio X, denotaremos su topología por $\tau(X)$ y a la familia de todos los subconjuntos de X por $exp(X)$; definamos $\tau^*(X) = \tau(X) \setminus \{\emptyset\}$ y $\tau(A, X) = \{U \in \tau(X) : A \subset U\}$ para cada $A \subset X$. Si $A = \{x\}$ escribiremos $\tau(x, X)$ en lugar de $\tau(\{x\}, X)$. Dado un conjunto A y un cardinal κ, sean $[A]^{<\kappa} = \{B \subset A : |B| < \kappa\}$ y $[A]^{\leq\kappa} = \{B \subset A : |B| \leq \kappa\}$.

Definición 1.1.1 Para cualesquiera espacios X y Y denotamos por $C(X, Y)$ al conjunto de todas las funciones continuas de X a Y; si tiene la topología heredada de Y^X entonces el espacio respectivo es denotado por $C_p(X, Y)$. Escribiremos $C(X)$ en lugar de $C(X, \mathbb{R})$ y $C_p(X)$ en lugar de $C_p(X, \mathbb{R})$.

Definición 1.1.2. Dados $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $O_1, \ldots, O_n \in \tau(\mathbb{R})$, consideremos al conjunto $[x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] = \{f \in C(X) : f(x_i) \in O_i$ para todo $i = 1, \ldots, n\}$. La familia $\{[x_1, \ldots, x_n; O_1, \ldots, O_n] : n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X$ y $O_1, \ldots, O_n \in \tau(\mathbb{R})\}$ es una base para $C_p(X)$ y es conocida como la base canónica.

Definición 1.1.3. Dados $f \in C_p(X)$, un subconjunto finito $E \subset X$ y $\varepsilon > 0$, consideremos al conjunto $U(f, E, \varepsilon) = \{g \in C(X) : |f(x) - g(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in E\}$. La familia $\{U(f, E, \varepsilon) : E \in [X]^{<\omega}$ y $\varepsilon > 0\}$ es una base local de $C_p(X)$ en f y es conocida como la base local canónica.

Del siguiente resultado se sigue que $C_p(X)$ es un *álgebra topológica*.

Proposición 1.1.4. *Sea X un espacio arbitrario y consideremos los mapeos $s : C_p(X) \times C_p(X) \to C_p(X)$ y $p : C_p(X) \times C_p(X) \to C_p(X)$ definidos como $s(f, g) = f + g$ y $p(f, g) = f \cdot g$ para cada $f, g \in C_p(X)$. Entonces s y g son continuos.*

Proposición 1.1.5. *Sea X un espacio topológico. Dado $f \in C_p(X)$, consideremos al mapeo $T_f : C_p(X) \to C_p(X)$ definido por la fórmula $T_f(g) = f + g$ para cada $g \in C_p(X)$. Entonces T_f es un homeomorfismo para cada $f \in C_p(X)$.*

De la proposición 1.1.5 se sigue que el estudio de las propiedades locales en $C_p(X)$ se puede reducir al estudio de las propiedades locales de la función igual a cero en todos los puntos de X.

Si X y Y son espacios topológicos, un mapeo $\varphi : C_p(X) \to C_p(Y)$ es llamado un *isomorfismo* si φ es una biyección, $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$ y $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$ para todos $f, g \in C_p(X)$. Un isomorfismo $\varphi : C_p(X) \to C_p(Y)$ es llamado un *isomorfismo topológico* si es un homeomorfismo. Los espacios $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son llamados *topológicamente isomorfos* si existe un isomorfismo topológico entre ellos. Dos espacios de funciones que sean topológicamente isomorfos los percibiremos como idénticos, pues no es posible distinguirlos mediante sus propiedades algebraicas o topológicas. Del siguiente resultado se sigue que en el estudio de la C_p-teoría es suficiente considerar los espacios de Tychonoff.

Teorema 1.1.6. ([12, Teorema 3.9]) *Sea X un espacio topológico. Dados $x, y \in X$, definamos la relación $x \equiv y$ si $f(x) = f(y)$ para cada $f \in C(X)$. Sea X_c el conjunto de todas las clases de equivalencia. Para cada $f \in C(X)$, definamos $\varphi_f : X_c \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera: $\varphi_f(a) = f(x)$, donde x es un elemento arbitrario de a. Dado $x \in X$, sea $\pi(x) = a$ donde a es la clase de equivalencia que contiene a x.*
(i) Si μ_f es la familia $\{\varphi_f^{-1}(U) : U \in \tau(\mathbb{R})\}$, entonces la topología μ generada por la subbase $\bigcup\{\mu_f : f \in C(X)\}$ es una topología de Tychonoff en X_c.
(ii) El mapeo $\pi : X \to Y = (X_c, \mu)$ es continuo.
(iii) Los espacios $C_p(X)$ y $C_p(Y)$ son topológicamente isomorfos.

Sea Y un subespacio de X. El *mapeo restricción* $\pi_Y : C_p(X) \to C_p(Y)$ se define como $\pi_Y(f) = f|_Y$ para cualquier $f \in C_p(X)$.

Proposición 1.1.7. *Supongamos que X es un espacio arbitrario y $Y \subset X$. Si $\pi_Y : C_p(X) \to C_p(Y)$ es el mapeo restricción, entonces:*
(i) π_Y es continuo y $\overline{\pi_Y(C_p(X))} = C_p(Y)$;
(ii) el mapeo π_Y es inyectivo si y sólo si Y es denso en X;
(iii) el mapeo π_Y es un homeomorfismo si y sólo si $Y = X$;
(iv) Y es cerrado en X si y sólo si el mapeo $\pi_Y : C_p(X) \to \pi_Y(C_p(X))$ es abierto;
(v) $\pi_Y(C_p(X)) = C_p(Y)$ si X es normal y Y es cerrado en X.

Sean X y Y espacios topológicos. Dado un mapeo continuo $r : X \to Y$, el *mapeo dual* $r^* : C_p(Y) \to C_p(X)$ se define por $r^*(f) = f \circ r$ para cualquier $f \in C_p(Y)$.

Proposición 1.1.8. *Supongamos que* X *y* Y *son espacios y* $r : X \to Y$ *es un mapeo continuo sobreyectivo. Si* $r^* : C_p(Y) \to C_p(X)$ *es su mapeo dual, entonces:*
(i) r^* *es continuo;*
(ii) r^* *es un homeomorfismo de* $C_p(Y)$ *sobre* $r^*(C_p(Y))$*;*
(iii) $r^*(C_p(Y))$ *es cerrado en* $C_p(X)$ *si y sólo si* r *es un mapeo* $\mathbb{R}$*-cociente;*
(iv) $r^*(C_p(Y))$ *es denso en* $C_p(X)$ *si y sólo si* r *es inyectivo;*
(v) $r^*(C_p(Y)) = C_p(X)$ *si y sólo si* r *es un homeomorfismo;*
(vi) si $s : X \to Z$ *es un mapeo continuo sobreyectivo, entonces existe un mapeo continuo* $t : Z \to Y$ *con* $t \circ s = r$ *si y sólo si* $r^*(C_p(Y)) \subset s^*(C_p(Z))$.

Sea X un espacio arbitrario y $F \subset C_p(X)$. Para cada $x \in X$, definamos a la función $e_x^F : F \to \mathbb{R}$ por la fórmula $e_x^F(f) = f(x)$ para cualquier $f \in F$; observemos que e_x^F pertenece a $C_p(F)$. Si $E^F(x) = e_x^F$ para cada $x \in X$; entonces $E^F : X \to C_p(F)$ es llamado el *mapeo evaluación.*

Proposición 1.1.9. *(i)* E^F *es continuo para cada* $F \subset C_p(X)$.
(ii) E^F *es inyectivo si y sólo si* F *separa los puntos de* X.
(iii) E^F *es un encaje si y sólo si* F *genera la topología de* X.
(iv) E^F *es un encaje si* F *separa los puntos de los cerrados de* X.
(v) El conjunto $X' = E^F(X) \subset C_p(F)$ *genera la topología de* F *y por lo tanto* F *se encaja en* $C_p(X')$.

Proposición 1.1.10. *Sea* X *un espacio arbitrario.*
(i) El mapeo $E^{C(X)} : X \to C_pC_p(X)$ *es un encaje.*
(ii) $E^{C(X)}(X)$ *es cerrado en* $C_pC_p(X)$.
Como consecuencia, cualquier espacio X *puede ser identificado de forma canónica con el subespacio cerrado* $E^{C(X)}(X)$ *del espacio* $C_pC_p(X)$.

El siguiente teorema de Nagata muestra que toda la información de un espacio de Tychonoff X está contenida en el espacio $C_p(X)$ visto como un álgebra topológica.

Teorema 1.1.11. ([21]) *Los espacios* X *y* Y *son homeomorfos si y sólo si* $C_p(X)$ *y* $C_p(Y)$ *son topológicamente isomorfos.*

1.2. Funciones cardinales

Uno de los métodos principales utilizados en este trabajo es el análisis de características cardinales de espacios topológicos: tanto generales, como de espacios de funciones. El invariante cardinal más importante es la cardinalidad del espacio ya que implica una cota superior para cualquier otro invariante cardinal. Aparte de la cardinalidad, los invariantes más importantes son los que imponen una restricción sobre la cardinalidad del espacio; entre ellos, el más destacado es el *peso* del espacio.

Definición 1.2.1. Dado un espacio X, su *peso* se define por el cardinal $w(X) = min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ es una base de $X\}$. El espacio X es segundo numerable si $w(X) \leq \omega$.

Definición 1.2.2. El mínimo de las cardinalidades de las bases externas de A en X es llamado el *carácter de* $\chi(A, X)$ de A en X. En el caso de que $A = \{x\}$, usamos la expresión $\chi(x, X)$ en lugar de $\chi(\{x\}, X)$. El cardinal $\chi(X) = sup\{\chi(x, X) : x \in X\}$ es el *carácter de* X. Diremos que un espacio es *primero numerable* si $\chi(X) \leq \omega$.

El carácter es la característica cardinal local más importante, aunque para espacios generales no implique una cota superior a la cardinalidad como los espacios discretos atestiguan. Sin embargo, el siguiente teorema muestra que para los espacios de funciones este no es el caso.

Teorema 1.2.3. ([5, Teorema I.1.1]) *Si X es un espacio infinito, entonces $|X| = \chi(C_p(X)) = w(C_p(X))$.*

Una *red* para un espacio es como una base cuyos elementos no necesariamente son abiertos.

Definición 1.2.4. Dado un espacio X, una familia $\mathcal{N} \subset exp(X)$ es llamada *red* de X si, para cada $U \in \tau(X)$, existe $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ tal que $\bigcup \mathcal{N}' = U$. El cardinal $nw(X) = min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N}$ es una red de $X\}$ es llamado el *peso de red* de X. Si $nw(X) \leq \omega$ diremos que X es *cósmico.*

El peso de red también impone restricciones sobre la cardinalidad y es útil para analizar espacios topológicos y de funciones como establece el siguiente teorema.

Toerema 1.2.5. ([5, Teorema I.1.3]) *La igualdad $nw(X) = nw(C_p(X))$ se cumple para todo espacio X.*

Definición 1.2.6. Para un espacio arbitrario X, definimos su *densidad* como el cardinal $d(X) = min\{|D| : D \subset X \text{ y } \overline{D} = X\}$. Diremos que un espacio es *separable* si $d(X) \leq \omega$.

Uno de los planteamientos más importantes de C_p-teoría es caracterizar propiedades e invariantes de $C_p(X)$ en términos de topología de X. Por ejemplo, el teorema 1.2.3 muestra que $C_p(X)$ tiene carácter numerable si y sólo si X es numerable. El teorema 1.2.5 implica que $C_p(X)$ es cósmico (es decir, tiene peso de red numerable) si y sólo si X es cósmico. A continuación veremos que la densidad brinda la posibilidad de caracterizar dos invariantes clásicos en $C_p(X)$.

Definición 1.2.7. El cardinal $iw(X) = min\{\kappa : \text{existe una biyección continua de } X \text{ sobre un espacio de peso} \leq \kappa\}$ es el *i-peso* de X.

Definición 1.2.8. Para $A \subset X$, sea $\psi(A, X) = min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subset \tau(X) \text{ y } \bigcap \mathcal{U} = A\}$. El cardinal $\psi(A, X)$ es llamado el *pseudocarácter* de A en X. Si $A = \{x\}$, escribiremos $\psi(x, X)$ en lugar de $\psi(\{x\}, X)$. El cardinal $\psi(X) = sup\{\psi(x, X) : x \in X\}$ es el *pseudocarácter* de X.

El i-peso de un espacio X se puede entender como el mínimo de los pesos de topologías más débiles en el conjunto X. El pseudocarácter es un invariante local que no impone restricciones sobre la cardinalidad de espacios generales, aunque este no es el caso en espacios de funciones.

Teorema 1.2.9. ([5, Teorema I.1.4]) *Si X es un espacio, entonces $d(X) = \psi(C_p(X)) = iw(C_p(X))$.*

Dos invariantes cardinales ξ y η se llaman duales si $\xi(X) = \eta(C_p(X))$ para todo espacio X. El siguiente teorema muestra que la densidad e i-peso son biduales, es decir, cada uno de ellos caracteriza al otro en los espacios $C_p(X)$.

Teorema 1.2.10. ([5, Teorema I.1.5]) *Si X es un espacio arbitrario, entonces $iw(X) = d(C_p(X))$.*

El siguiente invariante cardinal se puede interpretar como amplitud del espacio ya que mide la máxima cantidad posible de abiertos disjuntos no vacíos que se pueden colocar en el espacio.

Definición 1.2.11. El *número de Souslin* de un espacio X se define por el cardinal $c(X) = sup\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subset \tau^*(X)$ es disjunta$\}$. Un espacio X tiene la propiedad de Souslin si $c(X) \leq \omega$.

No todos los espacios topológicos tienen la propiedad de Souslin: esto se puede ver considerando cualquier espacio discreto no numerable. Sin embargo, todos los espacios de funciones resultan tener poca amplitud en el sentido de número de Souslin.

Teorema 1.2.12. ([5, Corolario 0.3.7]) *Si X es un espacio arbitrario, entonces $C_p(X)$ tiene la propiedad de Souslin.*

Para caracterizar la estrechez en los espacios $C_p(X)$ se necesita el número de Lindelöf mismo que expresa el grado de compacidad del espacio.

Definición 1.2.13. Dado un espacio X, su *número de Lindelöf* se define por el cardinal $l(X) = min\{\kappa :$ cada cubierta abierta de X tiene un subcubierta de cardinalidad $\leq \kappa\}$. Diremos que un espacio X tiene la *propiedad de Lindelöf* si $l(X) \leq \omega$.

La estrechez es una propiedad local y que representa la mínima cardinalidad de conjuntos que generan la topología del espacio.

Definición 1.2.14. Dado un cardinal κ y $A \subset X$, sea $[A]_\kappa = \bigcup\{\overline{B} : B \subset A$ y $|B| \leq \kappa\}$. Definamos $t(X) = min\{\kappa : \overline{A} = [A]_\kappa$ para cada $A \subset X\}$. El cardinal $t(X)$ se llama la *estrechez* de X.

El siguiente teorema de Arhangel'skii-Pytkeev caracteriza la estrechez en espacios $C_p(X)$.

Teorema 1.2.15. ([5, Teorema II.1.1]) *Supongamos que X es un espacio arbitrario. Entonces $t(C_p(X)) = sup\{l(X^n) : n \in \mathbb{N}\}$.*

Definición 1.2.16. El *spread* de un espacio X se define por el cardinal $s(X) = sup\{|D| : D$ es un subespacio discreto de $X\}$.

El spread de un espacio X mide la amplitud de todos los subespacios de X pues es equivalente al cardinal $sup\{c(Y) : Y \subset X\}$. El siguiente teorema caracteriza el spread de $C_p(X) \times C_p(X)$.

Teorema 1.2.17. ([32, Problema 22]) *Si X es un espacio arbitrario, entonces $s(C_p(X) \times C_p(X)) = sup\{s(X^n) : n \in \mathbb{N}\}$.*

El extent de un espacio también es de cierta forma una medida de la compacidad, pues los espacios de Lindelöf tienen extent numerable y una condición equivalente para que un espacio sea numerablemente compacto es que todos sus subespacios cerrados y discretos sean finitos.

Definición 1.2.18. El *extent* de un espacio X se define por el cardinal $ext(X) = sup\{|D| : D \text{ es un subespacio cerrado y discreto de } X\}$.

Como la compacidad es una propiedad muy fuerte, tiene muchas concecuencias en los espacios de funciones, una de las cuales es el siguiente teorema.

Teorema 1.2.19. *Si X es un espacio compacto, entonces $ext(C_p(X)) = l(C_p(X))$.*

1.3. La propiedad Lindelöf Σ

Uno de los conceptos más importantes no sólo en topología, sino en una gran parte de las matemáticas, es la compacidad, misma que nace del estudio de los subconjuntos de la recta real. Sus generalizaciones surgen de manera natural conforme los subconjuntos estudiados se vuelven más sofisticados. Por ejemplo, para trabajar con los subespacios cerrados de $\mathbb{R}$ se necesita el concepto de σ-compacidad. Si trabajamos con los irracionales y sus subespacios, se necesitan conceptos más generales. Para abarcar los subespacios arbitrarios de la potencia numerable de $\mathbb{R}$ se descubrió la clase de espacios segundo numerables. Si buscamos una clase de espacios que contenga a los compactos y a los segundo numerables, y además tenga propiedades razonables, como ser invariante bajo subespacios cerrados, imágenes continuas y productos finitos, entonces la mínima clase con estas propiedades es precisamente la clase de los espacios Lindelöf Σ. Esto explica por qué los espacios Lindelöf Σ surgen de manera muy natural tanto en la Teoría Descriptiva de Conjuntos, como en el Analísis Funcional y la Topología.

Definición 1.3.1. Sea X un espacio. Dadas dos familias $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset exp(X)$, diremos que $\mathcal{A}$ es una *red con respecto a* $\mathcal{B}$ si para cada $B \in \mathcal{B}$ y $U \in \tau(B, X)$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset A \subset U$.

Definición 1.3.2. Una familia $\mathcal{K} \subset exp(X)$ es *cubierta compacta* de X si cada elemento de $\mathcal{K}$ es compacto y $X = \bigcup \mathcal{K}$.

Toda propiedad importante tiene muchas definiciones equivalentes y la propiedad Lindelöf Σ no es una excepción. La siguiente definición puede considerarse primaria ya que expresa la propiedad Lindelöf Σ de X en términos de su topología.

Definición 1.3.3. Un espacio se llama *Lindelöf* Σ si tiene una cubierta compacta para la cual existe una red numerable.

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata de las definiciones.

Proposición 1.3.4. *(i) Todo espacio σ-compacto es Lindelöf Σ. En particular, todo espacio compacto es Lindelöf Σ.*
(ii) Todo espacio con peso de red numerable es Lindelöf Σ. En particular, todo espacio segundo numerable es Lindelöf Σ.

La siguiente proposición muestra que la clase de los espacios Lindelöf Σ sí está relacionada con la clase de los espacios de Lindelöf.

Proposición 1.3.5. *Todo espacio Lindelöf Σ es Lindelöf.*

El siguiente teorema no trivial explica por qué los espacios Lindelöf Σ surgen de manera natural.

Teorema 1.3.6. ([30]) *Los espacios Lindelöf Σ forman la mínima clase que contiene a los espacios compactos, los espacios segundo numerables, y es invariante bajo subespacios cerrados, mapeos continuos y productos finitos.*

Los siguientes resultados (que también aparecen en [30]) muestran que la clase de espacios Lindelöf Σ también es cerrada bajo productos, uniones e intersecciones numerables.

Proposición 1.3.7 *El producto numerable de espacios Lindelöf Σ es Lindelöf Σ.*

Proposición 1.3.8 *Si un espacio X es la unión numerable de espacios Lindelöf Σ, entonces X es Lindelöf Σ.*

Proposición 1.3.9 *En todo espacio la intersección numerable de subespacios Lindelöf Σ también es Lindelöf Σ.*

Los espacios $K_{\sigma\delta}$ y K-analíticos forman una parte central en la Teoría Descriptiva de Conjuntos. De los resultados anteriores es inmediato que ambas clases de espacios son Lindelöf Σ.

Definición 1.3.10. Diremos que un espacio X es $K_{\sigma\delta}$ si puede ser representado como la intersección de una familia numerable de subespacios σ-compactos de algún espacio Z. Las imágenes continuas de los espacios $K_{\sigma\delta}$ son llamadas espacios *K-analíticos*.

Una propiedad $\mathcal{P}$ es t-invariante si para cada espacio X con la propiedad $\mathcal{P}$ se satisface la siguiente condición: si Y es un espacio tal que $C_p(Y)$ es homeomorfo a $C_p(X)$, entonces Y tiene la propiedad $\mathcal{P}$. El siguiente teorema de Okunev muestra que las propiedades Lindelöf Σ, la K-analiticidad y la σ-compacidad son t-invariantes.

Teorema 1.3.11. ([5, Corolario III.2.12]) *(i) Si X es Lindelöf Σ y $C_p(Y)$ es homeomorfo a un subespacio de $C_p(X)$, entonces Y es Lindelöf Σ.*
(ii) Si X es σ-compacto y $C_p(Y)$ es homeomorfo a un subespacio de $C_p(X)$, entonces Y es σ-compacto.
(iii) Si X es K-analítico y $C_p(Y)$ es homeomorfo a un subespacio de $C_p(X)$, entonces Y es K-analítico.

El siguiente teorema de Baturov nos da una generalización en la clase de espacios Lindelöf Σ al clásico resultado de Grothendieck sobre subespacios numerablemente compactos de $C_p(X)$ cuando X es numerablemente compacto.

Teorema 1.3.12.([8]) *Si X es un espacio Lindelöf Σ, entonces $ext(Y) = l(Y)$ para todo $Y \subset C_p(X)$.*

En los espacios metrizables la densidad y el peso de red coinciden en cada uno de sus subespacios. La clase más grande con esta propiedad es la de los espacios monolíticos.

Definición 1.3.13. Dado un cardinal infinito κ, un espacio X es *κ-monolítico* si $nw(\overline{A}) \leq \kappa$ para cada $A \in [X]^{\leq\kappa}$. Diremos que X es *monolítico* si es κ-monolítico para todo cardinal infinito κ. Es claro que cualquier subespacio de un espacio κ-monolítico es también κ-monolítico.

El siguiente teorema (ver [33, Problema 220]) es otra generalización más del teorema de Grothendieck.

Teorema 1.3.14. *Si X es un espacio Lindelöf Σ, entonces cada conjunto numerablemente compacto $Y \subset C_p(X)$ es compacto, monolítico y Fréchet-Urysohn.*

La estabilidad es una generalización de la compacidad en el sentido de que es invariante bajo imágenes continuas y se tiene la igualdad entre el i-peso y el peso de red.

Definición 1.3.15. Dado un cardinal infinito κ, un espacio X es *κ-estable* si $iw(Y) \leq \kappa$ implica que $nw(Y) \leq \kappa$ para cada imagen continua Y de X. Diremos que X es *estable* si es κ-estable para todo cardinal infinito κ.

De la propiedad Lindelöf Σ, por ser una generalización de la compacidad, se espera que conserve muchas de sus propiedades. Este es el caso de la estabilidad, aunque su prueba no es nada trivial.

Teorema 1.3.16. ([5, Teorema II.6.21]) *Todo espacio Lindelöf Σ es estable.*

Si bien la propiedad Lindelöf Σ no es cerrada bajo productos arbitrarios como es el caso de la compacidad, sí conserva la estabilidad.

Teorema 1.3.17. ([5, Corolario II.6.27]) *Cualquier producto de espacios Lindelöf Σ es estable.*

A primera vista, parece no haber un vínculo entre la monoliticidad y estabilidad. Los siguientes teoremas de Arhangel'skii muestra que de hecho, son biduales.

Teorema 1.3.18. ([5, Teorema II.6.8]) *Para cualquier cardinal infinito κ, el espacio $C_p(X)$ es κ-monolítico si y sólo si X es κ-estable.*

Teorema 1.3.19. ([5, Teorema II.6.9]) *Para cualquier cardinal infinito κ, el espacio $C_p(X)$ es κ-estable si y sólo si X es κ-monolítico.*

Dado un espacio X, definamos $C_{p,0}(X) = X$ y $C_{p,n+1}(X) = C_p(C_{p,n}(X))$ para cada número natural n. El siguiente resultado de Okunev y Tkachuk (véase [23] y [27]) muestra la relación entre la propiedad Lindelöf Σ de $C_p(X)$ y la realcompactificación υX del espacio X.

Teorema 1.3.20. *Si $C_p(X)$ es un espacio Lindelöf Σ, entonces $C_{p,n}(\upsilon X)$ es un espacio Lindelöf Σ para cada $n < \omega$.*

Un teorema fundamental de Arhangel'skii (véase Teorema 1.2.5) establece que el peso de red de cualquier espacio X es igual al peso de red de $C_p(X)$. Lo anterior implica que X es cósmico si y sólo si $C_{p,n}(X)$ es cósmico para todo (o algún) $n \in \mathbb{N}$. Esto motivó a Arhangel'skii a preguntar si existía un espacio X con peso de red no numerable tal que todos los espacios iterados $C_{p,n}(X)$ fueran Lindelöf Σ. La primera en dar una respuesta positiva fue Sipacheva, misma que estableció que $C_{p,n}(X)$ es Lindelöf Σ para todo $n \in \mathbb{N}$ si X es un compacto de Eberlein [25]. Okunev generalizó esto en el siguiente teorema [24].

Teorema 1.3.21. *Sean X y Y espacios Lindelöf Σ tales que $Y \subset C_p(X)$.*

Entonces $C_p(Y)$ es Lindelöf Σ.

Corolario 1.3.22. *Si X y $C_p(X)$ son espacios Lindelöf Σ, entonces $C_{p,n}(X)$ es un espacio Lindelöf Σ para todo $n < \omega$.*

En el siguiente teorema de Tkachuk [27] se da una descripción completa de todas las posibles distribuciones de la propiedad Lindelöf Σ en espacios iterados de funciones.

Teorema 1.3.23. *Para cualquier X, sólo las siguientes distribuciones de la propiedad Lindelöf Σ son posibles en los espacios iterados $C_{p,n}(X)$:*
(i) $C_{p,n+1}(X)$ es Lindelöf Σ para todo $n \in \omega$;
(ii) el espacio $C_{p,n+1}(X)$ no es Lindelöf Σ para todo $n \in \omega$;
(iii) solamente los espacios $\{C_{p,2n+1}(X) : n \in \omega\}$ son Lindelöf Σ;
(iv) solamente los espacios $\{C_{p,2n}(X) : n \in \mathbb{N}\}$ son Lindelöf Σ.

1.4. Compactos de Corson, Gul'ko y Eberlein

El estudio de espacios compactos es un planteamiento central en Topología, Análisis y muchas otras áreas de las matemáticas. En esta sección presentaremos las propiedades básicas de los compactos de Corson, Gul'ko y Eberlein. Dichos compactos son de gran importancia ya que aparecen de forma natural tanto en Topología como en Análisis Funcional y tienen muy buenas propiedades categóricas. Por ejemplo, los compactos de Corson son Fréchet-Urysohn, monolíticos y se conservan bajo mapeos continuos, subespacios cerrados y productos numerables.

Definición 1.4.1. Dada una familia de espacios $\{X_t : t \in T\}$ y $a \in X = \prod_{t\in T} X_t$, definimos a los subespacios $\sigma(X,a) = \{x \in X : |\{t \in T : x(t) \neq a(t)\}| < \omega\}$ y $\Sigma(X,a) = \{x \in X : |\{t \in T : x(t) \neq a(t)\}| \leq \omega\}$. Al espacio $\sigma(X,a)$ lo llamaremos el *σ-producto* de X con el centro en a; análogamente $\Sigma(X,a)$ es el *Σ-producto* de X con el centro en a. Los símbolos $\Sigma(A)$ y $\sigma(A)$ están reservados para los respectivos Σ- y σ-productos de rectas reales con centro en el cero. El subespacio $\Sigma_*(A) = \{x \in \mathbb{R}^A$: para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{a \in A : |x(a)| \geq \varepsilon\}$ es finito$\}$ se llama el *Σ_*-producto* de $\mathbb{R}^A$.

Definición 1.4.2. Un espacio compacto X se llama *compacto de Corson* si se encaja en $\Sigma(A)$ para algún conjunto A.

Los Σ-productos de rectas reales son Fréchet-Urysohn y monolíticos. Ambas propiedades son hereditarias por lo que todo compacto de Corson es simultáneamente Fréchet-Urysohn y monolítico. Además, las dos propiedades implican que cada compacto de Corson es primero numerable en un subconjunto denso.

Teorema 1.4.3. *Cada compacto de Corson es monolítico, Fréchet-Urysohn y tiene un subespacio denso con puntos de carácter numerable.*

El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de la monoliticidad de los compactos de Corson.

Teorema 1.4.4. *Si X es un compacto de Corson, entonces $d(X) = w(X)$.*

Si $|A| \leq \omega$, entonces $\Sigma(A)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^A$. Todo compacto metrizable se puede encajar en el cubo de Tychonoff $[0,1]^{\mathbb{N}}$ lo que implica que también sea un compacto de Corson. El siguiente teorema muestra que todo compacto de Corson no metrizable se encaja en $C_p(L(\kappa))$, donde κ es un cardinal no numerable y $L(\kappa)$ es la lindelöficación unipuntual del discreto de cardinalidad κ (ver [33, Problema 106]). Como consecuencia inmediata, todo compacto de Corson se puede encajar en $C_p(X)$ donde X es un espacio Lindelöf.

Teorema 1.4.5. *Si $|A| = \kappa > \omega$, entonces el espacio $\Sigma(A)$ es homeomorfo a $C_p(L(\kappa))$.*

Para obtener una descripción interna de la propiedad de ser un compacto de Corson necesitaremos las siguientes definiciones: una familia $\mathcal{U} \subset exp(X)$ es *T_0-separadora en X* si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $|U \cap \{x, y\}| = 1$; diremos que $\mathcal{U}$ es *punto-numerable* si para cada $x \in X$, el conjunto $\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ es numerable.

Teorema 1.4.6. ([33, Problema 118]) *Supongamos que X es un espacio compacto. Entonces X es un compacto de Corson si y sólo si X tiene una familia punto-numerable T_0-separadora de abiertos F_σ.*

En el capítulo 2 se demostrará que en el siguiente teorema (véase [29]) se puede lograr que el conjunto Y sea F_σ-discreto.

Teorema 1.4.7. *Si X es un compacto de Corson, entonces existe un conjunto σ-discreto $Y \subset C_p(X)$ que separa los puntos de X.*

Muchos teoremas importantes sobre compactos de Corson involucran espacios de funciones. El siguiente teorema de metrizabilidad lo ejemplifica (véase [33, Problema 128]).

Teorema 1.4.8. *Si X es un compacto de Corson y $s(C_p(X)) \leq \omega$, entonces X es metrizable.*

Gul'ko estableció que para todo compacto de Corson X, los espacios iterados $\{C_{p,2n+1}(X) : n \in \omega\}$ son Lindelöf. Sokolov extendió este resultado mostrando que $C_{p,n}(X)$ es Lindelöf para cada $n \in \mathbb{N}$ (ver [26]). Leiderman y Sokolov contruyeron un ejemplo de un compacto de Corson X tal que $C_p(X)$ no es Lindelöf Σ [19]. Por otro lado, Gul'ko probó que si $C_p(X)$ es Lindelöf Σ y X es compacto, entonces X es un compacto de Corson [15]. Este resultado notable es la razón de que a los compactos X tales que $C_p(X)$ sea Lindelöf Σ se les llame compactos de Gul'ko.

Definición 1.4.9. Diremos que X es un espacio *de Gul'ko* si $C_p(X)$ es Lindelöf Σ. Un espacio de Gul'ko compacto es llamado *compacto de Gul'ko.* El espacio X es *de Talagrand* si $C_p(X)$ es K-analítico. Un espacio de Talagrand compacto es llamado *compacto de Talagrand.*

Del Teorema 1.3.22 se sigue que si X es un compacto de Gul'ko, entonces $C_{p,n}(X)$ es Lindelöf Σ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.4.10. ([15]) *Todo compacto de Gul'ko es un compacto de Corson.*

El siguiente teorema (véase [33, Problema 220]) es una generalización de un resultado clásico de Grothendieck.

Teorema 1.4.11. *Si X es Lindelöf Σ, entonces cada subespacio numerablemente compacto $Y \subset C_p(X)$ es un compacto de Gul'ko.*

Una familia $\mathcal{U} \subset exp(X)$ es *punto-finita en* $x \in X$ si $\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ es finita. La familia $\mathcal{U}$ es *débilmente σ-punto-finita* si existe una sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de subfamilias de $\mathcal{U}$ tal que, para cada $x \in X$, tenemos que $\mathcal{U} = \bigcup\{\mathcal{U}_n : n \in M_x\}$ donde $M_x = \{n \in \omega : \mathcal{U}_n$ es punto-finita en $x\}$. Un conjunto $U \subset X$ es *cocero* si existe $f \in C_p(X)$ tal que $U = X \backslash f^{-1}(0)$.

Teorema 1.4.12. ([33, Problema 289]) *Un espacio compacto X es un compacto de Gul'ko si y sólo si X tiene una familia débilmente σ-punto-finita T_0-separadora de conjuntos cocero.*

Si bien es cierto que cada compacto de Corson tiene un subespacio denso primero numerable, no todo compacto de Corson tiene un denso metrizable [33, Problema 176].

Teorema 1.4.13. ([14]) *Todo compacto de Gul'ko X tiene un subespacio denso metrizable que es un conjunto G_δ en X.*

Del siguiente teorema (ver [33, Problema 294]) se sigue que todo compacto de Gul'ko con la propiedad de Souslin es metrizable.

Teorema 1.4.14. *Si X es un compacto de Gul'ko, entonces $w(X) = c(X)$.*

Los subespacios compactos de $C_p(X)$ cuando X es compacto, son precisamente los compactos de Eberlein. Esta y muchas otras clases de compactos como los de Corson y de Gul'ko fueron introducidos a la Topología General a través de la C_p-teoría. Todos ellos son muy interesantes desde un punto de vista meramente topológico. Tales espacios, así como los compactos dispersos y los extremadamente disconexos, fueron estudiados primero por expertos en Análisis Funcional para construir ejemplos no triviales en espacios de Banach con la topología débil.

Definición 1.4.15. Un espacio compacto X es llamado *compacto de Eberlein* si X se puede encajar en $C_p(K)$ para algún espacio compacto K.

¿Qué tan similar a un compacto es $C_p(X)$ si X es compacto? Obviamente $C_p(X)$ es compacto si y sólo si X es vacío. Si $C_p(X)$ es σ-compacto, entonces X es finito. En este tema, el siguiente resultado es muy interesante: si X es un compacto de Eberlein, entonces $C_p(X)$ es un espacio $K_{\sigma\delta}$, esto es, puede ser representado como la intersección de una familia numerable de espacios σ-compactos (véase [33, Problem 321]). Esto implica que $C_p(X)$ es K-analítico y en particular Lindelöf Σ.

Teorema 1.4.16. *Todo compacto de Eberlein es también un compacto de Gul'ko.*

Los argumentos que involucran espacios compactos de funciones tienen un papel clave en Análisis Funcional. El siguiente teorema que ejemplifica la diversidad de definiciones equivalentes de los compactos de Eberlein, nos muestra el por qué esta clase de espacios es de gran interés tanto en Topología como en Análisis (ver Problemas 105, 301, 322, 324 y 327 de [33]). Recuérdese que $A(\kappa)$ es la compactificación unipuntual del espacio discreto de cardinalidad κ.

Teorema 1.4.17. *Las siguiente condiciones son equivalentes para cualquier espacio X:*
(i) X es un compacto de Eberlein;
(ii) X se encaja en $C_p(A(\kappa))$ para algún cardinal κ;
(iii) X se encaja en $C_p(Y)$ para algún σ-compacto Y;
(iii) existe un conjunto σ-compacto $H \subset C_p(X)$ que separa los puntos de X;
(iv) existe un compacto $K \subset C_p(X)$ que separa los puntos de X;
(v) existe un compacto $H \subset C_p(X)$ que separa los puntos de X y H es homeomorfo a $A(\kappa)$ para algún cardinal κ;

(vi) X se encaja en $\Sigma_*(A)$ para algún conjunto A;
(vii) X tiene una familia σ-punto-finita T_0-separadora de conjuntos cocero.

El siguiente teorema de Arhangel'skii (ver [33, Problema 320]) muestra que todo espacio metrizable tiene una compactificación que es un compacto de Eberlein.

Teorema 1.4.18. *Todo espacio metrizable se puede encajar en un compacto de Eberlein.*

Reznichenko construyó un compacto de Gul'ko K con una combinación notable de propiedades (véase [33, Problema 222]). Para dicho compacto K, el espacio $C_p(K)$ es K-analítico, pero existe un punto $u \in K$ tal que K es la compactificación de Stone-Čech del espacio $Y = K\backslash\{u\}$. El subespacio Y es pseudocompacto y no es cerrado en K. Dicha combinación de propiedades de K es interesante ya que en un compacto de Eberlein, cada subespacio pseudocompacto es compacto.

Ejemplo 1.4.19. Existe un espacio compacto K con las siguientes propiedades:
(i) $C_p(K)$ es K-analítico, esto es, K es un compacto de Talagrand;
(ii) existe un punto $u \in K$ tal que $K\backslash\{u\}$ es pseudocompacto y K es canónicamente homeomorfo a $\beta(K\backslash\{u\})$;
(iii) $K = \bigcup\{K_n : n \in \omega\}$ donde la familia $\{K_n : n \in \omega\}$ es disjunta, K_0 es homeomorfo a $A(\mathfrak{c})$ y u es el único punto no aislado de K_0; además, para todo $n \in \mathbb{N}$ el subespacio K_n es abierto-cerrado en K y homeomorfo a un subconjunto cerrado de $(A(\mathfrak{c}))^\omega$.

Como concecuencia, existe un ejemplo de un espacio X que es Lindelöf Σ mientras que algún subespacio pseudocompacto y cerrado de $C_p(X)$ no es numerablemente compacto.

1.5. Espacios ψ-separables

Los espacios X tales que $\psi(Y) \leq \omega$ para algún subespacio denso $Y \subset X$ fueron estudiados sistemáticamente por Amirdzhanov en [3] y [4]; el llamó a tales espacios ψ-separables. Es evidente que la ψ-separabilidad es una generalización de la separabilidad.

Definición 1.5.1. Un espacio X es llamado *ψ-separable* si en X existe un subespacio denso Y tal que $\psi(Y) \leq \omega$.

La motivación principal de Amirzhanov era un famoso problema abierto de Arhangel'skii sobre la existencia de un espacio X tal que $\psi(X) = l(X) = \omega$ y $|X| > \mathfrak{c}$. Amirdzhanov se propuso construir un tal espacio X como subespacio denso de $\mathbb{R}^A$ para algún conjunto A. Aunque no tuvo éxito en esa tarea, en el intento probó el siguiente teorema.

Teorema 1.5.2. *El producto de cualquier cantidad de espacios ψ-separables es ψ-separable.*

No es nada evidente si cada espacio compacto es ψ-separable. Amirzhanov lo aclaró para las potencias de $\beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$.

Teorema 1.5.3. *El espacio $(\beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N})^\kappa$ es ψ-separable para $\kappa \geq \omega$ y no es ψ-separable si $\kappa < \omega$.*

Definición 1.5.4. Un espacio X es *F_σ-discreto* si se puede representar como la unión de una familia numerable de subespacios discretos y cerrados de X.

Es claro que todo espacio F_σ-discreto tiene pseudocarácter numerable por lo que si X tiene un subespacio denso F_σ-discreto, entonces es ψ-separable. Si κ es un cardinal y consideramos al espacio discreto $D(\kappa)$ de cardinalidad κ, entonces un teorema de Uspenskij garantiza que $C_p(D(\kappa))$, mismo que es homeomorfo a $\mathbb{R}^\kappa$, tiene un subespacio denso F_σ-discreto para cada κ. En el capítulo 2 extenderemos este resultado a la clase de espacios metrizables.

El siguiente teorema famoso de Amirdzhanov también será generalizado en el capítulo 2.

Teorema 1.5.5. *Si en un espacio X existe $Y \subset X$ tal que $|X| = |Y|$ y $\psi(Y) \leq \omega$, entonces $C_p(X)$ es ψ-separable.*

1.6. Subespacios uniformemente densos de $C_p(X)$

Un metodo común para obtener información sobre un espacio topológico es estudiar sus subespacios densos. Este método brinda numerosos resultados interesantes para los espacios de funciones ya que ellos cuentan con una estructura algebraica compatible con su topología. Por ejemplo, si $C_p(X)$ tiene un subespacio denso metrizable, entonces es metrizable; si X es compacto y $C_p(X)$ tiene un subespacio denso Lindelöf Σ, entonces $C_p(X)$ también es Lindelöf Σ.

Sin embargo, existen muchas propiedades $\mathcal{P}$ que no necesariamente están presentes en $C_p(X)$ si algún subespacio denso $D \subset C_p(X)$ tiene $\mathcal{P}$. Un buen ejemplo es un espacio discreto X para el cual $C_p(X) = \mathbb{R}^X$ tiene un subespacio denso Fréchet-Urysohn σ-compacto mientras que la estrechez de $C_p(X)$ puede ser arbitrariamente grande. El mismo resultado muestra que ninguna propiedad de tipo compacidad de X es implicada por la existencia de un subespacio denso σ-compacto de $C_p(X)$. Esta fue una de las motivaciones de Tkachuk para estudiar en [28] las propiedades de subespacios uniformemente densos de $C_p(X)$. Todos los resultados en esta sección fueron publicados en el artículo [28].

Definición 1.6.1. Un conjunto $A \subset C_p(X)$ es *uniformemente denso* en $C_p(X)$ si para cada $f \in C_p(X)$ y $\varepsilon > 0$, existe $g \in A$ tal que $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

El concepto de subespacio uniformemente denso aparece de manera natural si se consideran las topologías uniformes o compacto-abiertas en espacios de funciones; también surge en el contexto de las aplicaciones del teorema de Stone-Weierstrass. De la definición es claro que un subespacio uniformemente denso nos da una mejor aproximación que los subespacios densos.

El resultado que sigue es una generalización del hecho de que X se encaja en $C_pC_p(X)$ como subespacio cerrado.

Proposición 1.6.2. *Si X es un espacio arbitrario y A es uniformemente denso en $C_p(X)$, entonces X se encaja en $C_p(A)$ como un subespacio cerrado.*

En el artículo [28] se demostró que hay una amplia lista de propiedades $\mathcal{P}$ tales que la presencia de $\mathcal{P}$ en un subespacio uniformemente denso en $C_p(X)$

implica que $C_p(X)$ tiene $\mathcal{P}$.

Teorema 1.6.3. *Sea X un espacio y supongamos que A es un subespacio uniformemente denso en $C_p(X)$. Entonces*
(i) $nw(A) = nw(C_p(X))$;
(ii) $d(A) = d(C_p(X))$;
(iii) $t(A) = t(C_p(X))$;
(iv) si A es secuencial, entonces $C_p(X)$ es Fréchet-Urysohn;
(v) si A es κ-estable para algún cardinal κ, entonces $C_p(X)$ también es κ-estable;
(vi) $hd(A) = hd(C_p(X))$;
(vii) $hl(A) = hl(C_p(X))$;
(viii) $s(A) = s(C_p(X))$.

Aparte de la lista presentada en el teorema 1.6.3, el artículo [28] brinda una descripción genérica de algunas propiedades que se heredan a todo $C_p(X)$ de los subespacios uniformemente densos en $C_p(X)$.

Llamemos *completa* a una propiedad topológica $\mathcal{P}$ si es invariante bajo funciones continuas, subespacios cerrados, productos numerables y multiplicación por un compacto.

Teorema 1.6.4. *Sea $\mathcal{P}$ una propiedad completa. Si A es uniformemente denso en $C_p(X)$ y A tiene $\mathcal{P}$, entonces $C_p(X)$ también tiene $\mathcal{P}$.*

Corolario 1.6.5. *Si A es uniformemente denso en $C_p(X)$, entonces*
(i) si A es un espacio Lindelöf Σ, entonces $C_p(X)$ también es Lindelöf Σ;
(ii) si A es K-analítico, entonces $C_p(X)$ también es K-analítico;
(iii) si A es analítico, entonces $C_p(X)$ también es analítico.

El siguiente teorema muestra que la presencia de subespacios uniformemente densos en $C_p(X)$ con alguna propiedad más débil que σ-compacidad, implican compacidad en X.

Teorema 1.6.6. *Sea X un espacio y supongamos que A es uniformemente denso en $C_p(X)$.*
(i) Si A es σ-pseudocompacto, entonces X es pseudocompacto.
(ii) Si A es σ-numerablemente compacto, entonces X es compacto.
(iii) Si A es numerable, entonces X es compacto y metrizable.

El ejemplo que presentamos a continuación es el resultado principal del artículo [28].

Ejemplo 1.6.7. Si $X = A(\mathfrak{c})$ es la compactación unipuntual del subespacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$, entonces $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable, mientras que $\psi(C_p(X)) = \mathfrak{c}$.

Capítulo 2

Subespacios densos de pseudocarácter numerable en espacios de funciones

Este capítulo consta de dos secciones. En la primera sección presentamos una caracterización de los espacios X tales que $C_p(X)$ tiene un subespacio denso de i-peso numerable. También se describe una clase general de espacios X para los cuales todos los espacios iterados de funciones tienen un subespacio denso F_σ-discreto. Los métodos desarrollados en esta sección nos permitieron generalizar un viejo teorema de Amirdzhanov sobre ψ-separabilidad de los espacios $C_p(X)$.

La segunda sección contiene una caracterización de espacios X tales que el espacio $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de i-peso numerable. Este resultado tiene la peculiaridad de que depende enteramente de la cardinalidad del espacio $C_p(X)$. También se prueba que todos los espacios iterados de funciones de un compacto de Gul'ko tienen un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable.

2.1. Espacios de funciones y ψ-separabilidad

El propósito de esta sección es describir algunas clases de espacios X para los cuales $C_p(X)$ es ψ-separable o tiene un subespacio denso F_σ-discreto. Entre dichas clases se encuentran los espacios metrizables, los compactos de Eberlein, Gul'ko y Corson. Recordemos que un espacio X es F_σ-discreto si X se puede representar como la unión de una familia numerable de subespacios discretos y cerrados de X. Es claro que los espacios F_σ-discretos son de pseudocarácter numerable por lo que todos los resultados sobre existencia de un denso F_σ-discreto automáticamente implican ψ-separabilidad.

Proposición 2.1.1. *Si X es un espacio infinito, entonces para cualquier familia disjunta $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de X, existe una sucesión $\{\delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $C_p(X)$ que satisface las siguientes condiciones:*
(a) si $I_n = \{f + \delta_n : f \in C(X, [-n, n])\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la famila $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ es disjunta;
(b) el conjunto $I = \bigcup\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $C_p(X)$;
(c) $\delta_n(X \backslash U_n) \subset \{0\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escojamos un punto $x_n \in U_n$ y una función continua $\delta_n : X \to [0, 2n]$ tal que $\delta_n(x_n) = 2n$ y $\delta_n(X \backslash U_n) \subset \{0\}$.

Si $h \in I_n \cap I_m$ para algunos $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m < n$, entonces $f + \delta_n = h = g + \delta_m$ para algunas funciones $f \in C(X, [-n, n])$ y $g \in C(X, [-m, m])$. Por lo tanto $\delta_n - \delta_m = g - f$ y $|g(x) - f(x)| \leq n + m$ para cada $x \in X$, pero $g(x_n) - f(x_n) = \delta_n(x_n) - \delta_m(x_n) = 2n > n + m$ lo que es una contradicción. Esto prueba que la familia $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ es disjunta.

Para ver que $I = \bigcup\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $C_p(X)$ tomemos cualquier $g \in C_p(X)$ y un subconjunto finito $E \subset X$. Escojamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(E) \subset [-n, n]$ y $E \cap U_n = \emptyset$. Existe $f \in C(X, [-n, n])$ tal que $f|_E = g|_E$. Entonces $h = f + \delta_n \in I_n \subset I$ y $h|_E = f|_E + \delta_n|_E = f|_E = g|_E$. Por lo tanto I es denso en $C_p(X)$. $\square$

Corolario 2.1.2. *Si X es un espacio infinito y $C_p(X, [-1, 1]) \subset \overline{\Omega}$ para algún conjunto $\Omega \subset C_p(X, [-2, 2])$, entonces existe un conjunto denso Y en $C_p(X)$ tal que $Y = \bigcup\{Y_m : m \in \mathbb{N}\}$ donde la familia $\{\overline{Y}_m : m \in \mathbb{N}\}$ es disjunta y Y_m es homeomorfo a Ω para cada $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia disjunta e infinita de abiertos no vacíos de X. Fijemos una sucesión $\{\delta_m : m \in \mathbb{N}\} \subset C_p(X)$ que satisface las condiciones (a)-(c) de la Proposición 2.1.1.

Si $m \in \mathbb{N}$, entonces el mapeo $T_m : C_p(X) \to C_p(X)$ definido por $T_m(f) = \frac{m}{2} f + \delta_m$ para cada $f \in C_p(X)$ es un homeomorfismo. Si $Y_m = T_m(\Omega) \subset I_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces la propiedad (a) de la Proposición 2.1.1 muestra que la familia $\{\overline{Y}_m : m \in \mathbb{N}\}$ es disjunta. Para ver que Y es denso en $C_p(X)$ escojamos de manera arbitraria $h \in C_p(X)$, un conjunto finito $E \subset X$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $m \in \mathbb{N}$ y $f \in \Omega$ tales que $U_m \cap E = \emptyset$, $\frac{2}{m} h(E) \subset [-1, 1]$ y $|f(x) - \frac{2}{m} h(x)| < \frac{2\varepsilon}{m}$ para cada $x \in E$. Entonces $g = \frac{m}{2} f + \delta_m \in Y_m \subset Y$ y si $x \in E \subset X \backslash U_m$, entonces $|g(x) - h(x)| = |\frac{m}{2} f(x) + \delta_m(x) - h(x)| = |\frac{m}{2} f(x) - h(x)| = \frac{m}{2} |f(x) - \frac{2}{m} h(x)| < \frac{m}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{m} = \varepsilon$. Esto prueba que Y es denso en $C_p(X)$. $\square$

Es inmediato del Corolario 2.1.2 que si $C_p(X, [-1, 1])$ tiene un subespacio denso con una propiedad $\mathcal{P}$, entonces $C_p(X)$ tiene un subespacio denso que es la unión numerable de subespacios cerrados y disjuntos con la propiedad $\mathcal{P}$. El siguiente hecho es una consecuencia inmediata de esta observación.

Proposición 2.1.3. *Si $C_p(X, [-1, 1])$ es ψ-separable, entonces $C_p(X)$ es ψ-separable.*

Teorema 2.1.4. *Dado un espacio infinito X, sea $\kappa = iw(X)$ y supongamos que existe un subespacio discreto $D \subset X \times X$ tal que $|D| \geq \kappa$. Entonces $C_p(X)$ tiene un subespacio denso Y tal que $Y = \bigcup\{Y_m : m \in \mathbb{N}\}$ donde la familia $\{\overline{Y}_m : m \in \mathbb{N}\}$ es disjunta y Y_m es discreto para cada $m \in \mathbb{N}$. En particular, el espacio $C_p(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto de cardinalidad κ.*

Demostración. Existe un espacio discreto Ω de cardinalidad κ tal que $\Omega \subset C_p(X, [-2, 2]) \setminus C_p(X, [-1, 1])$ y $C_p(X, [-1, 1]) \subset \overline{\Omega}$ (ver [34, Lema 3.4]). Apliquemos el Corolario 2.1.2 a Ω para encontrar un conjunto denso Y de $C_p(X)$ tal que $Y = \bigcup\{Y_m : m \in \mathbb{N}\}$ donde la familia $\{\overline{Y}_m : m \in \mathbb{N}\}$ es disjunta y Y_m es homeomorfo a Ω para cada $m \in \mathbb{N}$. Es claro que cada Y_m es un subespacio cerrado discreto de Y y $|Y| \leq \kappa \cdot \omega = \kappa$. $\square$

Corolario 2.1.5. *Si X es un espacio Lindelöf Σ e $iw(X) \leq d(X)$, entonces $C_p(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto de cardinalidad $\kappa = d(C_p(X))$.*

Demostración. Se sigue del [10, Teorema 2.3] que existe un subespacio discreto $D \subset X \times X$ tal que $|D| \geq d(X) \geq iw(X) = \kappa$, por lo que aplicando el

Teorema 2.1.4 concluimos que $C_p(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto de cardinalidad κ. $\square$

El siguiente teorema es uno de los resultados principales de la tesis. Una de sus consecuencias es el hecho de que existe una clase amplia de espacios X tales que $C_{p,n}(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto.

Teorema 2.1.6. *Dado un espacio infinito X, sea $\kappa = nw(X)$ y supongamos que existe un subespacio discreto $D \subset X \times X$ tal que $|D| \geq \kappa$. Entonces $C_{p,n}(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto de cardinalidad κ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Del Teorema 2.1.4 se sigue trivialmente que $C_p(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto de cardinalidad κ. Sea $D_0 = D$; en la solución T.016 del libro [32] fue establecido que para cada $d \in D_0$ podemos escoger una función $f_d \in C_p(X)$ de tal forma que la correspondencia $d \to f_d$ es inyectiva y el conjunto $D_1 = \{f_d : d \in D_0\}$ es discreto. Notemos que $|D_1| = |D_0| = nw(X) = nw(C_p(X))$, por lo que aplicando de nuevo el Teorema 2.1.4 podemos ver que $C_pC_p(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto. Continuando por inducción, nos cercioramos de que $C_{p,n-1}(X)$ tiene un subespacio discreto D_{n-1} de cardinalidad κ y por lo tanto $C_{p,n}(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto de cardinalidad κ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Corolario 2.1.7. *Si X es un espacio Lindelöf Σ y monolítico, entonces $C_{p,n}(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto de cardinalidad $\kappa = nw(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por monoliticidad del espacio X tenemos la desigualdad $nw(\overline{A}) \leq |A|$ para cada $A \subset X$. En particular, si A es un subespacio denso de X tal que $|A| = d(X)$, entonces $nw(X) \leq |A| = d(X)$. Por [10, Teorema 2.3] existe un subespacio discreto $D \subset X \times X$ tal que $|D| \geq d(X) = nw(X) = \kappa$; aplicando el Teorema 2.1.6 concluimos que $C_{p,n}(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto de cardinalidad κ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Corolario 2.1.8. *Si X es un compacto de Corson, entonces $C_{p,n}(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto de cardinalidad $\kappa = nw(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Corolario 2.1.9. *Si X es un compacto de Gul'ko, entonces $C_{p,n}(X)$ tiene un* *subespacio denso F_σ-discreto de cardinalidad $\kappa = nw(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Corolario 2.1.10. *Si X es un compacto de Eberlein, entonces $C_{p,n}(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto de cardinalidad $\kappa = nw(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Proposición 2.1.11. *Si M es un espacio metrizable infinito, entonces existe una familia disjunta $\mathcal{U} \subset \tau^*(M)$ tal que $|\mathcal{U}| = w(M)$.*

Demostración. Todo espacio infinito tiene una familia disjunta e infinita de abiertos. En particular, si M es segundo numerable entonces existe una familia disjunta $\mathcal{U} \subset \tau^*(M)$ de cardinalidad ω. Supongamos ahora que $\kappa = w(M)$ es un cardinal regular no numerable. Existe una base $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_m : m \in \omega\}$ en el espacio M tal que $|\mathcal{B}| = \kappa$ y cada subfamilia $\mathcal{B}_m$ es discreta (y por lo tanto disjunta). Por la regularidad de κ podemos encontrar $m \in \omega$ tal que $|\mathcal{B}_m| = \kappa$. Si $\kappa = w(M) = c(M)$ no es un cardinal regular, entonces tal familia existe por el Teorema 4.1 del libro [17].

Corolario 2.1.12. *Si M es metrizable, entonces $C_{p,n}(M)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto de cardinalidad $\kappa = w(M)$ para cada cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.2.11 que existe un subespacio discreto $D \subset M$ tal que $|D| = w(M) = nw(M)$. Aplicando el Teorema 2.1.6 vemos que $C_{p,n}(M)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto de cardinalidad κ para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

El Corolario 2.1.12 implica que $C_p(M)$ tiene un subespacio denso de pseudocarácter numerable para cualquier espacio metrizable M. Sin embargo, $C_p(M)$ no necesariamente tiene un subespacio denso de i-peso numerable. Por ejemplo, si $\kappa \geq 2^{2^{\mathfrak{c}}}$ y $D(\kappa)$ es un espacio discreto de cardinalidad κ, entonces $\mathbb{R}^\kappa = C_p(D(\kappa))$ atestigua este hecho. En efecto, si Y es un subespacio denso de $\mathbb{R}^\kappa$, entonces $2^\kappa = |\mathbb{R}^\kappa| \leq 2^{2^{|Y|}}$ por [16, Teorema 3.7]. Todos los espacios que se condensan en un espacio segundo numerable tienen cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$. Por lo tanto $iw(Y) = \omega$ implica que $2^\kappa \leq 2^{2^{\mathfrak{c}}} \leq \kappa$, lo que es una contradicción.

Lema 2.1.13. *Supongamos que X es un espacio de Lindelöf y $f : X \to Y$ es una condensación. Si $x \in X$ y $\psi(x, X) \leq \omega$, entonces $\psi(f(x), Y) \leq \omega$.*

Demostración. El conjunto $X\backslash\{x\}$ es una unión numerable de cerrados y por consiguiente subespacios Lindelöf de X. Esto implica que $X\backslash\{x\}$ es Lindelöf al ser la unión numerable de espacios de Lindelöf. Por lo tanto $Y\backslash\{f(x)\}$ es Lindelöf al ser una imagen continua de $X\backslash\{x\}$.
Para cualquier $y \in Y\backslash\{f(x)\}$ tomemos un conjunto $U_y \in \tau(y, Y)$ tal que $f(x) \notin \overline{U_y}$. Escojamos un conjunto numerable $S \subset Y\backslash\{f(x)\}$ tal que $Y\backslash\{f(x)\} = \bigcup\{U_y : y \in S\}$ y observemos que $Y\backslash\{f(x)\} = \bigcup\{\overline{U_y} : y \in S\}$. Por lo tanto $\{f(x)\} = Y\backslash \bigcup\{\overline{U_y} : y \in S\} = \bigcap\{Y\backslash\overline{U_y} : y \in S\}$ es un conjunto G_δ de Y. $\square$

Teorema 2.1.14. *Si X es un espacio de Gul'ko, entonces $C_p(X)$ es ψ-separable.*

Demostración. Para $Z = \upsilon X$ el mapeo restricción $\pi : C_p(Z) \to C_p(X)$ es una condensación. Los espacios Z y $C_p(Z)$ son Lindelöf Σ (ver Teorema 1.3.20). Se sigue de los Teoremas 1.3.16 y 1.3.19 que el espacio Z es monolítico y por lo tanto $d(Z) = nw(Z)$. Por [10, Teorema 2.3] existe un subespacio discreto $D \subset Z \times Z$ tal que $|D| \geq d(Z) = nw(Z) \geq iw(Z)$. Por el Teorema 2.1.4 existe un conjunto denso Y de $C_p(Z)$ tal que $Y = \bigcup\{Y_m : m \in \mathbb{N}\}$ donde la familia $\{\overline{Y_m} : m \in \mathbb{N}\}$ es disjunta y cada Y_m es discreto.
El conjunto $E = \pi(Y)$ es denso en $C_p(X)$. Para ver que E tiene pseudocarácter numerable tomemos cualquier $g \in E$ y sean $f \in Y$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $g = \pi(f)$ y $f \in Y_m$. El espacio $F = \bigcup\{\overline{Y_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es Lindelöf y $\psi(f, F) \leq \omega$ pues f es aislado en $\overline{Y_m}$ (recordemos que Y_m es discreto y todo discreto es abierto en su cerradura) y $\overline{Y_m}$ es un conjunto G_δ en F. Aplicando el Lema 2.1.13 vemos que $\psi(g, E) \leq \psi(\pi(f), \pi(F)) \leq \omega$. $\square$

Proposición 2.1.15. *Si X es un espacio Lindelöf Σ, entonces $C_pC_p(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto.*

Demostración. Apliquemos [10, Teorema 2.3] para encontrar un subespacio discreto $D \subset X \times X$ tal que $|D| = d(X)$. En la solución T.016 del libro [32] fue establecido que para cualquier $d \in D$ podemos escoger una función $f_d \in C_p(X)$ de tal forma que la correspondencia $d \to f_d$ es inyectiva y el conjunto $E = \{f_d : d \in D\}$ es discreto. Observemos que $|E| = |D| = d(X) = iw(C_p(X))$, por lo que podemos aplicar el Teorema 2.1.4 para ver que $C_pC_p(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto. $\square$

Lema 2.1.16. *Para cualquier espacio X, si $D \subset C_p(X)$ y $|D| \leq \mathfrak{c}$, entonces es posible encontrar un conjunto $A \in [C_p(X)]^{\leq\mathfrak{c}}$ tal que D está contenido en la cerradura de A en la topología uniforme y existe un mapeo continuo e* *inyectivo* $\varphi : A \to \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $\kappa = |D|$. Para cualquier $f \in C_p(X)$ y $\varepsilon > 0$ sea $B(f, \varepsilon)$ el conjunto $\{g \in C_p(X) : |f(x) - g(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X\}$. Escojamos un punto arbitrario x_0 en X y consideremos el mapeo proyección $\pi : C_p(X) \to \mathbb{R}$ definido por $\pi(f) = f(x_0)$ para cada $f \in C_p(X)$. Tomemos una numeración $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de D. Sean $\alpha < \kappa$, $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que tenemos un conjunto $A_n^\alpha = \{g_m^\beta : \beta < \alpha$ y $m \in \mathbb{N}\} \cup \{g_k^\alpha : k < n\} \subset C_p(X)$ tal que:

($\star$) $g_m^\beta \in B(f_\beta, \frac{1}{m})$ y $g_k^\alpha \in B(f_\alpha, \frac{1}{k})$ para cada $\beta < \alpha, m \in \mathbb{N}$ y $k < n$;

($\star\star$) $g_m^\beta(x_0) \neq g_k^\gamma(x_0)$ si $(\beta, m) \neq (\gamma, k)$.

Notemos que $B(f_\alpha, \frac{1}{n}) \backslash \pi^{-1}(\pi(A_n^\alpha)) \neq \emptyset$, pues en caso contrario tenemos que $\pi(B(f_\alpha, \frac{1}{n})) \subset \pi(A_n^\alpha)$ mientras $\pi(B(f_\alpha, \frac{1}{n})) = (f_\alpha(x_0) - \frac{1}{n}, f_\alpha(x_0) + \frac{1}{n})$ y $|\pi(A_n^\alpha)| \leq |A_n^\alpha| < \kappa \leq \mathfrak{c}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto existe $g_n^\alpha \in B(f_\alpha, \frac{1}{n}) \backslash \pi^{-1}(\pi(A_n^\alpha))$. Es obvio que $\{g_m^\beta : \beta < \alpha$ y $m \in \mathbb{N}\} \cup \{g_k^\alpha : k \leq n\}$ satisface ($\star$) y ($\star\star$). Este proceso nos da un conjunto $A = \{g_n^\alpha : \alpha < \kappa$ y $n \in \mathbb{N}\} \subset C_p(X)$ de cardinalidad $\kappa \cdot \omega \leq \mathfrak{c}$, tal que $\pi|_A : A \to \mathbb{R}$ es un mapeo continuo e inyectivo por ($\star\star$). Para ver que D está contenido en la cerradura de A en la topología uniforme tomemos cualquier $f \in D$ y $\varepsilon > 0$. Existen $\alpha < \kappa$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $f = f_\alpha$ y $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Por ($\star$) existe un elemento en A, digamos $g = g_n^\alpha$, tal que $|g(x) - f(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Por lo tanto D está contenido en la cerradura de A en la topología uniforme. $\square$

El siguiente teorema caracteriza a los espacios X para los cuales $C_p(X)$ tiene un subespacio denso de i-peso numerable. Es también uno de los resultados principales de la tesis.

Teorema 2.1.17. *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier espacio X:*
(a) $C_p(X)$ tiene un subespacio denso de i-peso numerable;
(b) $d(C_p(X)) \leq \mathfrak{c}$;
(c) $iw(X) \leq \mathfrak{c}$.

Demostración. Si Y es denso en $C_p(X)$ y tiene i-peso numerable, entonces $d(C_p(X)) \leq |Y| \leq 2^{iw(Y)} \leq \mathfrak{c}$. Esto muestra que (a) implica (b).

Ahora supongamos que $\kappa = d(C_p(X)) \leq \mathfrak{c}$ y sea D un subespacio denso de $C_p(X)$ tal que $|D| = \kappa$. Por el Lema 2.1.16 existe un conjunto $A \subset C_p(X)$ tal que $iw(A) \leq \omega$ y $D \subset cl_u(A)$, donde $cl_u(A)$ es la cerradura de A en la topología uniforme. Entonces A es denso en $C_p(X)$ e $iw(A) \leq \omega$. Esto muestra que (b) implica (a).

Se sigue de la igualdad $d(C_p(X)) = iw(X)$ (ver Teorema 1.2.10) que (b) y (c) son equivalentes. $\square$

Definición 2.1.18. *Dado un espacio X, diremos que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X está concentrada alrededor de $A \subset X$ si para cualquier $U \in \tau(A, X)$, la cardinalidad de la familia $\{F \in \mathcal{F} : F \cap U = \emptyset\}$ es estrictamente menor que la cardinalidad de $\mathcal{F}$.*

El siguiente Lema fue demostrado en [29].

Lema 2.1.19. *Dado un espacio X, supongamos que una familia $\mathcal{F}$ consiste de subconjuntos finitos de X y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|F| \leq m$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Entonces existe un conjunto finito $A \subset X$ (llamado el centro de $\mathcal{F}$) tal que para cada conjunto finito $B \subset X \backslash A$, la familia $\mathcal{F}$ no está concentrada alrededor de B.*

Lema 2.1.20. *Si X es un espacio infinito y existe un conjunto $T \subset X \times X$ de pseudocarácter numerable tal que $|T| \geq iw(X)$, entonces es posible encontrar un subespacio $\Omega \subset C_p(X, [-2, 2]) \backslash C_p(X, [-1, 1])$ de pseudocarácter numerable tal que $|\Omega| \leq iw(X)$ y $C_p(X, [-1, 1]) \subset \overline{\Omega}$.*

Demostración. Sea $\kappa = iw(X)$. En esta demostración pasaremos varias veces a un subconjunto $T' \subset T$ con $|T'| = \kappa$; para simplificar la notación asumiremos en cada ocasión que $T' = T$ lo que significa que todos los razonamientos previos pueden ser repetidos para nuestro conjunto más pequeño T'. Dado un espacio Z, diremos que los conjuntos $P, Q \subset Z$ están *funcionalmente separados* si existe una función $f \in C_p(Z, [0, 1])$ tal que $f(P) \subset \{0\}$ y $f(Q) \subset \{1\}$.

Tenemos dos posibilidades mutuamente exclusivas:

(a) existe un subespacio de pseudocarácter numerable $T \subset X$ tal que $|T| = \kappa$;

(b) no hay subespacios de pseudocarácter numerable de cardinalidad κ en X pero existe un subespacio $T \subset X \times X$ con $\psi(T) \leq \omega$ y $|T| = \kappa$.

Sea $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ la diagonal del espacio X; daremos la demostración para ambos casos simultaneamente. Si consideramos el caso (b), entonces $T \cap \Delta$ tiene cardinalidad $< \kappa$ por lo que podemos pasar a un subconjunto apropiado de T de cardinalidad κ y ver que podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $T \subset X^2 \backslash \Delta$. Para cualquier elemento $t = (t_1, t_2) \in T$

definamos al conjunto $K_t = \{t_1, t_2\}$. Si consideramos el caso (a), entonces $K_t = \{t\}$.

Para el caso (b), si algún $x \in X$ pertenece a κ elementos de la familia $\mathcal{K} = \{K_t : t \in T\}$ entonces, por nuestro acuerdo, podemos asumir que $x \in K_t$ para todo $t \in T$ y por lo tanto $T \subset (\{x\} \times X) \cup (X \times \{x\})$. Esto muestra que $|T \cap (\{x\} \times X)| = \kappa$ o bien $|T \cap (X \times \{x\})| = \kappa$. Dado que los conjuntos $X \times \{x\}$ y $\{x\} \times X$ son homeomorfos a X, un subespacio de pseudocarácter numerable y cardinalidad κ se encaja en X lo que es una contradicción. Como consecuencia, si se considera el caso (b), entonces

(1) $|\{t \in T : x \in K_t\}| < \kappa$ para todo $x \in X$.

Desde luego, (1) se satisface de forma trivial para el caso (a). Para el caso (b) escojamos, para cualquier $t = (t_1, t_2) \in T$ una familia $\{U^1_{t,n}, U^2_{t,n} : n \in \mathbb{N}\}$ de abiertos en X tal que $\overline{U^1_{t,1}} \cap \overline{U^2_{t,1}} = \emptyset$ mientras $T \cap \bigcap\{U^1_{t,n} \times U^2_{t,n} : n \in \mathbb{N}\} = \{t\}$, y $U^i_{t,n+1} \subset U^i_{t,n}$ para todos $i \in \{1,2\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Para el caso (a) escojamos una sucesión decreciente $\{U_{t,n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \tau(t, X)$ tal que $T \cap \bigcap\{\overline{U}_{t,n} : n \in \mathbb{N}\} = \{t\}$.

Dado que $iw(X) = \kappa$, podemos encontrar una base $\mathcal{B}$ de cardinalidad κ para alguna topología de Tychonoff μ en el conjunto X más débil que $\tau(X)$; sea $X' = (X, \mu)$. No hay pérdida de generalidad al considerar que $B \neq \emptyset$ para cualquier $B \in \mathcal{B}$. De aquí en adelante la barra denotará la cerradura en X y todas las propiedades topológicas para las que no se menciona el espacio se deberá considerar que se satisfacen en X. Aplicando el Lema 2.1.19 al espacio X' encontramos un conjunto finito A tal que, para cualquier subconjunto finito $B \subset X \backslash A$ existe $U \in \tau(B, X')$ para el cual la cardinalidad del conjunto $\{t \in T : K_t \cap cl_{X'}(U) = \emptyset\}$ es igual a κ. Se sigue de (1) que la cantidad de elementos de la familia $\mathcal{K}$ que intersecan a A es menor que κ, por lo que pasando de ser necesario, a un subconjunto de T de cardinalidad κ, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $K_t \cap A = \emptyset$ para cualquier $t \in T$. Observemos que si agregamos un punto al conjunto A, seguirá siendo un centro para $\mathcal{K}$ por lo que podemos considerar que $A \neq \emptyset$; sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ una numeración fiel de A. Denotemos por $\mathbb{Q}_0$ al conjunto $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$.

Nuestro siguiente paso es considerar para cada $k \in \mathbb{N}$, la familia $\mathcal{W}_k$ de todas las $3k$-adas $(W_1, \ldots, W_k, V_1, \ldots, V_k, q_1, \ldots, q_k) \in \mathcal{B}^{2k} \times \mathbb{Q}_0^k$ tales que

(2) $W_i, V_i \in \mathcal{B}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$;

(3) $\overline{V_i} \subset W_i$ y el conjunto $\overline{V_i}$ está funcionalmente separado de $X \backslash W_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$;

(4) si $W = \bigcup_{i=1}^k W_i$ entonces $\overline{W} \cap A = \emptyset$ y $|\{t \in T : \overline{W} \cap K_t = \emptyset\}| = \kappa$;

(5) la familia $\{\overline{W_i} : i \leq k\}$ es disjunta.

Es inmediato que $|\mathcal{W}_k| \leq \kappa$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ por lo que si $\mathcal{W}$ es la familia $\bigcup\{\mathcal{W}_k : k \in \mathbb{N}\}$ entonces $|\mathcal{W}| \leq \kappa$. Para cualquier elemento $\xi = (W_1, \ldots, W_k, V_1, \ldots, V_k, q_1, \ldots, q_k)$ de la familia $\mathcal{W}$ sea $k_\xi = k$, $W[\xi] = \bigcup_{i=1}^{k} W_i$ y $R_i(\xi) = q_i$ para todo $i \leq k$.
Usando la propiedad (4) es fácil construir un mapeo inyectivo $\varphi : \mathcal{W} \times \mathbb{Q}_0^n \to T$ tal que $\overline{W[\xi]} \cap K_{\varphi(\xi,r)} = \emptyset$ para cualquier $\xi \in \mathcal{W}$ y $r \in \mathbb{Q}_0^n$.

Fijemos $\xi \in \mathcal{W}$ y $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Q}_0^n$; si se considera el caso (a) y $\varphi(\xi, r) = t$, podemos asumir sin pérdida de generalidad que

(6a) $\overline{U}_{t,1} \cap (W[\xi] \cup A) = \emptyset$.

Usando (6a), la familia $\{U_{t,n} : n \in \mathbb{N}\}$ y las condiciones (2)-(5) podemos escoger una función continua $f_{\xi,r} : X \to [-1, 2]$ con las siguientes propiedades:

(7a) $f_{\xi,r}(t) = 2$;
(8a) $f_{\xi,r}(s) < 2$ para todo $s \in T \backslash \{t\}$;
(9a) $f_{\xi,r}(a_i) = r_i$ para todo $i \leq n$ y $f_{\xi,r}(V_i) = \{R_i(\xi)\}$ para todo $i \leq k_\xi$.

Si se considera el caso (b) y $\varphi(\xi, r) = t = (t_1, t_2)$, entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que

(6b) $(\overline{U_{t,1}^1} \cup \overline{U_{t,1}^2}) \cap (W[\xi] \cup A) = \emptyset$.

Usando (6b), la familia $\{U_{t,n}^1, U_{t,n}^2 : n \in \mathbb{N}\}$ y las condiciones (2)-(5) podemos escoger una función continua $f_{\xi,r} : X \to [-2, 2]$ con las siguientes propiedades:

(7b) $f_{\xi,r}(t_1) = 2$ y $f_{\xi,r}(t_2) = -2$;
(8b) si $(s_1, s_2) \in T \backslash \{t\}$, entonces $f_{\xi,r}(s_1) < 2$ ó $f_{\xi,r}(s_2) > -2$;
(9b) $f_{\xi,r}(a_i) = r_i$ para todo $i \leq n$ y $f_{\xi,r}(V_i) = \{R_i(\xi)\}$ para todo $i \leq k_\xi$.

Resulta que $C_p(X, [-1, 1])$ está contenido en la cerradura en el espacio $C_p(X)$ del conjunto $\Omega = \{f_{\xi,r} : \xi \in \mathcal{W}, r \in \mathbb{Q}_0^n\} \subset C_p(X, [-2, 2]) \backslash C_p(X, [-1, 1])$. Para demostrar esto, observemos primero que $|\Omega| \leq \kappa$ por lo que es suficiente mostrar que, para cualquier conjunto finito $B = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset X \backslash A$ y cualquier $q_1, \ldots, q_k, r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}_0$ existe $f \in \Omega$ tal que $f(x_i) = q_i$ para cada $i \leq k$ y $f(a_i) = r_i$ para todo $i \leq n$.

Recordemos que el conjunto A es el centro de la familia $\mathcal{K}$ en el espacio X' y por lo tanto podemos encontrer conjuntos $W_1, \ldots, W_k \in \mathcal{B}$ tales que $x_i \in W_i$ para todo $i \leq k$, la familia $\mathcal{A}' = \{cl_{X'}(W_i) : i \leq k\}$ es disjunta (y por consiguiente la colección $\mathcal{A} = \{\overline{W_i} : i \leq k\}$ también es disjunta) y existe una cantidad κ de elementos $t \in T$ tal que $K_t \cap (\bigcup \mathcal{A}) = \emptyset$.

Es fácil escoger $V_i \in \mathcal{B}$ tal que $x_i \in V_i$ y el conjunto V_i está funcionalmente separado de $X \backslash W_i$ en X' (y por consiguiente en X) para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Es inmediato que $\xi = (W_1, \ldots, W_k, V_1, \ldots, V_k, q_1, \ldots, q_k) \in \mathcal{W}$ y para el punto $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Q}_0^n$, se tiene que $f_{\xi,r}(a_i) = r_i$ para cada $i \leq n$ y $f_{\xi,r}(x_i) = q_i$ para todo $i \leq k$; esto prueba que $C_p(X, [-1,1]) \subset \overline{\Omega}$.

Fijemos cualquier elemento $\xi = (W_1, \ldots, W_k, V_1, \ldots, V_k, q_1, \ldots, q_k) \in \mathcal{W}$ y un punto $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Q}_0^n$. Para el caso (b) consideremos el punto $t = (t_1, t_2) = \varphi(\xi, r)$; entonces $H_{\xi,r} = \{f \in C_p(X) : f(t_1) = 2 \text{ y } f(t_2) = -2\}$ es un conjunto G_δ en $C_p(X)$ y contiene la función $f_{\xi,r}$ por lo que es suficiente establecer la igualdad $H_{\xi,r} \cap \Omega = \{f_{\xi,r}\}$.

Supongamos que $f_{\eta,p} \in H_{\xi,r}$ para algún $\eta \in \mathcal{W}$ y $p \in \mathbb{Q}_0^n$; si $s = (s_1, s_2) = \varphi(\eta, p)$, entonces $f_{\eta,p}(t_1) = 2$ y $f_{\eta,p}(t_2) = -2$ lo cual, junto con (7b) y (8b), implica que $s = t$. Como φ es inyectivo, tenemos la igualdad $(\eta, p) = (\xi, r)$. Consecuentemente $H_{\xi,r} \cap \Omega = \{f_{\xi,r}\}$ y por lo tanto Ω tiene pseudocarácter numerable. El caso (a) es analógo. $\square$

En [4] Amirzhanov demostró que $C_p(X)$ es ψ-separable si X tiene un subespacio Y tal que $|Y| = |X|$ y $\psi(Y) = \omega$. Como $|X| \geq iw(X)$, el siguiente teorema (que también es uno de los resultados principales de la tesis) generaliza el resultado de Amirdzhanov.

Teorema 2.1.21. *Dado un espacio infinito X, supongamos que existe un subespacio $T \subset X \times X$ de pseudocarácter numerable tal que $|T| \geq iw(X)$. Entonces $C_p(X)$ es ψ-separable.*

Demostración. Aplicando el Lema 2.1.20 podemos encontrar un espacio $\Omega \subset C_p(X, [-2,2]) \backslash C_p(X, [-1,1])$ tal que $\psi(\Omega) \leq \omega$ y $C_p(X, [-1,1]) \subset \overline{\Omega}$. Por el Corolario 2.1.2 existe un conjunto denso Y de $C_p(X)$ tal que $Y = \bigcup\{Y_m : m \in \mathbb{N}\}$ mientras que la familia $\{\overline{Y}_m : m \in \mathbb{N}\}$ es disjunta y Y_m es homeomorfo a Ω para cada $m \in \mathbb{N}$. Finalmente, observemos que el espacio Y tiene pseudocarácter numerable al ser la unión numerable de subespacios disjuntos y cerrados de pseudocarácter numerable. $\square$

2.2. Densidad uniforme

En esta sección caracterizaremos a los espacios $C_p(X)$ que tienen un subespacio uniformemente denso de i-peso numerable. También se describirán algunas clases de espacios compactos X para los cuales $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable.

Teorema 2.2.1. *Sea X es un espacio normal y A uniformemente denso en $C_p(X)$. Si $ext(A) \leq \omega$, entonces $ext(X) \leq \omega$.*

Demostración. Primero mostraremos que

(∗) $ext(\mathbb{R}^Y) \leq ext(B)$ para cualquier conjunto arbitrario Y y subespacio uniformemente denso B de $\mathbb{R}^Y$.

Por la Proposición 2.3 de [28] existe una imagen continua C_1 del espacio $B \times [-1,1]^Y$ tal que $C_p(Y) \subset C_1 \subset \mathbb{R}^Y$; en este caso $C_p(Y) = \mathbb{R}^Y$ así que $C_1 = \mathbb{R}^Y$ lo que implica que $ext(\mathbb{R}^Y) \leq ext(B \times [-1,1]^Y)$. Como $[-1,1]^Y$ es compacto, la proyección natural $\pi : B \times [-1,1]^Y \to B$ es un mapeo perfecto. Por lo tanto $ext(B \times [-1,1]^Y) \leq ext(B)$. Esto prueba (∗).

Si $ext(X) \geq \omega_1$, entonces existe un subespacio cerrado y discreto D de X tal que $|D| = \omega_1$. Por el teorema de extensión de Tietze-Urysohn, el mapeo restricción $\pi_D : C_p(X) \to C_p(D) = \mathbb{R}^D$ es sobreyectivo. Es fácil ver que $\pi_D(A)$ es uniformemente denso en $C_p(D)$ por lo que aplicando (∗) vemos que $\omega_1 = ext(\mathbb{R}^{|D|}) = ext(C_p(D)) \leq ext(\pi_D(A)) \leq ext(A) = \omega$. Esta contradicción muestra que $ext(X) \leq \omega$. $\square$

Reznichenko construyó un ejemplo de un espacio X tal que $C_p(X)$ es Lindelöf Σ y $ext(X) = \mathfrak{c}$ (ver [33, Problema 222]). Esto muestra que la normalidad de X no puede ser omitida en el Teorema 2.2.1. Por otro lado, si X es metrizable, entonces $C_p(X)$ tiene un subespacio denso σ-compacto (ver Problema 313 de [31]). En particular, para un discreto no numerable X, existe un subespacio denso σ-compacto $A \subset C_p(X)$. Como $ext(X) > \omega$, la densidad uniforme tampoco puede ser reemplazada por densidad en el Teorema 2.2.1.

Corolario 2.2.2. *Sea X un espacio metrizable y $A \subset C_p(X)$ uniformemente denso. Si $ext(A) \leq \omega$, entonces X es segundo numerable.*

Demostración. Basta observar que X es normal por lo que podemos aplicar el Teorema 2.2.1 para ver que $w(X) = ext(X) \leq \omega$. $\square$

Corolario 2.2.3. *Si X es un espacio metrizable y $C_p(X)$ tiene un subespacio Lindelöf uniformemente denso, entonces X es segundo numerable. En particular $C_p(X)$ es Lindelöf.*

El siguiente teorema pertenece a Baturov [9].

Teorema 2.2.4. *Si M es un espacio métrico separable y Y es denso en M^{ω_1}, entonces Y es normal si y sólo si es colectivamente normal.*

Corolario 2.2.5. *Si A es uniformemente denso en $\mathbb{R}^{\omega_1}$, entonces A no es normal.*

Demostración. Si A es normal, entonces es colectivamente normal por el Teorema 2.2.4. Para cada espacio colectivamente normal tenemos que $ext(A) \leq c(A)$ por lo que $ext(A) \leq c(\mathbb{R}^{\omega_1}) = \omega$. Observemos que $\mathbb{R}^{\omega_1}$ es homeomorfo a $C_p(X)$ para un espacio discreto X con $|X| = \omega_1$. Por el Corolario 2.2.2 concluimos que $w(X) = \omega_1 \leq ext(A) \leq \omega$ lo que es una contradicción. $\Box$

Si A es uniformemente denso en $C_p(X)$, entonces cada función en $C_p(X)$ es el límite uniforme de una sucesión de elementos de A. El siguiente resultado es una consecuencia trivial de este hecho.

Proposición 2.2.6. *Si A es uniformemente denso en $C_p(X)$, entonces la cardinalidad de $C_p(X)$ no excede $|A|^\omega$.*

El siguiente enunciado es uno de los resultados principales de la tesis ya que brinda una caracterización de los espacios de funciones con un subespacio uniformemente denso de i-peso numerable. Este criterio no trivial permite encontrar de forma inmediata un ejemplo que resuelve un problema publicado (ver ejemplo 2.2.10).

Teorema 2.2.7. *Si X es un espacio no vacío, entonces $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de i-peso numerable si y sólo si $|C_p(X)| = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Cada espacio de i-peso numerable tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$, por lo que si A es uniformemente denso en $C_p(X)$ e $iw(A) \leq \omega$, entonces podemos aplicar la Proposición 2.2.6 para ver que $|C_p(X)| \leq |A|^\omega \leq \mathfrak{c}^\omega = \mathfrak{c}$. Esto prueba la necesidad.

Si $|C_p(X)| = \mathfrak{c}$, entonces podemos aplicar el Lema 2.1.16 a $D = C_p(X)$ para ver que existe un subespacio uniformemente denso A de $C_p(X)$ tal que A se condensa en un subespacio de $\mathbb{R}$. $\square$

Proposición 2.2.8. *Si X es un espacio Lindelöf Σ, entonces la cardinalidad de $C_p(X)$ no excede $nw(X)^\omega$.*

Demostración. Sea $\kappa = nw(X)$ y observemos que $d(C_p(X)) \leq nw(C_p(X)) = nw(X) = \kappa$; fijemos un conjunto denso $D \subset C_p(X)$ con $|D| \leq \kappa$. La propiedad Lindelöf Σ de X implica que $t(C_p(X)) = sup\{l(X^n) : n \in \mathbb{N}\} = \omega$ (ver Teorema 1.2.15) y por ello $C_p(X) = \bigcup\{\overline{A} : A \in [D]^{\leq\omega}\}$. El espacio $C_p(X)$ es monolítico (ver Teoremas 1.3.16 y 1.3.18) así que $nw(\overline{A}) \leq \omega$ y por consiguiente $|\overline{A}| \leq \mathfrak{c}$ para cada $A \in [D]^{\leq\omega}$. Por lo tanto $|C_p(X)| \leq \mathfrak{c} \cdot \kappa^\omega = \kappa^\omega$. $\square$

Corolario 2.2.9. *Si X es un espacio Lindelöf Σ y $nw(X) \leq \mathfrak{c}$, entonces $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de i-peso numerable. En particular, si X es compacto y $w(X) \leq \mathfrak{c}$, entonces $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de i-peso numerable.*

En el artículo [28] Tkachuk demostró que si $X = A(\mathfrak{c})$ es la compactificación unipuntual de un espacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$, entonces $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable. En el Problema 3.5 del mismo artículo se preguntó si la existencia de un subespacio uniformemente denso de i-peso numerable en $C_p(Y)$ implica que $C_p(Y)$ también tenga i-peso numerable. El siguiente ejemplo resuelve este problema.

Ejemplo 2.2.10. Si $X = A(\mathfrak{c})$ es la compactificación unipuntual de un espacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$, entonces $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de i-peso numerable mientras que $iw(C_p(X)) = \mathfrak{c}$.

Demostración. Como $w(X) \leq |X| = \mathfrak{c}$, podemos aplicar el Corolario 2.2.9 para ver que $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de i-peso numerable. Por otro lado, $iw(C_p(X)) = d(X) = \mathfrak{c}$ por Teorema 1.2.9. $\square$

Lema 2.2.11. *Si κ es un cardinal infinito, entonces existe un mapeo $\varphi : \kappa^\omega \to [\kappa]^{\leq\omega}$ tal que $\varphi(\alpha)\backslash\varphi(\beta)$ y $\varphi(\beta)\backslash\varphi(\alpha)$ son no vacíos cuando α y β son elementos distintos de κ^ω.*

Demostración. Escojamos una biyección $h : \omega \times \kappa \to \kappa$ y denotemos por ${}^\omega\kappa$

al conjunto de funciones que mapean ω en κ. Claramente $|{}^{\omega}\kappa| = \kappa^{\omega}$ por lo que es suficiente probar que existe un mapeo inyectivo $\varphi' : {}^{\omega}\kappa \to [\kappa]^{\leq\omega}$ con la propiedad antes mencionada. Sea $\varphi'(p) = \{h(n, p(n)) : n \in \omega\}$ para cada $p \in {}^{\omega}\kappa$. Es inmediato que $\varphi'(p) \in [\kappa]^{\leq\omega}$ para todo $p \in {}^{\omega}\kappa$ y $\varphi'(p)\backslash\varphi'(q) \neq \emptyset \neq \varphi'(q)\backslash\varphi'(p)$ cuando p y q son elementos distintos de ${}^{\omega}\kappa$. $\square$

El siguiente teorema también es un resultado principal de la tesis dado que muestra una relación inesperada entre una propiedad puramente topológica y una igualdad cardinal.

Teorema 2.2.12. *Dado un cardinal infinito κ, el espacio $\mathbb{R}^{\kappa}$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable si y sólo si $2^{\kappa} = \kappa^{\omega}$.*

Demostración. Sea $\varphi : \kappa^{\omega} \to [\kappa]^{\leq\omega}$ como en el Lema 2.2.11. Si $2^{\kappa} = \kappa^{\omega}$, entonces $|\mathbb{R}^{\kappa}| = 2^{\kappa} = \kappa^{\omega}$ y por lo tanto podemos escojer una numeración $\{f_{\alpha} : \alpha < \kappa^{\omega}\}$ del conjunto $\mathbb{R}^{\kappa}$. Dado un ordinal $\alpha < \kappa^{\omega}$ y $n \in \mathbb{N}$, tomemos arbitrariamente $g_n^{\alpha}(\xi) \in (f_{\alpha}(\xi) - \frac{1}{n}, f_{\alpha}(\xi) + \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}$ para cada $\xi \in \varphi(\alpha)$ y $g_n^{\alpha}(\zeta) \in (f_{\alpha}(\zeta) - \frac{1}{n}, f_{\alpha}(\zeta) + \frac{1}{n}) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ para cada $\zeta \in \kappa\backslash\varphi(\alpha)$. El conjunto $A = \{g_n^{\alpha} : \alpha < \kappa^{\omega}, n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente denso en $\mathbb{R}^{\kappa}$. En efecto, si $f \in \mathbb{R}^{\kappa}$ y $\varepsilon > 0$, escojamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Existe un ordinal $\alpha < \kappa^{\omega}$ para el cual $f = f_{\alpha}$. Entonces $g_n^{\alpha}(\theta) \in (f(\theta) - \frac{1}{n}, f(\theta) - \frac{1}{n})$ y por lo tanto $|g_n^{\alpha}(\theta) - f(\theta)| < \varepsilon$ para cada $\theta \in \kappa$.
Para ver que $\psi(A) \leq \omega$, tomemos cualquier $g_n^{\alpha} \in A$. Observemos que $O = \{f \in \mathbb{R}^{\kappa} : f|_{\varphi(\alpha)} = g_n^{\alpha}|_{\varphi(\alpha)}\}$ es un conjunto G_{δ} en $\mathbb{R}^{\kappa}$. Si $\beta \neq \alpha$ y $m \in \mathbb{N}$, entonces existe un ordinal ξ en $\varphi(\alpha)\backslash\varphi(\beta)$ por lo cual $g_n^{\alpha}(\xi) \in \mathbb{Q}$ mientras que $g_m^{\beta}(\xi) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Esto implica que $O \cap A \subset \{g_m^{\alpha} : m \in \mathbb{N}\}$ y por lo tanto $\{g_n^{\alpha}\} = (O \cap A)\backslash\{g_m^{\alpha} : m \neq n\}$ es un conjunto G_{δ} en A, i.e., $\psi(g_n^{\alpha}, A) \leq \omega$. Como la función $g_n^{\alpha} \in A$ fue escogida de manera arbitraria, probamos que $\psi(A) \leq \omega$. Por lo tanto A es un subespacio uniformemente denso de $\mathbb{R}^{\kappa}$ y $\psi(A) \leq \omega$. Esto prueba la suficiencia.

Para establecer la necesidad supongamos que A es un subespacio uniformemente denso de $\mathbb{R}^{\kappa}$ y $\psi(A) = \omega$. Notemos que $nw(A) \leq nw(\mathbb{R}^{\kappa}) = \kappa$; esto implica que $|A| \leq nw(A)^{\psi(A)}$ (ver Teorema 4.1 de [16]) y por lo tanto $|A| \leq \kappa^{\omega}$. La Proposición 2.2.6 muestra que $2^{\kappa} = |\mathbb{R}^{\kappa}| \leq |A|^{\omega} \leq (\kappa^{\omega})^{\omega} = \kappa^{\omega}$. $\square$

Corolario 2.2.13. *El espacio $\mathbb{R}^{\mathfrak{c}}$ no tiene subespacios uniformemente densos* *de pseudocarácter numerable. Por lo tanto existe un espacio metrizable X tal que $C_p(X)$ no tiene subespacios uniformemente densos de pseudocarácter numerable.*

Corolario 2.2.14. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(a) *$\mathbb{R}^{\omega_1}$ tiene un subespacio uniformemente denso A tal que $iw(A) = \omega$;*
(b) *$\mathbb{R}^{\omega_1}$ tiene un subespacio uniformemente denso A tal que $\psi(A) = \omega$;*
(c) *$2^{\omega_1} = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{R}^{\omega_1}$ tiene un subespacio uniformemente denso de i-peso numerable. Cada espacio de i-peso numerable también tiene pseudocarácter numerable por lo que **(a)** implica **(b)**.

Supongamos que $\mathbb{R}^{\omega_1}$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable. Entonces se sigue del Teorema 2.2.12 que $2^{\omega_1} = \omega_1^{\omega} = \mathfrak{c}$; esto prueba que **(b)** implica **(c)**.

Si $2^{\omega_1} = \mathfrak{c}$, entonces $|\mathbb{R}^{\omega_1}| = 2^{\omega_1} = \mathfrak{c}$. Si X es el espacio discreto de cardinalidad ω_1, entonces podemos aplicar el Teorema 2.2.7 para ver que $\mathbb{R}^{\omega_1} = C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de i-peso numerable. De modo que **(c)** implica **(a)** por lo que las condiciones **(a)-(c)** son equivalentes. $\square$

Teorema 2.2.15. *Si X es un compacto cero-dimensional que tiene un subespacio discreto D tal que $|D| = w(X)$, entonces $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable.*

Demostración. Sea $\kappa = w(X)$. Si $\kappa \leq \mathfrak{c}$, entonces $|C_p(X)| = \mathfrak{c}$ por la Proposición 2.2.8 y por lo tanto $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable por el Teorema 2.2.7. Ahora supongamos que $\kappa > \mathfrak{c}$ y tomemos una base $\mathcal{B}$ en el espacio X tal que los elementos de $\mathcal{B}$ son abierto-cerrados y $|\mathcal{B}| = \kappa$. Para cada $B \in \mathcal{B}$ consideremos la función continua $\xi_B : X \to \mathbb{R}$ definida por $\xi_B(x) = 1$ si $x \in B$ y $\xi_B(x) = 0$ si $x \in X \backslash B$. Es claro que el conjunto $P = \{\xi_B : B \in \mathcal{B}\}$ separa los puntos de X y $|P| = \kappa$. Por [33, U.006] podemos construir un álgebra $A(P) \subset C_p(X)$ tal que $P \subset A(P)$, la cardinalidad de $A(P)$ no es mayor que $\kappa \cdot \mathfrak{c} = \kappa$ y los elementos de $A(P)$ son de la forma $\lambda_0 + \lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_m g_m$ donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y cada g_i es un producto finito de elementos de P para cada $i \leq m$. Por el teorema de Stone-Weierstrass el espacio $A(P)$ es denso en $C_u(X)$. Tomando $r_i \in \mathbb{Q}$ suficientemente cerca de λ_i podemos garantizar que $h = r_0 + r_1 g_1 + \ldots + r_m g_m$ está en cualquier vecindad deseada de $\lambda_0 + \lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_m g_m$ en la topología uniforme, y así el conjunto $H = \{h \in A(P) : h(X) \subset \mathbb{Q}\}$ es un subespacio denso de $A(P)$ con la topología heredada de $C_u(X)$. Por lo tanto H es uniformemente denso en $C_p(X)$.

Sea $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una numeración fiel de D y $\{h_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una numeración de H. Escojamos una sucesión $\{s_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ que converge a cero y $B_\alpha \in \mathcal{B}$ tal que $B_\alpha \cap D = \{x_\alpha\}$ para cada $\alpha < \kappa$. Si $f_n^\alpha = h_\alpha + s_n \cdot \xi_{B_\alpha}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\{f_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformemente a h_α para cada $\alpha < \kappa$. Como consecuencia inmediata $Y = \{f_n^\alpha : \alpha < \kappa \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente denso en $C_p(X)$.

Para probar que Y tiene pseudocarácter numerable, fijemos un ordinal $\alpha < \kappa$ y observemos que $O = \{f \in C_p(X) : f(x_\alpha) = f_n^\alpha(x_\alpha)\}$ es un conjunto G_δ de $C_p(X)$ tal que $f_n^\alpha \in O$. Supongamos que $\beta \neq \alpha$ y $f_m^\beta \in O$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces $f_m^\beta(x_\alpha) = f_n^\alpha(x_\alpha)$, pero $f_m^\beta(x_\alpha) = h_\beta(x_\alpha) + s_m \cdot \xi_{B_\beta}(x_\alpha) = h_\beta(x_\alpha) \in \mathbb{Q}$ y $f_n^\alpha(x_\alpha) = h_\alpha(x_\alpha) + s_n \cdot \xi_{B_\alpha}(x_\alpha) = h_\alpha(x_\alpha) + s_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ lo que es una contradicción. Esto muestra que $Y \cap O \subset \{f_m^\alpha : m \in \mathbb{N}\}$ y por lo tanto $\psi(f_n^\alpha, Y) \leq \omega$. $\square$

Corolario 2.2.16. *Si κ es un cardinal y $X = \{0,1\}^\kappa$ es el cubo de Cantor de peso κ, entonces $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable.*

Demostración. Para cada $\alpha \in \kappa$ consideremos a la función $x_\alpha : \kappa \to \{0,1\}$ definida por $x_\alpha(\alpha) = 1$ y $x_\alpha(\beta) = 0$ si $\beta \neq \alpha$. Por el Teorema 2.2.15 es suficiente observar que los elementos de la base canónica de X son abierto-cerrados en X y que el conjunto $D = \{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ es discreto en X. $\square$

Proposición 2.2.17. *Si X es un compacto de Gul'ko infinito, entonces X tiene una familia disjunta de abiertos no vacíos de cardinalidad $w(X)$.*

Demostración. Sea M un subespacio metrizable y denso de X (ver Teorema 1.4.13). Entonces $c(X) \leq c(M) = w(M) \leq w(X)$ y se sigue del Teorema 1.4.14 que $c(X) = w(X)$. Aplicamos la Proposición 2.1.11 para encontrar una familia disjunta $\mathcal{U} \subset \tau^*(M)$ tal que $|\mathcal{U}| = w(M)$. Para cada $U \in \mathcal{U}$ escojamos $W_U \in \tau(X)$ tal que $W_U \cap M = U$. Entonces la familia $\mathcal{W} = \{W_U : U \in \mathcal{U}\}$ es disjunta y tiene cardinalidad $w(M) = w(X)$. $\square$

Proposición 2.2.18. *Sea X un espacio normal y F un subespacio cerrado de X. Dadas dos funciones $g : X \to \mathbb{R}$ y $f : F \to \mathbb{R}$ tales que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in F$, podemos encontrar una función $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\hat{f}|_F = f$*

y $|\hat{f}(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ *para todo* $x \in X$.

Demostración. Si $h = f - (g|_F)$, entonces $|h(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in F$. Por la normalidad de X podemos encontrar una función continua $u : X \to [-\varepsilon, \varepsilon]$ tal que $u|_F = h$. Si $\hat{f} = g + u$, entonces $|\hat{f}(x) - g(x)| = |g(x) + u(x) - g(x)| = |u(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$. Si $x \in F$, entonces $\hat{f}(x) = g(x) + u(x) = g(x) + h(x) = f(x)$. □

Un espacio X se llama *simple* si existe un único punto $p \in X$ que no es aislado.

Lema 2.2.19. *Dado un espacio normal* X*, supongamos que* $K \subset X$ *es un subespacio cerrado y simple. Si* Y *es un subespacio de* $C_p(X)$ *de cardinalidad a lo más* $|K|^\omega$ *entonces existe* $A \subset C_p(X)$ *tal que* $\psi(A) \leq \omega$ *y* Y *está contenido en la cerradura de* A *en la topología uniforme en* $C(X)$.

Demostración. Dado cualquier $S \subset C_p(X)$ denotaremos por $\overline{S}^u$ su cerradura en la topología uniforme. Sea $z \in K$ el único punto no aislado de K y consideremos los conjuntos $Y^* = \{f + r : f \in Y \text{ y } r \in \mathbb{R}\}$ y $H = \{h \in Y^* : h(z) \in \mathbb{Q}\}$. Es claro que $|H| \leq |Y| \cdot \mathfrak{c} \leq |K|^\omega$ y $Y \subset \overline{H}^u$. Hagamos $\kappa = |H|$ y tomemos una numeración $\{h_\alpha : \alpha < \kappa\}$ del conjunto H. Sea $\varphi : \kappa \to [K \backslash \{z\}]^{\leq \omega}$ un mapeo con las mismas propiedades que en el Lema 2.2.11. Para cada $\alpha < \kappa$ sea $sp(h_\alpha) = \{x \in K : h_\alpha(x) \neq h_\alpha(z)\}$ y consideremos una numeracion fiel $\{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ de $\varphi(\alpha)$.

Dados $\alpha < \kappa$ y $n \in \mathbb{N}$ construiremos una función $f_n^\alpha : K \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

(i) si $x \in K \backslash (\varphi(\alpha) \cup sp(h_\alpha))$, entonces $f_n^\alpha(x) = h_\alpha(z)$;

(ii) si $x = u_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces $|f_n^\alpha(u_i) - h_\alpha(u_i)| < \frac{1}{i+n}$ y $f_n^\alpha(u_i)$ es irracional;

(iii) si $x \in sp(h_\alpha) \backslash \varphi(\alpha)$, entonces $|f_n^\alpha(x) - h_\alpha(x)| < \frac{1}{n}$ y $f_n^\alpha(x)$ es racional; además $h_\alpha(x) < f_n^\alpha(x) < h_\alpha(z)$ si $h_\alpha(x) < h_\alpha(z)$ y $h_\alpha(z) < f_n^\alpha(x) < h_\alpha(x)$ en caso contrario.

De *(i)*-*(iii)* es fácil ver que f_n^α satisface

(iv) $|f_n^\alpha(x) - h_\alpha(x)| < \frac{1}{n}$ para todo $x \in K$ y $f_n^\alpha(x) \in \mathbb{Q}$ si y solo si $x \in K \backslash \varphi(\alpha)$.

Notemos que si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y $h_\alpha(z) \in I$, entonces $U = h_\alpha^{-1}(I) \cap K$ es abierto en K. Por construcción podemos encontrar $D \subset K \backslash \{z\}$

y un conjunto finito $F \subset K\backslash\{z\}$ tales que $(f_n^\alpha)^{-1}(I) = (U\backslash F) \cup D$, por lo que $(f_n^\alpha)^{-1}(I)$ también es abierto en K y por lo tanto $f_n^\alpha : K \to \mathbb{R}$ es continua. Apliquemos la Proposición 2.2.18 para encontrar $\hat{f}_n^\alpha \in C_p(X)$ tal que $\hat{f}_n^\alpha|_K = f_n^\alpha$ y $|h_\alpha(x) - \hat{f}_n^\alpha(x)| \leq \frac{1}{n}$ para todo $x \in X$.

Es fácil verificar que la sucesión $\{\hat{f}_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformemente a h_α para todo $\alpha < \kappa$. Para el conjunto $A = \{\hat{f}_n^\alpha : n \in \mathbb{N}, \alpha < \kappa\}$ esto implica que $Y \subset \overline{H}^u \subset \overline{A}^u$ por lo que es suficiente mostrar que $\psi(A) \leq \omega$. Fijemos $\alpha < \kappa$ y $n \in \mathbb{N}$; entonces $O = \{g \in C_p(X) : g|_{\varphi(\alpha)} = \hat{f}_n^\alpha|_{\varphi(\alpha)}\}$ es un conjunto G_δ de $C_p(X)$ y $\hat{f}_n^\alpha \in O$. Supongamos que $\beta \neq \alpha$ y $\hat{f}_m^\beta \in O$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Escojamos $x \in \varphi(\alpha)\backslash\varphi(\beta)$. De *(iv)* concluimos que $\hat{f}_n^\alpha(x) = f_n^\alpha(x) \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y $\hat{f}_m^\beta(x) = f_m^\beta(x) \in \mathbb{Q}$ lo que contradice el hecho de que $\hat{f}_m^\beta|_{\varphi(\alpha)} = \hat{f}_n^\alpha|_{\varphi(\alpha)}$. Esto muestra que $A \cap O \subset \{\hat{f}_m^\alpha : m \in \mathbb{N}\}$ y por lo tanto $\psi(\hat{f}_n^\alpha, A) \leq \omega$. $\square$

Corolario 2.2.20. *Si X es un espacio Lindelöf Σ y $K \subset X$ es un subespacio cerrado y simple tal que $|K| = nw(X)$, entonces $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.8 la cardinalidad del espacio $C_p(X)$ no excede $nw(X)^\omega = |K|^\omega$. Por el Lema 2.2.19 existe $A \subset C_p(X)$ tal que $\psi(A) \leq \omega$ y A es uniformemente denso en $C_p(X)$. $\square$

Corolario 2.2.21. *Si X es un espacio compacto de peso κ y $A(\kappa)$ se encaja en X, entonces $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable. Aquí $A(\kappa)$ es la compactificación unipuntual del espacio discreto de cardinalidad κ.*

Corolario 2.2.22. *Si X es un compacto diádico y $w(X)$ es un cardinal sucesor, entonces $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable.*

Proof. Como el espacio X es diádico, tenemos que $\psi(X) = w(X)$; además para cualquer $x \in X$ existe un subespacio discreto $D \subset X$ tal que $|D| = \mu = \psi(x, X)$ y $D \cup \{x\}$ es homeomorfo a $A(\mu)$ (ver [11, 3.12.12(i)]). Como $\kappa = w(X)$ es un cardinal sucesor, existe $x \in X$ tal que $\psi(x, X) = \kappa$ y por lo tanto $A(\kappa)$ se encaja en X. Por el Corolario 2.2.21 el espacio $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable. $\square$

Teorema 2.2.23. *Si X es un espacio de Gul'ko tal que $nw(X) = iw(X)$, entonces $C_{p,2n}(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter* *numerable para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si Z es un espacio arbitrario, entonces $iw(Z) = d(C_p(Z)) = iw(C_pC_p(Z)) = d(C_{p,2n+1}(X)) = iw(C_{p,2n+2}(X))$ para todo $n < \omega$ y $nw(Z) = nw(C_p(Z))$ (ver Teoremas 1.2.5, 1.2.9 y 1.2.10). Notemos que $iw(C_{p,2n}(X)) = nw(C_{p,2n}(X))$ para todo número natural n. Apliquemos [27, Teorema 2.5] para ver que $C_{p,2m+1}(X)$ es un espacio Lindelöf Σ para cada $m \in \omega$. Fijemos $m \in \omega$; por [30, Teorema 17] existe un subespacio cerrado simple $L \subset C_{p,2m+1}(X)$ que separa los puntos de $C_{p,2m}(X)$. Si $\Delta L : C_{p,2m}(X) \to \mathbb{R}^L$ es el producto diagonal de la familia L, entonces ΔL es un mapeo inyectivo. Esto muestra que $|L| \geq iw(C_{p,2m}(X)) = nw(C_{p,2m}(X)) = nw(C_{p,2m+1}(X))$. Por el Corolario 2.2.20 el espacio $C_{p,2m+2}(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable. $\square$

Corolario 2.2.24. *Si ambos X y $C_p(X)$ son espacios Lindelöf Σ, entonces $C_{p,n}(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable para todo $n > 1$.*

Demostración. Por el Teorema 1.3.16 los espacios X y $C_p(X)$ son estables por lo cual $iw(X) = nw(X) = nw(C_p(X)) = iw(C_p(X))$. El espacio $C_pC_p(X)$ también es Lindelöf Σ por el Corolario 1.3.22. Aplicando el Teorema 2.2.23 a los espacios X y $Y = C_p(X)$ concluimos que $C_{p,2n}(X)$ y $C_{p,2n}(Y)$ tienen un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable para cada $n \in \mathbb{N}$, pero $C_{p,2n}(Y) = C_{p,2n}(C_p(X)) = C_{p,2n+1}(X)$. Por lo tanto $C_{p,n}(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable para todo $n > 1$. $\square$

El siguiente teorema (que es otro más de los resultados principales de la tesis) muestra que en el caso de los compactos de Gul'ko todos sus espacios iterados de funciones tienen un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable. Este es un resultado nuevo incluso para los compactos de Eberlein.

Teorema 2.2.25. *Si X es un compacto de Gul'ko, entonces $C_{p,n}(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Se sigue del Corolario 2.2.24 que $C_{p,n}(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable para $n > 1$. A continuación, probaremos este hecho para $n = 1$.

Si $\kappa = w(X) \leq \mathfrak{c}$, entonces $|C_p(X)| = \mathfrak{c}$ y por lo tanto el Teorema 2.2.7 implica que el espacio $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable. De modo que podemos asumir, sin pérdida de generalidad que $\kappa > \mathfrak{c}$. Por [30, Teorema 17] existe un subespacio cerrado simple $L \subset C_p(X)$ que separa los puntos de X. Notemos que L es Lindelöf al ser cerrado en $C_p(X)$. Para cada $x \in X$ consideremos el mapeo proyección $\pi_x : C_p(X) \to \mathbb{R}$ definido por $\pi_x(f) = f(x)$ para cada $f \in C_p(X)$. Observemos que:

(i) $\pi_x(L)$ es numerable para todo $x \in X$.

En efecto, si p es el punto no aislado de L y n es un número natural, entonces $O_n = (\pi_x|_L)^{-1}((\pi_x(p) - \frac{1}{n}, \pi_x(p) + \frac{1}{n}))$ es una vecindad abierta de p y por lo tanto existe a lo más una cantidad numerable de elementos de L tal que su imagen bajo π_x no está en $(\pi_x(p) - \frac{1}{n}, \pi_x(p) + \frac{1}{n})$. Esto concluye la demostración de (i).

Si $\Delta L : X \to \mathbb{R}^L$ es el producto diagonal de la familia L, entonces ΔL es un encaje puesto que L separa los puntos de X. Consecuentemente $|L| \geq \kappa$. Por otro lado, $L \backslash \{p\}$ es un subespacio discreto de $C_p(X)$ y por lo tanto $|L \backslash \{p\}| \leq nw(C_p(X)) = nw(X) = \kappa$. Como resultado, concluimos que

(ii) $|L| = \kappa$.

Por [33, U.006] podemos construir un álgebra $A(L) \subset C_p(X)$ tal que $L \subset A(L)$, la cardinalidad de $A(L)$ es igual a $|L| \cdot \mathfrak{c} = \kappa$ y los elementos de $A(L)$ son de la forma $\lambda_0 + \lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_m g_m$ donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$ y cada g_i es un producto finito de elementos de L para cada $i \leq m$. Por el teorema de Stone-Weierstrass el espacio $A(L)$ es denso en $C_u(X)$. Tomando $r_i \in \mathbb{Q}$ suficientemente cerca a λ_i podemos garantizar que $h = r_0 + r_1 g_1 + \ldots + r_m g_m$ está en cualquier vecindad deseada de $\lambda_0 + \lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_m g_m$ en la topología uniforme por lo cual el conjunto $H = \{r_0 + r_1 g_1 + \ldots + r_m g_m : r_i \in \mathbb{Q}$ y cada g_i es un producto finito de elementos de L para cada $i \leq m\}$ es un subespacio denso de $A(L)$ con la topología heredada de $C_u(X)$. Por lo tanto H es un subespacio uniformemente denso de $C_p(X)$. También es claro que $|H| = \kappa$.

Si $x \in X$, entonces $\pi_x(H) \subset \{r_0 + r_1 z_1 + \ldots + r_m z_m : r_i \in \mathbb{Q}$ y cada z_i es un producto finito de elementos de $\pi_x(L)$ para cada $i \leq m\}$; de modo que

(iii) $\pi_x(H)$ es numerable para todo $x \in X$.

Sea $\{h_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una numeración de H. Por la proposición 2.2.17 existe una familia disjunta $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de abiertos no vacíos de X. Para cualquier $\alpha < \kappa$ escojamos $x_\alpha \in U_\alpha$ y una función continua $\delta_\alpha : X \to [0, 1]$ tal que $\delta_\alpha(x_\alpha) = 1$ y $\delta_\alpha(X \backslash U_\alpha) \subset \{0\}$; consideremos el anillo numerable Q_α

generado por el conjunto $\pi_{x_\alpha}(H)$ y escojamos una sucesión $\{s_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}\backslash Q_\alpha$ tal que $\lim_{n\to\infty} s_n^\alpha = 0$. Si $f_n^\alpha : X \to \mathbb{R}$ está definida por la igualdad $f_n^\alpha = h_\alpha + s_n^\alpha \cdot \delta_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces es fácil ver que la sucesión $\{f_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformemente a h_α para cada $\alpha < \kappa$ y por lo tanto el conjunto $Y = \{f_n^\alpha : \alpha < \kappa, n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente denso en $C_p(X)$.

Para probar que Y es de pseudocarácter numerable, fijemos cualquier $\alpha < \kappa$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $O = \{f \in C_p(X) : f(x_\alpha) = f_n^\alpha(x_\alpha)\}$, entonces O es un subconjunto G_δ de $C_p(X)$ y $f_n^\alpha \in O$. Supongamos que $\beta \neq \alpha$ y $f_m^\beta \in O$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces $f_m^\beta(x_\alpha) = f_n^\alpha(x_\alpha)$, pero

$$\begin{gathered} f_m^\beta(x_\alpha) = h_\beta(x_\alpha) + s_m^\beta \cdot \delta_\beta(x_\alpha) = h_\beta(x_\alpha) \in Q_\alpha \text{ y} \\ f_n^\alpha(x_\alpha) = h_\alpha(x_\alpha) + s_n^\alpha \cdot \delta_\alpha(x_\alpha) = h_\alpha(x_\alpha) + s_n^\alpha \in \mathbb{R}\backslash Q_\alpha, \end{gathered}$$

lo que es una contradicción. Esto prueba que $Y \cap O \subset \{f_m^\alpha : m \in \mathbb{N}\}$ y por lo tanto $\psi(f_n^\alpha, Y) \leq \omega$. $\square$

Corolario 2.2.26. *Si X es un compacto de Eberlein, entonces $C_{p,n}(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable para todo $n \in \mathbb{N}$.*

El siguiente ejemplo muestra que, incluso para un espacio compacto X, en el Teorema 2.2.24 no se puede omitir la suposición de que $C_p(X)$ tenga la propiedad Lindelöf Σ.

Ejemplo 2.2.27. *Existe un espacio compacto X tal que $C_pC_p(X)$ no tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable.*

Demostración. Sea $X = \beta\mathbb{N}$. Si A es uniformemente denso en $C_pC_p(X)$ y $\psi(A) \leq \omega$, entonces $|C_pC_p(X)| \leq |A|^\omega \leq (nw(A)^{\psi(A)})^\omega = nw(A)^\omega = nw(C_pC_p(X))^\omega = \mathfrak{c}$ lo que es una contradicción con el hecho de que $|X| = 2^{\mathfrak{c}}$ y X se encaja en $C_pC_p(X)$. $\square$

Conclusiones y perspectivas

En esta tesis se obtuvieron nuevos resultados sobre subespacios densos de pseudocarácter numerable en espacios de funciones. Se generalizó un viejo teorema de Amirdzhanov sobre ψ-separabilidad de $C_p(X)$ y se descubrieron amplias clases de espacios X tales que $C_p(X)$ tiene un subespacio denso F_σ-discreto. Se demostró, entre otras cosas, que si X es un espacio Lindelöf Σ y monolítico entonces todos los espacios iterados de funciones de X tienen un subespacio denso F_σ-discreto. En particular, dicha conclusión es válida si X es un compacto de Corson.
La tesis también presenta avances en el estudio de subespacios uniformemente densos de pseudocarácter numerable en espacios de funciones. Se logró demostrar que todos los espacios iterados de funciones de cualquier compacto de Gul'ko tienen un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable. Cabe mencionar que, además, se obtuvo una clasificación completa de cardinales κ tales que $\mathbb{R}^\kappa$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable.

Los métodos de análisis de subespacios densos y uniformemente densos utilizados en la tesis forman una sólida base para lograr más avances en el área. Los siguientes problemas abiertos publicados esbozan posibles líneas de investigación que constituirían un desarrollo natural del estudio realizado en la tesis.

1) Supongamos que X es un espacio de Tychonoff arbitario. ¿Es cierto que $C_p(X)$ es ψ-separable?

2) Supongamos que X es un espacio compacto de Hausdorff. ¿Es cierto que $C_p(X)$ es ψ-separable?

3) Supongamos que X es un espacio compacto de Hausdorff. ¿Es cierto que $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter nume-

rable?

4) Supongamos que X es un compacto diádico. ¿Es cierto que $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso de pseudocarácter numerable?

5) Supongamos que X es un compacto de Eberlein ¿Es cierto que $C_p(X)$ tiene un subespacio uniformemente denso F_σ-discreto?

Bibliografía

[1] J. Aguilar-Velázquez, *On dense subspaces of countable pseudocharacter in function spaces*, Topology Appl., **221**(2017), 59-68.

[2] J. Aguilar-Velázquez y V.V. Tkachuk, *If K is Gul'ko compact, then every iterated function space $C_{p,n}(K)$ has a uniformly dense subspace of countable pseudocharacter*, J. Math. Anal. Appl., **470:1**(2019), 308-317.

[3] G.P. Amirdzhanov, *On dense subspaces of countable pseudocharacer and other generalizations of separability* (en ruso), Doklady Akad. Nauk SSSR, **234:5**(1977), 993-996.

[4] G.P. Amirdzhanov, *Everywhere dense subspaces of products of topological spaces with special properties* (en ruso), Uspekhi Mat. Nauk, **40:3**(1985), 197-198.

[5] A.V. Arkhangel'skii, *Topological Function Spaces*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1992.

[6] A.V. Arkhangel'skii, *On Lindelöf property and spread in C_p-theory*, Topology Appl., **74**(1996), 83-90.

[7] A.V. Arkhangel'skii, *Some observations on C_p-theory and bibliography*, Topology Appl., **89**(1998), 203-221.

[8] D.P. Baturov, *On subspaces of function spaces*, Vestnik MGU, Matematika, Mech., **42:4**(1987), 66-69.

[9] D.P. Baturov, *Normality in dense subspaces of products*, Topology Appl. **36**(1990), 111-116.

[10] D. Burke y V.V. Tkachuk, *Diagonals and discrete subsets of squares*, Comment. Math. Univ. Carolin., **54:1**(2013), 69-82.

[11] R. Engelking, *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.

[12] L. Gillman y M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, D. Van Nostrand Company, Princeton, 1960.

[13] G. Gruenhage, Generalized Metric Spaces, en *Handbook of Set-Theoretic Topology*, K. Kunen and J. E. Vaughan, eds., North Holland, Amsterdam, 1984, 423-501.

[14] G. Gruenhage, *A note on Gul'ko compact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **100**(1987), 371-376.

[15] S.P. Gul'ko, *On the structure of topological spaces and hereditary paracompactness*, Uspekhi Mat. Nauk, **34:6**(1979), 33-40.

[16] R.E. Hodel, Cardinal Functions I, *Handbook of Set-Theoretic Topology*, K. Kunen and J. E. Vaughan eds., North Holland, Amsterdam, 1984, 1-61.

[17] I. Juhász, *Cardinal Functions in Topology, Ten Years Later*, Mathematical Centre Tracks, Amsterdam, 1980.

[18] K. Kunen, *Set Theory, An Introduction to Independence Proof*, North-Holland, 1992.

[19] A.G. Leiderman y G.A. Sokolov, *Adequate families of sets and Corson compacts*, Comment. Math. Univ. Carolin., **25:2**(1984), 233-246.

[20] K. Nagami, *Σ-spaces*, Fund. Math., **65:2**(1969), 169-192.

[21] J. Nagata, *On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces*, Osaka Math. J., **1:2**(1949), 166-181.

[22] N. Noble, *The density character of function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **42:1**(1974), 228-233.

[23] O.G. Okunev, *On compactness-like properties of function spaces endowed with the topology of pointwise convergence* (en ruso), Bull. Acad. Sci. Georgian SSR, **134:3**(1989), 473-475.

[24] O.G. Okunev, *On Lindelöf Σ-spaces of continuous functions in the pointwise topology*, Topology Appl., **49**(1993), 149-166.

[25] O.V. Sipacheva, *Structure of iterated function spaces with the topology of pointwise convergence for Eberlein compacta* (en ruso), Mat. Zametki, **47:3**(1990), 91-99.

[26] G.A. Sokolov, *Lindelöf property and the iterated function spaces*, Fund. Math. **36** (1986), 887–894.

[27] V.V. Tkachuk, *Behavior of the Lindelöf Σ-property in iterated function spaces*, Topology Appl., **107**(2000), 297-305.

[28] V.V. Tkachuk, *Properties of function spaces reflected by uniformly dense subspaces*, Topology Appl., **132**(2003), 183-193.

[29] V.V. Tkachuk, *Function spaces and d-separability*, Quaestiones Math., **28**(2005), 409-424.

[30] V.V. Tkachuk, *Lindelöf Σ-spaces: an omnipresent class*, RACSAM, **104:2**(2010), 221-244.

[31] V.V. Tkachuk, *A C_p-Theory Problem Book, Topological and Function spaces*, Springer, New York, 2011.

[32] V.V. Tkachuk, *A C_p-Theory Problem Book, Special Features of Function spaces*, Springer, New York, 2014.

[33] V.V. Tkachuk, *A C_p-Theory Problem Book, Compactness in Function spaces*, Springer, New York, 2015.

[34] V.V. Tkachuk, *Discrete reflexivity in function spaces*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **22**(2015), 1-14.

[35] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.

Índice alfabético

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00065
Matrícula: 2123802846

SUBESPACIOS DENSOS DE PSEUDOCARÁCTER NUMERABLE EN ESPACIOS DE FUNCIONES

En la Ciudad de México, se presentaron a las 15:00 horas del día 8 del mes de octubre del año 2019 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS
DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA
DR. REYNALDO ROJAS HERNANDEZ
DR. MIKHAIL TKACHENKO GALIEVICH

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

DE: JOEL ALBERTO AGUILAR VELAZQUEZ

JOEL ALBERTO AGUILAR VELAZQUEZ
ALUMNO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS

VOCAL

DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA

VOCAL

DR. REYNALDO ROJAS HERNANDEZ

SECRETARIO

DR. MIKHAIL TKACHENKO GALIEVICH